Prof. Ir. Soemono

Ilmu Gaya

BANGUNAN-BANGUNAN STATIS TAK TENTU

KAAN
MUR

Penerbit Djambatan

PELANGGARAN TERHADAP UNDANG-UNDANG HAK CIPTA

Pasal 44

(1) Barangsiapa dengan sengaja dan tanpa hak mengumumkan atau memperbanyak suatu ciptaan atau memberi izin untuk itu, dipidana dengan pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp 100.000.000,– (seratus juta rupiah).

(2) Barangsiapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam ayat (1), dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp 50.000.000, (lima puluh juta rupiah).

ILMU GAYA

BANGUNAN-BANGUNAN STATIS TAK TERTENTU

oleh

Prof. Ir. Soemono

GURU-BESAR PADA
INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

PENERBIT DJAMBATAN

Perpustakaan Daerah
Jawa Timur
1000

Copyright © pada Djambatan
Anggota IKAPI
Cetakan pertama 1953
Cetakan kedua 1963
Cetakan ketiga 1971
Cetakan keempat 1980
Cetakan kelima 1982
Cetakan keenam 1985
Cetakan ketujuh 1993

PERPUSTAKAAN DAERAH JAWA TIMUR
JL. MENUR PUMPUNGAN No. 32
S U R A B A Y A
TAHUN ANGGARAN 1996 / 1997

M I L I K
PERPUSTAKAAN DAERAH
JAWA TIMUR
Nomor : 84.329 / PD / R / 96
Tanggal : 30/10 '96

ISBN 979 428 201 4

Dicetak pada percetakan
Sapdodadi

DAFTAR ISI

KATA PEMBUKA XI
PENGANTAR 1

A. ROBAHAN BENTUK ATAU DEFORMASI 1
§ 1. Robahan-bangun atau deformasi terdiri dari; § 2. Robahan-panjang membujur; § 3. Robahan-panjang melintang; § 4. Perluasan; § 5. Batang dengan luas-tampang tak tetap; § 6. Kekuatan normal tak tetap; § 7. Putaran-sudut; § 8. Geseran; § 9. Kekuatan-melintang dan tegangan-geser; § 10. Torsi atau pilin.

B. GARIS LENTUR 15
§ 1. Radius-perbengkokan; § 2. Hubungan dengan momen; § 3. Balok terjepit sebelah; § 4. Tafsiran secara geometri; § 5. Balok di atas dua perletakan; § 5a. Bidang-momen (bidang M_x) sebagai muatan; § 6. Balok dimuati penuh terbagi rata; § 7. Beberapa muatan terpusat; § 8. Muatan terbagi; § 9. Momen tetap; § 10. Balok dengan I tak tetap; § 11. Secara garfis.

C. PERALIHAN TITIK-HUBUNGAN PADA VAKWERK CARA WILLIOT 35
§ 1. Uraian; § 2. Diagram Williot; § 3. Vakwerk di atas dua perletakan.

D. PEKERJAAN DEFORMASI 40
§ 1. Robahan-panjang; § 2. Putaran sudut; § 3. Geseran; § 4. Torsi; § 5. Resume; § 6. Pekerjaan deformasi luar.

BAB I: ARTI STATIS TAK TERTENTU 45
§ 1. Pengantar; § 2. Pembagian; § 3. Bangunan-bangunan yang bekerja bersama-sama; § 4. Statis tak tertentu-luar; § 5. Statis tak tertentu-dalam; § 6. Perbandingan antara statis tak tertentu luar dan dalam; § 7. Kombinasi; § 8. Cara menghitung.

BAB II: PERSAMAAN DEFORMASI 54

A. FAKTOR PENGARUH-LUAR 54
§ 1. Arti faktor pengaruh-luar; § 2. Hukum Maxwell; § 3. Perluasan hukum Maxwell; § 4. Hukum Castigliano; § 5. Beberapa con-

toh; § 6. P_a dan P_b bekerjanya tak vertikal; § 7. Penggunaan; § 8. Kesalahan di dalam konstruksi; § 9. Garis-elastis sebagai garis-pengaruh; § 10. Garis-elastis pada bangunan statis tak tertentu berlipat dua.

B. FAKTOR PENGARUH-DALAM 74
§ 11. Pengertian; § 12. Penggunaan pada statis tak tertentu tunggal; § 13. Beberapa contoh; § 14. Statis tak tertentu berganda dua; § 15. Salah penyelenggaraan (salah stellan); § 16. Akibat derajat-panas; § 17. Contoh.

BAB III: HUKUM PEKERJAAN DEFORMASI MINIMUM 86
§ 1. Statis tak tertentu tunggal; § 2. Mempergunakan dalil ilmu pasti; § 3. Deformasi yang terpenting; § 4. Penggunaan.

BAB IV: BALOK TERUSAN DI ATAS BEBERAPA TITIK PERLETAKAN 95

A. PUTARAN SUDUT UJUNG-BALOK 95
§ 1. Balok di atas dua titik-perletakan; § 2. Momen peralihan; § 3. Persamaan tiga momen; § 4. Hitungan; § 5. Akibat derajat-panas; § 6. Salah stellan; § 7. Penggunaan faktor pengaruh dalam, α; § 8. Hukum Castigliano; § 9. Reaksi-perletakan sebagai gaya kelebihan; § 10. Menghitung φ^0; § 11. Poligon-batang dan momen peralihan.

B. BALOK DI ATAS TIGA PERLETAKAN 112
§ 12. Menggunakan persamaan tiga momen; § 13. Reaksi perletakan sebagai gaya kelebihan; § 14. Contoh; § 15. Salah pelaksanaan; § 16. EI tak tetap; § 17. Pertinggian-serong atau voute; § 18. Garis-garis pengaruh; § 19. Hubungan antara garis-garis pengaruh; § 20. Analisis; § 21. Satu ujung balok terjepit; § 22. Perletakan-perletakan terapung (ponton).

C. BALOK DI ATAS EMPAT PERLETAKAN 137
§ 23. Muatan berpusat; § 24. Muatan terbagi rata, q (penuh); § 25. Kombinasi muatan-muatan-lapangan; § 26. Garis-pengaruh; § 27. Susunan dasar diambil balok AD;

D. BALOK TERJEPIT PADA UJUNG-UJUNGNYA 145
§ 28. Pandangan umum; § 29. Beberapa hitungan-hitungan; § 30. Garis-pengaruh; § 30a. Perletakan A dijadikan sendi.

E. BALOK DI ATAS BANYAK PERLETAKAN 155
§ 31. Dengan EI tetap; § 32. Beberapa lapangan berturut-turut bebas.

F. PERLETAKAN KENYAL 158
§ 33. Arti; § 34. Kepala-tihang tak beralih (mendatar); § 35. Kepala-tihang dapat beralih; § 36. Beberapa contoh; § 36a. Cara lain; § 37. Portal dengan tihang-tihang serong; § 37a. Portal dua-sendi sama tingginya.

G. POLIGON-BATANG LENTUR 174
§ 38. Arti dan tujuan; § 39. Analisa; § 40. Cara melukiskan; § 41. Cara grafis sepenuhnya; § 42. Cara analysis; § 43. Jepitan di ujung balok (ujung A); § 44. Balok di atas banyak perletakan; § 45. Salah stellan (pelaksanaan); § 46. Perletakan-kenyal.

H. MOMEN-INERSIA TAK TETAP 186
§ 47. Cara grafis; § 48. Cara analisa; § 49. Akibat momen-momen ujung; § 50. Akibat beban luar; § 51. Akibat momen-momen ujung (M_l dan M_r); § 52. Akibat beban luar.

I. BALOK-BALOK PERSILANGAN 198
§ 53. Dua balok; § 54. Beberapa balok; § 55. Lanjutan

BAB V: BALOK DILETAKKAN PADA SELURUH PANJANGNYA 204
§ 1. Benda di atas tanah ditekan; § 2. Balok di atas tanah; § 3. Balok dimuati di tengah-tengah; § 4. Ujung balok tak boleh terangkat ke atas; § 5. Balok sepanjang $2l = \infty$ dibebani dengan P di tengah-tengah; § 6. Balok AB = l dengan EI tetap di atas tanah dan di atas dua perletakan bebas; § 7. Muatan tidak di tengah-tengah; § 8. Rail di atas bantalan-membujur; § 9. Rail di atas bantalan-bantalan melintang; § 10. Bantalan-melintang; § 11. Muatan-terbagi; § 12. Cara grafis;

BAB VI: BUSUR ATAU PELENGKUNG STATIS TAK TERTENTU 218

A. PERALIHAN TEMPAT 218
§ 1. Cara menyelidikinya; § 2. Penyederhanaan; § 3. Cara graris;

B. BUSUR DENGAN DUA SENDI 221
§ 4. Dengan faktor pengaruh-luar; § 5. Dengan faktor pengaruh dalam; § 6. Dengan hukum faktor Castigliano; § 7. Secara langsung; § 8. Penyederhanaan; § 9. Pelengkung dengan batang-tarik; § 10. Derajat-panas; § 11. Salah setelan (penyelenggaraan); § 12. Beberapa contoh; § 13. Garis-pengaruh H; § 14. Pandangan lain; § 15. Garis-pengaruh H secara analisa; § 16. Menggunakan Hukum Maxwell; § 17. Secara pendekatan; § 18. Pelengkung belahan lingkaran dengan EI tetap; § 19. Garis-pengaruh M_x, N_x dan Q_x; § 20. Garis-S; § 21. Bentuk pelengkung yang terhemat; § 22. Tampang terbahaya; § 23. Pelengkung tak simetris; § 24. Deretan pelengkung di atas beberapa pilar; § 25. Pilar dengan batang tarik; § 26. Sendi terletak tinggi.

C. PORTAL DENGAN DUA SENDI 257
§ 27. Portal lurus simetris; § 28. Menggunakan hukum Maxwell; § 28a. Portal tigasendi sebagai susunan dasar; § 29. Portal buntu; § 30. Portal segi-tiga simetris; § 31. Portal simetris dengan kaki serong; § 31a. Menggunakan hukum Maxwell; § 31b. Alasan simetri; § 32. Portal dengan tihang-tihang rangkap; § 33. Portal dengan balok tarik; § 37. Garis penghubung AB serong.

D. PELENGKUNG TERJEPIT 294
§ 38. Dengan faktor-faktor pengaruh luar; § 39. Secara langsung; § 40. Dengan hukum Castigliano; § 41. Dengan faktor-faktor pengaruh dalam; § 42. Penyederhanaan; § 43. Menentukan letak O; § 44. Akibat panas; § 45. Salah kedudukan; § 46. Garis-garis pengaruh H, V dan M; § 47. Cara grafis; § 48. Pandangan lebih lanjut; § 49. Secara mengadakan potongan di puncak; § 50. Garis-garis pengaruh gaya-tampang, M_X, N_X dan Q_X; § 51. Sumbu-pelengkung dan garis-tekan muatan tetap; § 52. Cara grafis; § 53. Pelengkung lingkaran (bulat) simetris dengan EI tetap; § 54. Pelengkung parabol simetris; § 55. Potongan di pangkal A; § 56. Pelengkung simetris menurut rumus; § 57. Pengaruh bentuk pelengkung atas H, V dan M; § 58. Hukum pekerjaan minimum; § 59. Garis tekan dan poligon batang; § 59a. Tinjauan akibat bengkoknya sumbu; § 60. Garis S; § 61. Pelengkung tak simetris.

E. PORTAL TERJEPIT 342
§ 62. Portal tegak simetris; § 63. Portal-buntung; § 64. Busur segi-tiga simetris tegak; § 65. Portal serong simetris; § 66. Portal dengan konsol; § 67. Portal dengan balok; § 68. Beban tidak langsung; § 69. Portal tak simetris; § 69a. Beberapa contoh.

F. BANGUNAN BATANG TERTUTUP 368
§ 70. Gelangan lingkaran; § 71. Gelangan dengan dua pasangan gaya radial; § 72. Dua beban P tidak diametral; § 73. Pipa berisi cairan penuh; § 73a. Robahan suku pada cairan di dalam pipa; § 74. Sengkang persegi ABCD; § 75. Sengkang ABCE di atas dua; § 76. Belahan lingkaran dengan tali-busurnya; § 76a. Bangunan seperti di atas terbalik;

G. BANGUNAN-BANGUNAN LAINNYA 380
§ 77. Balkon lingkaran; § 77a. Perjalanan-perjalanan lain; § 78. Tekanan angin di atas busur; § 79. Kubah dengan bidang rotasi; § 80. Kubah bola.

BAB VII: CARA CROSS 392

A. PENGANTAR 392
§ 1. Pembagian (distribusi) momen; § 2. Penggunaan; § 2a. Contoh dengan tihang serong; § 3. Dasar cara Cross; § 4. Menghitung momen ujung primar, M^o_{kj};

B. TITIK-HUBUNGAN TAK BERGESER 405
§ 5. Dua titik-hubungan; § 6. Contoh dengan dua titik-hubungan; § 7. Portal tiga kaki; § 8. Cara dengan persamaan tiga-momen; § 9. Kejadian simetris.

C. GESERAN TUNGGAL 415
§ 10. Momen-momen ujung akibat goyangan; § 11. Contoh, portal dua kaki; § 11a. Dengan persamaan-persamaan putaran-sudut; § 12. Beban mendatar P melalui kepala tihang; § 13. Balok di atas tiga tihang; § 14. Muatan mendatar; § 14a. Khusus: P melalui kepala tihang (ke kanan); § 15. Momen-konsol; § 15a. Dihitung sebagai pelengkung dua sendi; § 16. Dengan persamaan putaran sudut; § 17. Portal dengan tihang serong; § 18. Goyangan pada portal simetris; § 19. Geseran vertikal; § 19a. Muatan vertikal P di titik 2; § 10. Akibat turunnya (amblesnya) salah satu tihang; § 21. Tihang tepi turun; § 22. Tihang-antara turun; § 23. Portal dengan tihang-tihang serong; § 24. Portal jepit simetris; § 25. Portal dua sendi.

D. GESERAN BERGANDA 446
§ 26. Tinjauan; § 27. Bangunan portal dengan palang serong; § 27a. Beban-beban berpusat melalui titik hubungan; § 28. Dihitung sebagai pelengkung dua sendi; § 29. Rangka-payon simetris; § 29a. Cara lain; § 29b. Dihitung sebagai pelengkung terjepit; § 30. Bangunan seperti di atas, tetapi A dan B sendi; § 30a. Dihitung sebagai pelengkung dua sendi; § 31. Portal bertingkat dua, simetris; § 32. Bangunan dengan goyangan berganda tiga; § 32a. Dihitung sebagai pelengkung dua sendi.

E. BANGUNAN DENGAN BATANG PENARIK 476
§ 33. Bangunan simetris; § 33a. Dihitung sebagai pelengkung terjepit; § 34. Bangunan tidak simetris.

F. BANGUNAN VIERENDEEL 483
§ 35. Bangunan simetris berganda dua; § 36. Bangunan Vierendeel tidak simetris; § 37. Bentuk rasuk vierendeel khusus; § 38. Garis-lentur sebagai garis-pengaruh.

G. MOMEN INERSIA TIDAK TETAP 491
§ 39. Faktor induksi.

BAB VIII: BANGUNAN DENGAN GANTUNGAN DAN SOKONGAN 493
§ 1. Balok bertulang; § 2. Lanjutan, garis pengaruh H; § 3. Balok dengan sokongan; § 4. Gantungan berakhir di antara titik-titik perletakan; § 5. Salah pelaksanaan; § 6. Balok dengan gantungan; § 6a. Lanjutan, garis pengaruh H; § 7. Salah pelakanaan; § 8. Pelengkung sebagai sokongan; § 8a. Contoh; § 9. Balok di atas tiga perletakan dengan gantungan; § 10. Kombinasi gantungan dan sokongan; § 11. Gantungan rangkap; § 12. Vakwerk tergantung; § 13. Pelengkung dengan batang tarik tergantung; § 14. Portal sendi/rol dengan gantungan; § 15. Portal dua sendi dengan gantungan § 16. Portal payon dua sendi dengan pendel bercabang; § 17. Pengaruh robahan derajat-panas.

BAB IX: VAKWERK STATIS TAK TERTENTU 541
§ 1. Urian; § 2. Diagonal (rangkap); § 3. Lanjutan garis pengaruh X; § 31. Cara analisa; § 4. Diagonal rangkap di seluruh bangunan; § 5. Penahanan angin bawah dengan diagonal-diagonal rangkap pada vakwerk; § 6. Portal angin penghabisan dengan diagonal rangkap; § 7. Segi enam teratur dengan semua diagonal-diagonalnya; § 8. Rangka payon dengan batang tarik; § 9. Vakwerk di atas tiga perletakan; § 10. Dua kotakan dengan diagonal rangkap; § 11. Vakwerk dengan sokongan; § 12. Rasuk paralel dengan gantungan bawah disertai diagonal rangkap; § 13. Pelengkung vakwerk dua sendi; § 14. Contoh Sederhana; § 15. Portal vakwerk dua sendi; § 16. Batang-tarik menukik tergantung; § 17. Pelengkung vakwerk terjepit; § 18. Contoh portal-jepit tak simetris; § 19. Vakwerk dengan n bentang; § 20. Sebagian batang-batang menahan momen-lentur.

BAB X: BANGUNAN VIERENDEEL 586
§ 1. Pengertian; § 2. Tihang-tihang dianggap kaki d tak terhingga; § 3. Lanjutan; § 4. Gaya-gaya yang bekerja pada tihang; § 5. Garis-pengaruh: A, B dan V; § 6. Bangunan simetris terhadap sumbu-sumbu mendatar dan vertikal; § 7. Korreksi tentang kekakuan tihang; § 8. Korreksi terhadap garis-momen; § 9. Contoh, bangunan berupa parabol; § 10. Rasuk paralel; § 11. Perancah atau pilar paralel; § 12. Portal terjepit; § 13. Garis-garis pengaruh; § 14. Bangunan tak simetris.

BAB XI: LANTAI DI BENGKOK MURNI 609
§ 1. Sudut serong pada lantai melengkung; § 2. Bengkokan pada lantai melengkung; § 3. Menggunakan lingkaran-Mohr; § 4. Hubungan antara bengkokan dan tegangan; § 5. Hubungan dengan momen; § 6. Kejadian-kejadian khusus; § 7. Akibat derajat-panas; § 8. Pekerjaan tertimbun di dalam lantai terbengkok; § 9. Pembatasan berlakunya rumus-rumus;

BAB XII: LANTAI-LINGKARAN DIBENGKOK SIMETRIS 626
§ 1. Persamaan differensi; § 2. Lantai dimuati rata dengan q (t/m2); § 3. Lantai lingkaran dengan lobang sentris (di tengah-tengah); § 4. Muatan berpusat konsentris; § 5. Seperti di atas, tetapi tepi di jepit; § 6. Muatan terbagi rata di dalam bidang konsentris; § 7. Muatan terpusat; § 8. Muatan terpusat di titik tengah lantai; § 9. Korreksi pada theori elementer.

BAB XIII: LANTAI DIMUATI 652
§ 1. Persamaan differensi lengkungan; § 2. Sarat-sarat tepi; § 3. Lantai persegi di atas empat sisi perletakan; § 4. Perbandingan dengan lengkung pada membran; § 5. Beberapa contoh; § 6. Lantai persegi panjang di atas dua perletakan.

KATA PEMBUKA

Cetakan pertama.

Alasan untuk menulis buku ini ialah oleh karena penulis pernah mengajar "Ilmu Gaya" bagian "Statis tak tertentu" pada Fakultas Teknik "Gadjah Mada" di Yogyakarta, sedang sekarang mengajar juga di dalam mata pelajaran tersebut pada Kursus Akhliteknik di "Djawatan Kereta Api", Bandung. Oleh karena pelajar-pelajar pada Kursus ini kebanyakan keluaran (abiturienten) dari Sekolah Teknik Menengah, mereka sudah mempunyai pengetahuan tentang "Ilmu Gaya" bagian "Statis tertentu" dan berhubung dengan ini maka yang mereka akan pelajari ialah terutama bagian statis tak tertentu, meskipun bagian statis tertentu juga akan diperdalam nanti.

Itulah sebabnya mengapa penulis mempunyai hasrat akan menulis buku tentang "Ilmu Gaya", hanya bagian statis tak tertentu saja, dengan penuh pengharapan bahwa buku itu nanti akan berguna untuk mereka yang mempelajari pengetahuan itu, termasuk juga para student pada fakultas teknik-civil dan pula untuk para pengajar sendiri.

Tentu saja buku ini tak akan lengkap dengan sempurna sehingga para pelajar tidak lagi memerlukan pimpinan serta penerangan dari pengajar, sebab "perkataan hidup" dari fihak pengajar adalah yang terpenting di dalam pendidikan. Akan tetapi oleh karena belum adanya buku semacam ini di dalam bahasa Indonesia, bagaimanapun juga boleh diharap bahwa sumbangan dari penulis ini akan ada faedahnya.

Untuk para pelajar yang mempunyai pendidikan dari Sekolah Teknik Menengah diadakan ruang "Pengantar" agar supaya mereka lebih mudah dapat mengikuti karangan ini. Selain dari pada itu perlu diingatkan di sini bahwa sebagai syarat-mutlak untuk dapat mengikutinya ialah pengetahuan ilmu-pasti tinggi, terutama bagian hitungan differensi dan integrasi, sebab ini adalah alat yang penting untuk mempelajari serta menerangkan soal-soal Ilmu Gaya secara luas dan dalam.

Apabila nanti cita-cita penulis untuk menerbitkan buku ini tercapai, maka ini terjadi atas bantuan dari para kollega seperti Prof. Ir. Wreksodhiningrat, Ketua Fakultas Teknik pada Perguruan Tinggi Negeri *"Gadjah Mada"* di Yogyakarta yang antara lain memberi sumbangan berupa "Kata Pengantar", Prof. Ir. SOENARJO, Guru-Besar "Ilmu Gaya" pada Fakultas tersebut, Ir. SOETOMO WONGSOTJITRO, Lektor pada T.H. di Bandung yang memberi perantaraan dengan fihak Penerbit, saudara M. KASMIN yang menyelenggarakan gambar-gambar di dalam tekst dan last not least *Badan Penerbit Djambatan* di Jakarta yang sanggup melaksanakan terbitnya karangan ini. Kepada mereka ini disampaikan ucapan terima kasih banyak.

Pun dari para kollega dan para akhli yang barangkali membaca buku ini diharap memberikan kritik-kritik yang mereka anggap perlu agar supaya nanti dapat diperhatikan guna memperbaikinya, untuk mana sebelum dan sesudahnya diucapkan perasaan terima kasih juga.

Mudah-mudahan berhasillah sumbangan penulis ini di dalam masyarakat.

PENULIS

PRAKATA

pada cetakan ke-4

Edisi baru ini menunjukkan beda yang tidak sedikit dengan yang lama, Di samping penggunaan ejaan baru, juga ada beberapa perubahan tambahan sehingga banyaknya halaman bertambah dari 470 menjadi 676 halaman.

Yang terbanyak menerima tambahan adalah bab VI, VII dan VIII (perluasan pengeterapan hukum timbal balik MAXWELL, penggunaan kejadian simetri di dalam hitungan cara CROSS dan lain-lainnya).

Lambatnya penerbitan edisi baru ini antara lain disebabkan oleh kesukaran teknis yang dialami oleh Penerbit, yaitu pembaharuan *Matrys* dan sebagainya.

Mudah-mudahan edisi baru ini dapat memenuhi harapan para pemakai.

Bandung, 1980

PENULIS

PENGANTAR

A. ROBAHAN BENTUK ATAU DEFORMASI

§ 1. Robahan-bangun atau deformasi terdiri dari :

a. *Robahan-panjang, yaitu perpanjangan atau* perpandakan. Ini disebabkan oleh gaya-atau *kekuatan-normal* (menarik atau menekan).

b. *Putaran-sudut* : serat-serat pada sesuatu penampang menderita robahan-panjang yang tidak sama. Dua tampang yang semula sejajar terhadap satu sama lain, tidak lagi begitu : mereka berputar sudut terhadap satu sama lain. Kejadian ini ditimbulkan oleh *momen-lengkung* atau-*lentur.*

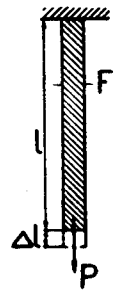
c. *Geseran* : dua tampang yang semula siku-siku terhadap satu sama lain letaknya, tidak begitu lagi. Ini disebabkan oleh *kekuatan-melintang* atau *gaya-geser.*

d. *Torsi* atau *pilin* : sesuatu tampang berputar mengelilingi sumbu yang berdiri tegak terhadapnya. Disebabkan oleh *momen-torsi* atau *momen-pilin.*

Sebagai akibat dari robahan-bangun, tertimbullah *tegangan-tegangan* di dalam bagian-bagian pada konstruksi atau bangunan.

§ 2. Robahan-panjang membujur.

Batang dengan luas-tampang F (cm^2) dan panjang l (cm) ditarik sentris dengan kekuatan sebesar P (kg). Ini berakibat, bahwa batang akan memanjang, yaitu sebanyak Δl (cm).



Gambar 1

Menurut hukum Hooke, maka perpanjangan Δl ini terdapat :

a. bertanding lurus dengan panjangnya batang semula (l)
b. bertanding lurus dengan besarnya kekuatan yang menarik (P).
c. bertanding lawan dengan luas-tampang batang (F).
d. tergantung kepada sifat bahan darimana batang ini terjadi, sifat mana berhubungan dengan *kekenyalan* bahan tersebut dan yang terbilang dengan *modulus-kekenyalan* atau *module of elasticity E.*

Jika kita menggunakan faktor E ini, maka ayat d di atas boleh dirobah menjadi : *bertanding lawan dengan E.*

Kemudian, hukum Hooke tadi dapat dibilangkan dengan rumus :

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}$$

Oleh karena robahan-panjang itu bertanding lawan dengan E dan F, atau juga dengan EF, maka faktor EF ini disebut : *faktor perlawanan terhadap robahan-panjang.*

Oleh karena Δl dan l itu berdimensi ukuran panjang (cm, m, dsb.) sedang P berdimensi kekuatan (kg,ton) dan F berdimensi luas (cm^2, m^2) maka

$E = \frac{Pl}{F.\Delta l}$ berdimensi kg/cm^2 dan EF berdimensi kekuatan atau kg.

Seringkali kita memerlukan robahan-panjang *relatif* atau *spesifik,* yaitu perbandingan antara robahan-panjang (Δl) dan panjang-semula (l), jadi faktor $\frac{\Delta l}{l}$ yang biasanya tertulis dengan huruf ε ; dan juga memakai faktor $\frac{P}{F}$ atau *tegangan* yang lazimnya ditulis dengan huruf σ.

Dengan begitu, rumus Hooke tadi menjadi

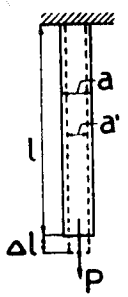
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} \text{ atau } \sigma = \varepsilon E$$

Perlu diingat, bahwa ε itu besaran *tak berdimensi,* sebab hanya angka perbandingan saja sedang σ mempunyai dimensi kg/cm2. Menurut rumus terakhir di atas ini, juga boleh dimengerti bahwa E mempunyai dimensi seperti σ, dan boleh dibaca juga bahwa *tegangan itu bertanding lurus dengan robahan-panjang relatif (regangan).*

Hukum di atas tadi juga berlaku jika P itu kekuatan menekan sentris, hanya saja perpanjangan harus diganti dengan perpandakan. Biasanya σ-menarik itu dianggap positif dan σ-menekan, negatif. Dengan begitu nilai ϵ pada perpanjangan menjadi positif dan pada perpandakan, negatif.

§ 3. Robahan-panjang melintang.

Batang tertarik sentris, selain dari pada memanjang ke arah kerjanya kekuatan yang menarik, juga akan *bersusut ke arah melintang* ($\perp$ arah kerja kekuatan tersebut). Sesuatu ukuran melintang-semula sebesar a menjadi lebih pandak sehingga menjadi $a' < a$. Perpandakan melintang dapat ditentukan menurut rumus :



Gambar 2

$\Delta a = a' - a.$

Robahan panjang spesifik menjadi $\epsilon' = \frac{\Delta a}{a} = -\frac{(a-a')}{a}$, *sedang* sedang $E = \Delta\ell/\ell = \sigma/E$, terdapat antara hubungan tertentu antara E' dan E, yaitu $\epsilon' = -\epsilon/m$ (berlawanan tandanya).

$$a' = a\left(1 - \frac{\sigma}{mE}\right) = a\left(1 - \frac{1}{m}\varepsilon\right)$$

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{1}{m}\cdot\frac{\sigma}{E} = -\frac{1}{m}\varepsilon$$

Besaran m dinamakan *kontraksi-modulus*

Jika luas-tampang semula ada F maka sesudah batang ditarik, menjadi :

$$F' = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 F = \left(1 - \frac{\sigma}{mE}\right)^2 F = \left\{1 - 2\frac{\sigma}{mE} + \left(\frac{\sigma}{E}\right)^2\right\}F$$

Oleh karena $\frac{\sigma}{E}$ itu kecil sekali dibandingkan dengan 1 (biasanya $< \frac{1}{500}$), atau tertulis $\frac{\sigma}{E} \ll 1$, maka $\left(\frac{\sigma}{E}\right)^2$ boleh diabaikan, dan kita mendapat :

$$F' = \left(1 - \frac{2}{m}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)F$$

$$l' = l + \Delta l = l(1+\varepsilon) = l\left(1 + \frac{\sigma}{E}\right)$$

Isi benda sesudah ditarik menjadi :

$$I' = l'F' = lF\left(1 + \frac{\sigma}{E}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\cdot\frac{\sigma}{E}\right) = I\left(1 + \frac{\sigma}{E} - \frac{2}{m}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)$$

jika suku yang mengandung $\left(\frac{\sigma}{E}\right)^2$ diabaikan pula.

Menurut hukum kodrat-alam, isi benda yang ditarik itu selalu menjadi bertambah, jadi :

$$I' > I$$

$$\frac{I'}{I} > 1$$

$$\frac{I'}{I} = 1 + \frac{\sigma}{E} - \frac{2}{m}\frac{\sigma}{E} > 1$$

$$\frac{\sigma}{E} - \frac{2}{m}\frac{\sigma}{E} > 0$$

$$1 - \frac{2}{m} > 0$$

$$m > 2$$

Bahan-bahan yang dipergunakan di dalam bangunan-teknik (kayu, beton, batu, besi) kebanyakan mempunyai m yang bernilai antara 3 dan 4.

Uraian di atas ini berlaku pula pada batang yang tertekan sentris. Hanya saja ukuran-melintangnya menjadi *bertambah*, sedang ϵ bernilai negatif. Jadi $\frac{\Delta a}{a} = -\frac{1}{m}\epsilon$ bernilai positif, yang berarti bahwa Δa sekarang ada tambahan-panjang. Selanjutnya akan terdapat.

$$I' < I \text{ atau } \frac{I'}{I} < 1 \quad \text{dan}$$

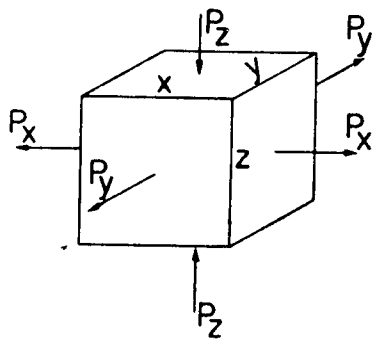
$$1 + \frac{\sigma}{E} - \frac{2}{m}\frac{\sigma}{E} < 1$$

$$\frac{\sigma}{E} - \frac{2}{m}\frac{\sigma}{E} < 0 \text{ di mana } \sigma \text{ bernilai } \textit{negatif}, \text{ jadi}$$

$$1 - \frac{2}{m} > 0 \text{ dan } m > 2$$

§ 4. Perluasan.

Benda berbangun prisma-lurus bersisi enam menahan kekuatan-kekuatan normal sentris pada bidang-bidang sisinya menurut gambar 3. Panjang rib-rib adalah x, y dan z. Kita menghitung dengan memberi nilai-aljabar negatif kepada kekuatan



Gambar 3

serta tegangan yang menekan jika kita bekerja dengan bilangan-bilangan (jadi tanda minus tak kelihatan jika kita masih memakai huruf-huruf).

$$\sigma_x = \frac{P_x}{yz} \text{ (positif)}$$

$$\sigma_y = \frac{P_y}{zx} \text{ (positif)}$$

$$\sigma_z = \frac{P_z}{xy} \text{ (negatif)}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E};\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E};\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$x' = x\left(1 + \varepsilon_x - \frac{1}{m}\varepsilon_y - \frac{1}{m}\varepsilon_z\right)$$

$$y' = y\left(1 - \frac{1}{m}\varepsilon_x + \varepsilon_y - \frac{1}{m}\varepsilon_z\right)$$

$$z' = z\left(1 - \frac{1}{m}\varepsilon_x - \frac{1}{m}\varepsilon_y + \varepsilon_z\right)$$

$$I' = x'y'z' = xyz\left(1 + \varepsilon_x - \frac{1}{m}\varepsilon_y - \frac{1}{m}\varepsilon_z\right)$$

$$\left(1 - \frac{1}{m}\varepsilon_x + \varepsilon_y - \frac{1}{m}\varepsilon_z\right)\left(1 - \frac{1}{m}\varepsilon_x - \frac{1}{m}\varepsilon_y + \varepsilon_z\right) =$$

$$= I\left\{1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - \frac{2}{m}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right\}$$

dengan mengabaikan suku-suku yang mengandung $\left(\frac{\sigma}{E}\right)^2$ dan $\left(\frac{\sigma}{E}\right)^3$

$$\Delta I = I' - I = I\left\{(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - \frac{2}{m}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right\}$$

$$\frac{\Delta I}{I} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + - \frac{2}{m}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\left(1 - \frac{2}{m}\right) =$$

$$= \frac{I}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\left(1 - \frac{2}{m}\right) = \frac{1}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right)\Sigma\sigma$$

$\frac{\Delta I}{I} = 0$ jika $\Sigma\sigma = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0$ yang mungkin terjadi oleh karena σ itu boleh + atau $\div$.

Menurut hukum alam, akan terdapat bahwa

$\frac{\Delta I}{I} \neq 0$ apabila $\Sigma\sigma \neq 0$. Jika $\Sigma\sigma$ positif, maka $\frac{\Delta I}{I}$ positif juga, jadi :

$1 - \frac{2}{m} > 0$ (positif) yang berarti lagi bahwa $m > 2$.

Sebagai contoh dengan bilangan :

$x = 6$ cm; $y = 10$ cm; $z = 12$ cm

$P_x = +\ 1800$ kg; $P_y = +\ 810$ kg dan $P_z = \div\ 1500$ kg

$$\sigma_x = + \frac{1800}{10 \times 12} \text{ kg/cm}^2 = +\ 15 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_y = + \frac{810}{6 \times 12} \text{ kg/cm}^2 = +\ 11{,}25 \text{ kg/cm}^2 \text{ dan}$$

$$\sigma_z = - \frac{1500}{6 \times 10} \text{ kg/cm}^2 = -\ 25 \text{ kg/cm}^2$$

$\Sigma\sigma = (+\ 15 + 11{,}25 - 25)$ kg/cm^2 $= +\ 1{,}25$ kg/cm^2

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{1}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right) 1{,}25 \text{ (tak berdimensi)}$$

Jika $P_y = 0$ berapakah perbandingan antara P_x dan P_z supaya $\Delta I = 0$?

Supaya $\Delta I = 0$ atau juga $\frac{\Delta I}{I} = 0$, maka $\Sigma\sigma = 0$, sedang $\sigma_y = 0$.

$$\sigma_x + \sigma_z = 0$$

$$\sigma_x = -\sigma_z$$

$$\sigma_x = \frac{1}{yz} P_x \text{ dan } \sigma_z = \frac{1}{xy} P_z$$

$$P_x : P_z = -(yz : xy) = -(z : x) \text{ atau } P_x.x = \div P_z.z$$

Jadi jika P_x menarik, P_z harus menekan atau sebaliknya dan perbandingan antara *nilai-nilai mutlaknya ada* $z : x$.

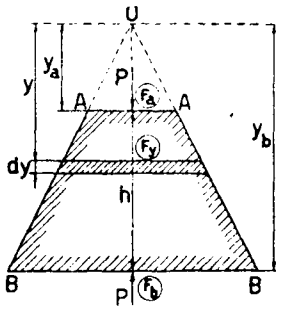
§ 5. Batang dengan luas-tampang tak tetap.

Batang kita bagi-bagikan di dalam lapisan-lapisan sepanjang Δx dengan luas-tampang F (variabel). Lapisan ini akan memanjang atau memandak sebanyak

$$\Delta(\Delta x) = \frac{P.\Delta x}{EF} \text{ dan jumlah robahan-panjang menjadi :}$$

$$\Delta l = \Sigma\Delta(\Delta x) = \frac{P}{E}\Sigma\frac{\Delta x}{F}$$

Sebagai contoh, kita ambil piramide-lurus terpotong $AABB$ dengan tinggi h (gambar 4) yang ditekan dengan P. Tinggi piramide-lengkap adalah y_b(puncak=O).



Gambar 4

Luas-bidang atas adalah F_a dan luas bidang-bawah F_b. Pada tampang setinggi y di bawah 0 luasnya ada :

$$F_y = \left(\frac{y}{y_b}\right)^2 F_b$$

Lapisan setebal dy akan memandak sebanyak

$$d(\Delta h) = \frac{P}{EF_y} dy = \frac{Py_b^2}{EF_b} \cdot \frac{1}{y^2} d_y$$

$$\Delta h = \int_{y_a}^{y_b} d(\Delta h) = \frac{Py_b^2}{EF_b} \int_{y_a}^{y_b} \frac{1}{y^2} dy =$$

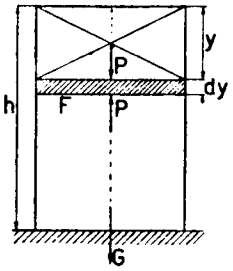
$$= \frac{Py_b^2}{EF_b}\left[-\frac{1}{y}\right]_{y_a}^{y_b} = \frac{Py_b^2}{EF_b}\left(\frac{1}{y_a}-\frac{1}{y_b}\right) =$$

$$= \frac{Py_b^2}{EF_b}\cdot\frac{(y_b-y_a)}{y_a y_b} = \frac{Ph}{EF_b}\cdot\frac{y_b}{y_a} = \frac{Ph}{EF_b}\sqrt{\frac{F_b}{F_a}} = \frac{Ph}{E\sqrt{F_a F_b}}$$

§ 6. Kekuatan normal tak tetap.

Benda berbangun prisma-lurus didirikan di atas lantai, dan sebagai akibat dari beratnya sendiri akan memandak sebanyak Δh.

Kita melihat lapisan setebal dy yang letaknya sedalam y di bawah bidang-atas.



Gambar 5

Kekuatan menekan yang bekerja di atasnya ialah berat sendiri bagian-prisma di atasnya, yaitu sebesar

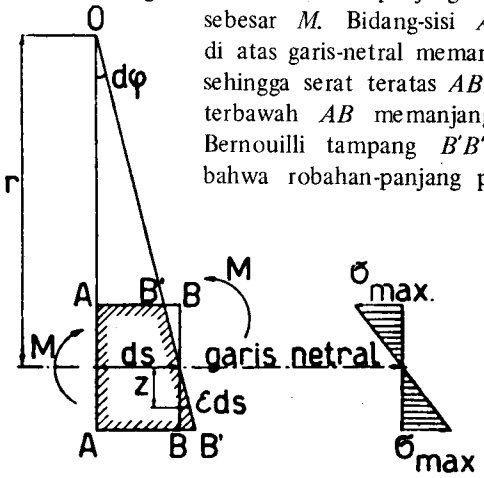
$$P = \frac{y}{h}G$$

$$d(\Delta h) = \frac{P}{EF}dy = \frac{G}{EF}\cdot\frac{y}{h}dy$$

$$\Delta h = \int_o^h d(\Delta h) = \frac{G}{EFh}\int_o^h y\,dy = \tfrac{1}{2}\frac{Gh}{EF}$$

§ 7. Putaran-sudut.

Kita ambil bagian balok $AABB$ sepanjang ds, yang menahan momen-lengkung sebesar M. Bidang-sisi AA kita pegang-teguh. Serat-serat di atas garis-netral memandak dan di bawahnya memanjang, sehingga serat teratas AB memandak menjadi AB' dan serat terbawah AB memanjang menjadi AB'. Menurut hukum Bernouilli tampang $B'B'$ tetap tinggal rata, yang berarti bahwa robahan-panjang pada serat-serat itu berjalan lurus, atau bahwa robahan-panjang itu bertanding lurus dengan jarak z antara serat dan garis-netral (di tempat dimana tak ada robahan-panjang). Oleh karena menurut Hooke, tegangan normal itu bertanding lurus dengan robahan-panjang,



Gambar 6

maka tegangan juga bertanding lurus dengan jarak z tersebut, dan kita boleh menulis: $\sigma = c.z$, di mana c adalah faktor pertandingan yang tetap (hukum Navier).

Menurut syarat seimbang harus terdapat :

$M = \int \sigma df.z = c\int z^2 df = c.I$ dimana I = momen-inersia tampang terhadap garis-netralnya.

Menurut pendapat di atas, maka $c = \frac{\sigma}{z}$, jadi

$$M = \frac{\sigma}{z}.I$$

$$\sigma = M\frac{z}{I}$$

Nilai mutlak σ menjadi maximum, jika z ada maximum, yaitu jika $z = \frac{1}{2}h$.

$$\sigma_{max} = M\frac{\frac{1}{2}h}{I} = \frac{M}{W},$$ di mana W = momen-perlawanan

$$\sigma = z.c = M\frac{z}{I}$$

$$c = \frac{M}{I}$$

Sumbu-balok letaknya tetap ⊥ tampang normalnya, jadi oleh karena $B'B'$ tak lagi vertikal letaknya, sumbu-balok juga tak lagi mendatar. Berhubung dengan itu, sumbu-balok yang tadinya dianggap lurus, menjadi garis-bengkok. Garis-garis AA dan $B'B'$ s.s.l. memotong di O sedang mereka itu sebetulnya garis-garis-normal terhadap sumbu-balok, dan dengan begitu jarak antara O dan sumbu-balok yaitu r adalah *radius-perbengkokan* sumbu-balok setempat.

Serat sejauh z dari sumbu menerima robahan-panjang sebesar εds dan menurut gambar 6 terdapat :

$$\varepsilon ds : z = ds : r \text{ atau } \varepsilon : z = 1 : r$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon}{z} = \frac{\sigma/E}{\sigma/c} = \frac{c}{E} = \frac{M}{EI}\left(\text{sebab } c = \frac{M}{I}\right)$$

$$d\varphi = \frac{ds}{r} = ds.\frac{1}{r} = \frac{M}{EI}\,ds,$$ dinamakan *putaran-sudut* setempat. Ma-

kin keras perbengkokannya, makin besar nilai $d\varphi$ sedang menurut rumus di atas ini, $d\varphi$ bertanding lawan dengan EI dan berhubung dengan itu maka besaran EI disebut *faktor kekakuan melawan perbengkokan.*

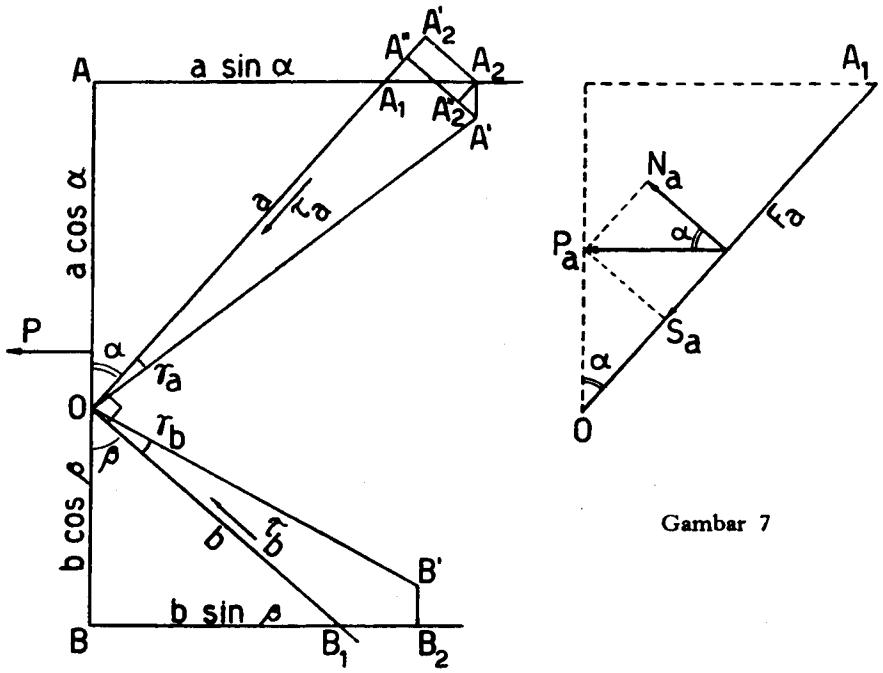
Apabila M serta EI itu tetap, maka $\frac{1}{r}$ atau r tetap juga nilainya dan sumbu-balok akan melengkung menurut busur-lingkaran.

Jika l = panjang (bentang) balok maka jumlah putaran sudut, yaitu putaran sudut kedua-dua bidang-ujung balok terhadap s.s.l. terdapat

$$\varphi = \int_o^l d\varphi = \int_o^l \frac{M}{EI}\, ds.$$

§ 8. **Geseran.**

Pada tampang normal AB bekerjalah kekuatan-normal menarik sentris



Gambar 7

sebesar P dan dengan begitu tampang tersebut menahan tegangan-normal menarik sebesar σ yang tetap nilainya (akibat dari P dianggap terbagi rata di seluruh tampang).

Kita mempelajari dua tampang OA_1 dan OB_1 yang $\perp$ terhadap s.s.l, $\angle AOA_1 = \alpha$ dan $\angle BOB_1 = \beta$ sedang $\alpha + \beta = 90°$ (letak O di atas AB sembarangan).

Tampang OA_1 mempunyai luas F_a jadi tampang OA luasnya ada $F_a \cos \alpha$.

Pada tampang OA_1 terdapat bekerja muatan sebesar $P_a = \sigma F_a \cos \alpha$ yang kita uraikan menjadi komponen $N_a \perp OA$ dan komponen $S_a \,//\, OA_1$ (gambar7). $S_a = P_a \sin \alpha = \sigma . F_a \cos \alpha . \sin \alpha = F_a . \sigma \sin \alpha \cos \alpha$, yang menimbulkan tegangan-geser τ_a di dalam bidang OA_1.

$$\tau_a = \frac{S_a}{F_a} = \sigma \sin \alpha \cos \alpha$$

Hitungan secara di atas ini dapat dijalankan pada tampang OB_1 dan kita akan mendapat: $\tau_b = \sigma \sin \beta \cos \beta$. Oleh karena $\alpha + \beta = 90°$ maka

$\sin \alpha \cos \alpha = \sin \beta \cos \beta. = \sin \alpha \sin \beta.$

Jadi $\tau_a = \tau_b = \tau = \sigma \sin \alpha \cos \alpha = \sigma \sin \alpha \sin \beta$

Ini membetulkan hukum yang berbunyi, bahwa pada dua bidang yang $\perp$ terhadap s.s.l, terdapat tegangan-tegangan-geser yang sama besarnya dan yang arahnya $\perp$ garis-potongan antara kedua-dua bidang tersebut. Jadi tegangan-geser itu selalu tertimbul *berpasangan,* yaitu di dua bidang yang $\perp$ terhadap s.s.l.

Kemudian kita mempelajari robahan-bangun sebagai akibat dari τ ini. Serat AA_1 memanjang sehingga titik A_1 jatuh di A_2 menurut perhitungan :

$$A_1A_2 = \Delta\, AA_1 = \Delta(a \sin \alpha) = \varepsilon . a \sin \alpha$$
$$AA_2 = AA_1 + A_1A_2 = (1 + \varepsilon)\, a \sin \alpha$$

Oleh karena adanya kontraksi, (bersusutnya tampang AB ke arah melintang) maka A_1 pada akhirnya jatuh di A' sedang $A_2A' \perp AA_2$.

$$A_2A' = \frac{1}{m}\, \varepsilon . OA = \frac{1}{m}\, \varepsilon . a \cos \alpha$$

Kita menarik garis $A'A''$ dan $A_2A_2' \perp OA_1$ serta $A_2A_2'' \perp A'A''$. Tampang OA_1 akan berdiri menurut garis OA' jadi berobah-sudut sebanyak :

$$\gamma_a = \frac{A'A''}{OA''} \sim \frac{A'A''}{OA_1} \quad \text{sedang } OA_1 = a$$

$$A'A'' = A_2A_2' + A'A_2'' = A_1A_2 \cos\alpha + A_2A' \sin\alpha =$$

$$= \varepsilon a \sin\alpha.\cos\alpha + \frac{1}{m} a \cos\alpha.\sin\alpha = \left(1 + \frac{1}{m}\right) \varepsilon a \sin\alpha \cos\alpha$$

$$\gamma_a = \left(1 + \frac{1}{m}\right) \varepsilon \sin\alpha \cos\alpha = \left(1 + \frac{1}{m}\right) \varepsilon \sin\alpha \sin\beta$$

Menurut cara di atas ini akan terdapat pula:

$$\gamma_b = \left(1 + \frac{1}{m}\right) \varepsilon \sin\beta \cos\beta = \left(1 + \frac{1}{m}\right) \varepsilon \sin\alpha \sin\beta$$

$\gamma = \gamma_a + \gamma_b = 2\left(1 + \frac{1}{m}\right) \varepsilon \sin\alpha \sin\beta$, dan disebut *sudut-geseran* yang ditimbulkan oleh tegangan-geser τ.

Secara analogos dengan rumus $\sigma = \varepsilon E$, maka hubungan antara τ dan γ boleh ditulis menurut rumus

$$\tau = \gamma.G \text{ atau } G = \frac{\tau}{\gamma}$$

$$G = \frac{\sigma \sin\alpha \sin\beta}{2\left(1 + \frac{1}{m}\right) \varepsilon \sin\alpha \sin\beta} = \frac{E}{2\left(1 + \frac{1}{m}\right)} = \frac{m}{2(m+1)} E$$

dan besaran ini dinamakan *modulus-geser*, yang berdimensi seperti E juga (kg/cm^2).

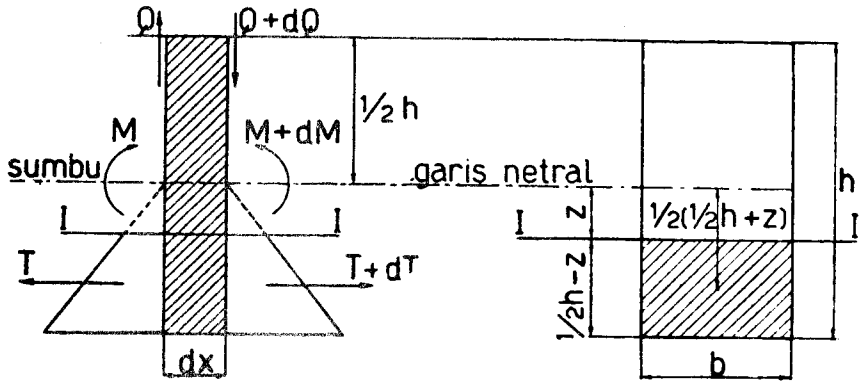
Oleh karena $2 < m < \sim$ maka nilai $2\left(1 + \frac{1}{m}\right)$ terletak di antara 2 dan 3 dan G terletak di antara $\frac{1}{3}E$ dan $\frac{1}{2}E$ atau tertulis $\frac{1}{3}E < G < \frac{1}{2}E$

§ 9. Kekuatan-melintang dan tegangan-geser.

Kita mempelajari bagian-balok bertampang persegi sepanjang dx pada bidang-bidang-batasnya mana bekerjalah momen-momen M dan $M + dM$ serta kekuatan-kekuatan melintang Q dan $Q + dQ$.

Menurut syarat seimbang harus :

$M + dM = (Q + dQ)\,dx = Qdx$ dengan mengabaikan besaran kecil tak terbatas bertingkat dua yaitu : $dQ.dx$.



Gambar 8

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

Kita mempelajari bagian di bawah potongan $I - I$ sejauh z dari bidang-netral.

$$T = \int_z^{\frac{1}{2}h} \sigma.df = \frac{M}{I} \int_z^{\frac{1}{2}h} z df = \frac{M}{I} S \quad \text{jika } S = \text{statis-momen bagian}$$

tampang bawah potongan $I - I$ terhadap garis-netral.

$$T + dT = \frac{(M + dM)}{I} S$$

$$dT = \frac{dMS}{I}$$

$$\tau = \frac{dT}{bdx} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{S}{bl} = \frac{QS}{bl}$$

Pada tampang persegi seperti di dalam contoh ini, dengan mudah terdapat:

$$I = \tfrac{1}{12} bh^3$$

$$S = \tfrac{1}{2}b\left(\tfrac{1}{2}h - z\right)\left(\tfrac{1}{2}h + z\right) = \tfrac{1}{2}bh^2\left(\tfrac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}\right)$$

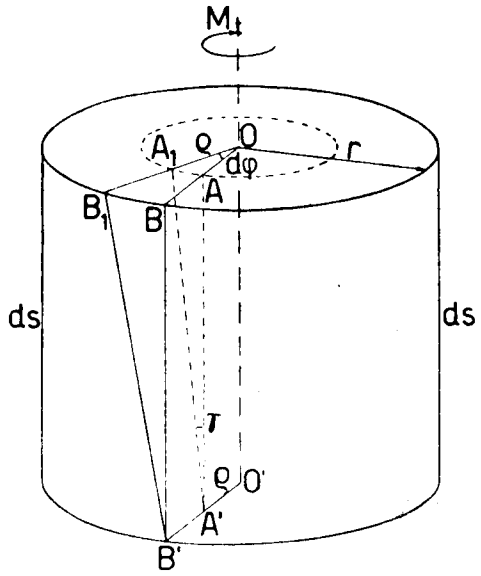
$$\tau = \frac{Q\frac{1}{2}bh^2(\frac{1}{4} - z^2/h^2)}{\frac{1}{12}b.bh^3} = \frac{Q}{bh}\cdot(\tfrac{1}{4} - z^2/h^2) = \frac{Q}{F}\cdot\left(\tfrac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}\right) = \frac{Q}{F'}$$

Di sini $F' = \dfrac{F}{(\frac{1}{4} - z^2/h^2)}$ tak tetap nilainya, sebab tergantung kepada z.

$\gamma = \dfrac{\tau}{G} = \dfrac{Q}{GF'}$, di mana besaran GF' dinamakan faktor keteguhan melawan geseran *di sesuatu tempat pada sesuatu tampang* (jadi tak berlaku untuk seluruh tampang).

§ 10. Torsi atau pilin.

Kita ambil batang berbangun silinder dengan radius-tampang = r.



Gambar 8a

Pada sesuatu tampang (yang berbangun lingkaran) bekerjalah momen-torsi sebesar M_t.

Bidang $OO'B'B$ yang semula berdiri vertikal (|| sumbu-batang) menjadi kibing dan membentuk bidang $OO'B'B_1$ yang bukan bidang rata. Begitu juga adanya tentang bidang $OO'A'A$ yang menjadi $OO'A'A_1$. Robahan sudut pada titik A' terdapat :

$$\gamma = \frac{AA_1}{ds} = P\frac{d\psi}{ds} = \frac{\tau}{G}$$

$$\tau = G.p.\frac{d\psi}{ds}$$

Syarat-seimbang $M_t = \int \tau \,.\, df \,.\, \rho = G\dfrac{d\psi}{dz}\int \rho^2 df = G\dfrac{d\psi}{dz}\cdot I_p$, di mana

I_p berarti momen-inersia polar tampang (terhadap sumbu batang).

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{\tau}{\rho}\cdot\frac{ds}{d\psi} \text{ atau } G\frac{d\psi}{ds} = \frac{\tau}{\rho}$$

$$M_t = \frac{\tau}{\rho}\cdot I_p$$

$$\tau = M_t\frac{\rho}{I_p} \text{ dan } d\psi = \frac{\tau}{G}\,ds = M_t\frac{ds}{GI_p}$$

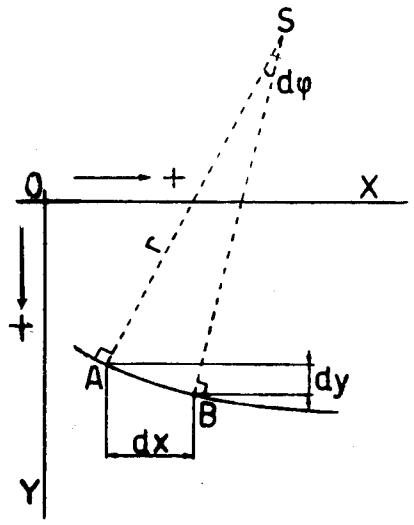
GI_p berarti *faktor keteguhan melawan torsi* untuk tampang-lingkaran. Selanjutnya, seperti telah diketahui, I_p lingkaran = $\frac{1}{2}\pi r^4$.

B. GARIS LENTUR

§ 1. Radius-perbengkokan.

Sumbu-balok yang semula lurus, menjadi garis-bengkok (melengkung) setelah balok menahan momen-lengkung. Garis-bengkok yang diwujudkan oleh sumbu-balok itu dinamakan *garis-elastis* atau garis-lentur.

Di sini kita akan mempelajari bagaimana kita dapat memperoleh persamaan garis-elastis atau bagaimana kita dapat menghitung ordinatnya terhadap sumbu-balok yang semula. Di sini dianggap, bahwa titik-titik pada sumbu-balok hanya akan beralih tempat (turun atau naik) menurut garis vertikal.



Gambar 9

Gambar 9 memperlihatkan sebagian dari sesuatu garis-elastis. Kita menyelidiki dua titik A dan B di atasnya sehingga $y_B - y_A = dy$; $x_B - x_A = dx$ dan $AB = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

Garis-garis normal yang ditarik dari titik-titik A dan B memotong s.s.l. di titik S dan dengan begitu $SA = r$ adalah *radius bengkokan* di A atau $\frac{1}{r}$ = derajat-bengkokan atau perbengkokan di A.

$AB = ds = r\,d\varphi$

$$r = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{d\,\mathrm{tg}\,\varphi} \cdot \frac{d\,\mathrm{tg}\,\varphi}{d\varphi}$$

$$\frac{d\,\mathrm{tg}\,\varphi}{d\varphi} = \frac{d\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{d\varphi} = \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi} =$$

$$= \sec^2\varphi = 1 + \mathrm{tg}^2\varphi = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$r = \frac{dx\,\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{d\,\mathrm{tg}\,\varphi}\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{d\,\mathrm{tg}\,\varphi/dx}{\{1 + (dy/dx)^2\}^{3/2}} = \frac{d^2y/dx^2}{\{1 + (dy/dx)^2\}^{3/2}}$$

Oleh karena ordinat-ordinat garis-elastis itu kecil sekali, maka $\frac{dy}{dx}$ juga amat kecil nilainya terhadap satuan sehingga $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ boleh diabaikan terhadap 1. Jadi boleh ditulis :

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} \text{ atau } r = \frac{1}{d^2y/dx^2}$$

Menurut gambar mudah dilihat bahwa $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{dy}{dx}$ berkurang jika x bertambah,

yang berarti bahwa $\frac{d\,\mathrm{tg}\,\varphi}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ itu *negatif.*

Balok yang dilengkung menurut gambar 9, yaitu melengkung konvex ke bawah dianggap melengkung secara positif, dan momen yang menyebabkannya dianggap bernilai positif, sedang $\frac{d^2y}{dx^2}$ bernilai negatif.

Oleh karena $\frac{1}{r} = M/EI$ bernilai positif, yaitu sesuai dengan persetujuan kita,

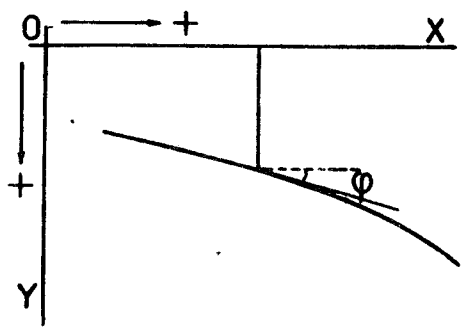
maka di muka $\frac{d^2y}{dx^2}$ harus dibubuhi tanda minus, jadi :

$$\frac{1}{r} = -\frac{d^2y}{dx^2}$$

Apabila balok melengkung konvex ke atas (gambar 10), momen yang menimbulkannya kita sebut negatif, jadi besaran $\frac{1}{r} = M/EI$ kita beri nilai negatif juga. Kita melihat, bahwa tg φ bertambah, jika x bertambah, yang berarti bahwa

$\frac{d\,\mathrm{tg}\,\varphi}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} > o$ (positif)

Supaya $\frac{1}{r}$ negatif, sesuai dengan



Gambar 10

anggapan kita, maka di muka $\frac{d^2y}{dx^2}$ harus lagi dibubuhi tanda minus.

§ 2. **Hubungan dengan momen.**

Di dalam bagian *A*, § 7 kita telah memperoleh rumus :

$$\frac{1}{r} = \frac{M_x}{EI}$$

$-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{EI}$ adalah persamaan-defferensi garis-elastis.

Di sini kita membubuhi petunjuk (index) x pada huruf M oleh karena momen pada balok itu tak tetap nilainya dan biasanya adalah $f(x)$.

Untuk sementara faktor EI dianggap tetap pada seluruh balok (balok prismatis).

Di bawah ini kita akan mengambil beberapa contoh.

§ 3. **Balok terjepit sebelah.**

a. Muatan terpusat P (vertikal) di ujungnya.

Garis-momen berjalan lurus dan membentuk bidang serupa segitiga.

$M_x = -P(l - x)$ **(momen bernilai negatif).**

PERPUSTAKAAN DAERAH JAWA TIMUR
JL. MENUR PUMPUNGAN No. 32
SURABAYA
TAHUN ANGGARAN 19[illegible]/19[illegible]

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P(l-x)}{EI} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P(l-x)}{EI}$$

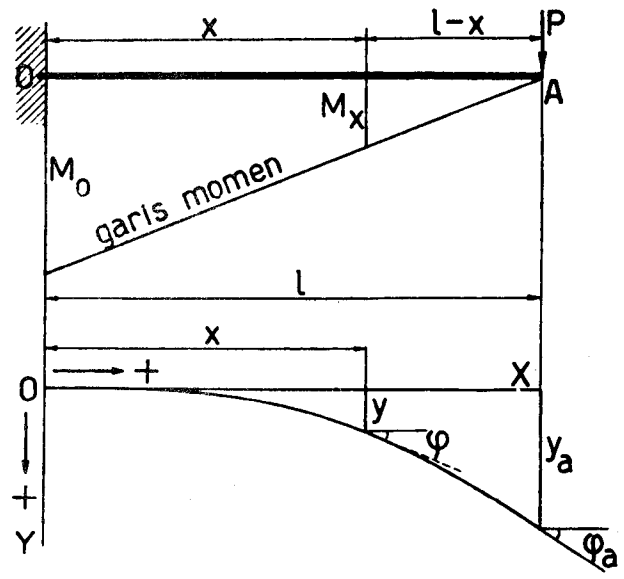
$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI}\int (l-x)\,dx = \frac{P}{EI}\,(lx - \tfrac{1}{2}x^2 + C_1)$$

Untuk $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ (garis-elastis mempunyai garis-singgung mendatar di O),

jadi $$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=o} = \frac{P}{EI}\,(0 - 0 + C_1) = o;\; C_1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI}\,(lx - \tfrac{1}{2}x^2)$$

$$y = \frac{P}{EI}\int (lx - \tfrac{1}{2}x^2)dx = \frac{P}{EI}\,(\tfrac{1}{2}lx^2 - \tfrac{1}{6}x^3 + C_2)$$



Gambar 11*a*

Untuk $x = 0, y = 0$ (titik O tak turun) jadi $C_2 = 0$.

$$y = \frac{P}{EI}\,(\tfrac{1}{2}lx^2 - \tfrac{1}{6}x^3)$$

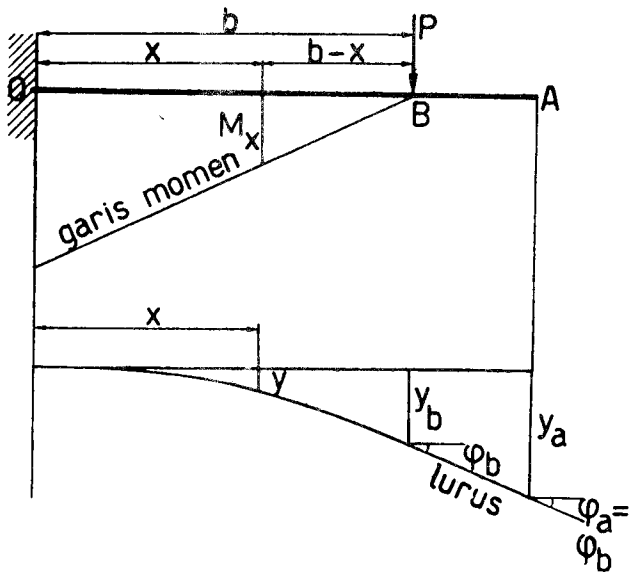
$$y_{max} = y_a = y_{x=l} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_{max} = \operatorname{tg}\varphi_a = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = \frac{Pl^2}{2EI}$$

b. Seperti di atas, tetapi P sesukanya berdirinya.

Jarak antara P dan O adalah b.

$M_x = -P\,(b - x)$, berlaku selama $x \leq b$.



Gambar 11*b*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{EI}(b - x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI}\int (b - x)\,dx = \frac{P}{EI}(bx - \tfrac{1}{2}x^2 + C_1)$$

Seperti di atas akan terdapat pula $C_1 = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI}(bx - \tfrac{1}{2}x^2), \text{ berlaku selama } x \leq b$$

$$y = \frac{P}{EI}(\tfrac{1}{2}bx^2 - \tfrac{1}{6}x^3), \text{ berlaku selama } x \leq b$$

$y_b = (y)_{x=b} = \dfrac{Pb^3}{3EI}$, $\operatorname{tg}\varphi_b = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=b} = \dfrac{Pb^2}{2EI}$ (analog dengan y_a kejadian *a).*

Di bagian BA tak ada momen, jadi $\dfrac{1}{r} = 0$ yang berarti bahwa bagian garis-elastis di kanan B itu garis lurus yang menyinggung padanya.

$$\operatorname{tg}\varphi_a = \operatorname{tg}\varphi_b = \frac{Pb^2}{2EI}$$

$$y_a = y_b + (l - b)\operatorname{tg}\varphi_b = \frac{Pb^3}{3EI} + \frac{Pb^2(l - b)}{2EI}$$

c. Muatan penuh terbagi rata q t/m′

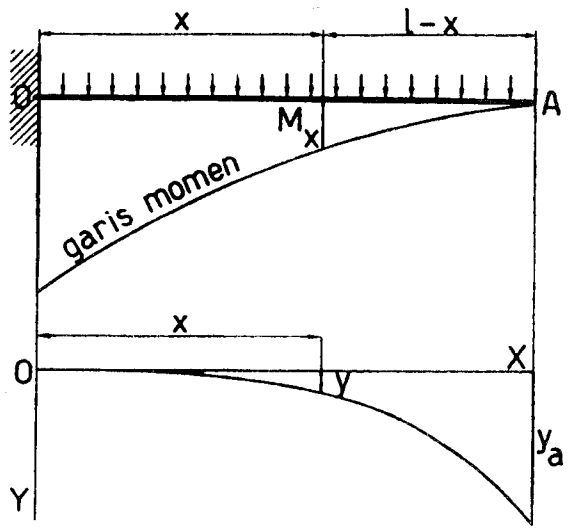
$$M_x = -\tfrac{1}{2}q(l - x)^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{2EI}(l - x)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{2EI}\int (l - x)^2 dx = \frac{q}{2EI}(l^2x - lx^2 + \tfrac{1}{3}x^3)$$

$$y = \frac{q}{2EI}(\tfrac{1}{2}l^2x^2 - \tfrac{1}{3}lx^3 + \tfrac{1}{12}x^4)$$

$$y_a = (y)_{x=l} = \frac{ql^4}{2EI}(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{12}) = \frac{ql^4}{8EI};\ \operatorname{tg}\varphi_a = \frac{ql^3}{6EI}$$



Gambar 11*c*

§ 4. Tafsiran secara geometri.

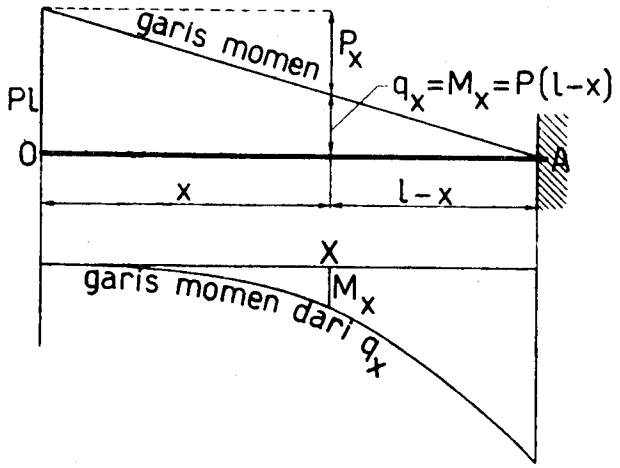
Bidang-momen akan kita anggap sebagai bidang-muatan dan balok OA dianggap terjepit di A dan dimuati dengan bidang-momen tersebut.
Kejadian a. (lihat atas § 3). Ordinat muatan q'_x = ordinat $M_x = P(l - x)$ (nilai mutlak).

Kekuatan-melintang di tampang X (yaitu tampang sejauh x dari O) yang ditimbulkan oleh q_x ini sama dengan luas bidang-momen di sebelah kirinya, jadi $Q'_x = \tfrac{1}{2}\{Pl + P(l - x)\}x = P(lx - \tfrac{1}{2}x^2)$ sedang di atas terdapat :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{P}{EI}(lx - \tfrac{1}{2}x^2) = \frac{1}{EI}\cdot Q'_x$$

Ordinat momen sebagai akibat dari q'_x=statis-momen bidang M_x di sebelah kirinya terhadap X sendiri :

$M'_x = Plx.\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}Px^2.\tfrac{1}{3}x = P(\tfrac{1}{2}lx^2 - \tfrac{1}{6}x^3)$, sedang ordinat garis-elastis



Gambar 12

terdapat : $y = \frac{P}{EI}(\frac{1}{2}lx^2 - \frac{1}{6}x^3) = \frac{1}{EI} M'_x$. Untuk titik A terdapat:

Kekuatan melintang sebagai akibat dari q'_x, Q'_a = luas-bidang M_x di kiri A.

$$Q'_a = \tfrac{1}{2}Pl^2 = \frac{Pl^2}{2} \text{ sedang } \operatorname{tg}\varphi_a = \frac{Pl^2}{2EI} = \frac{1}{EI}\cdot Q'_a$$

Ordinat-momen sebagai akibat dari q'_x = statis-momen bidang M_x di sebelah kiri A terhadap A sendiri :

$M'_a = \tfrac{1}{2}Pl^2 . \tfrac{2}{3}l = \frac{Pl^3}{3}$ sedang ordinat garis-elastisnya terdapat :

$$y_a = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{1}{EI} M'_a$$

Berhubung dengan hasil-hasil ini, kita dapat menarik kesimpulan demikian: Jika pada balok terjepit sebelah, bidang-momen dianggap sebagai muatan dan balok dianggap terjepit sebelah di ujung lainnya, maka ordinat kekuatan-melintang yang disebabkannya di sesuatu titik terdapat EI kali tangen pada garis-elastis di situ dan ordinat momennya ada EI kali ordinat garis-elastis di situ. Jadi

garis-momen yang diperoleh jika bidang-momen diambil sebagai muatan, adalah serupa dengan garis-elastis dan hanya berbeda faktor EI saja.

Kejadian b. Ordinat muatan q'_x = ordinat $M'_x = P(b - x)$ dan hanya berada di sebelah kiri titik B. Kekuatan melintang di titik A disebabkan oleh q'_x ada Q'_a = luas bidang M_x di kirinya = $\frac{1}{2}Pb^2$ sedang $\operatorname{tg}\varphi_a = \frac{Pb^2}{2EI}$ jadi $\operatorname{tg}\varphi_a = \frac{1}{EI} Q'_a$.

Begitu pula, statis-momen bidang M_x terhadap A yaitu $M'_a = \frac{1}{2}Pb^2(l - \frac{1}{3}b)$;

sedang

$$y_a = \frac{P}{EI}\{\tfrac{1}{3}b^3 + \tfrac{1}{2}b^2(l - b)\}$$

$$= \frac{Pb^2}{EI}(\tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{3}b) = \frac{1}{EI}\cdot\tfrac{1}{2}Pb^2(l - \tfrac{1}{3}b) = \frac{1}{EI}M'_a$$

Jadi cocok juga dengan kesimpulan-kesimpulan di atas.

Kejadian umum. Kita menggunakan dalil, bahwa kekuatan-melintang adalah hasil integrasi dari ordinat-muatan dan momen adalah hasil integrasi dari kekuatan-melintang. Bidang-momen dianggap sebagai muatan :

Ordinat-muatan : $q'_x = M_x$

Kekuatan-melintang : $Q'_x = -\int q'_x dx = -\int M_x dx$

Ordinat-momen : $M'_x = \int Q'_x dx = -\iint M_x dx$

Garis-elastis :

Persamaan : $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EI} M_x$ (kita memakai nilai mutlak)

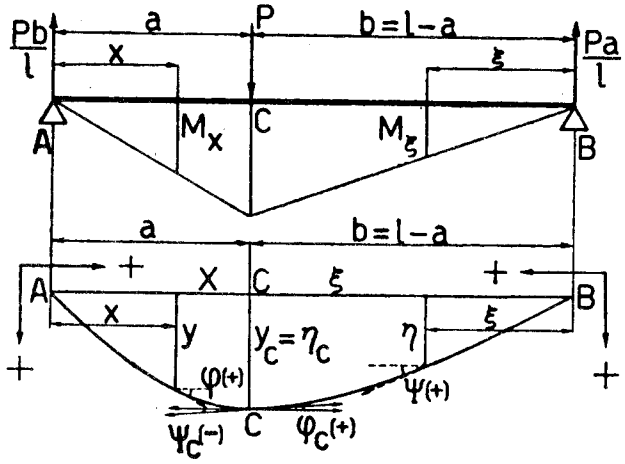
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \int \frac{d^2y}{dx^2} dx = -\frac{1}{EI}\int M_x dx$$

$$y = \int \frac{dy}{dx} dx = \int\int \frac{d^2y}{dx^2} dx = -\frac{1}{EI}\int\int M_x dx$$

Jika kita membandingkan pendapat-pendapat di sebelah atas dengan di sebelah bawah, kita melihat bahwa bedanya ialah faktor EI saja.

§ 5. Balok di atas dua perletakan.

Kita ambil satu muatan terpusat P di titik C sejauh a dari perletakan A; sedang EI = tetap. Garis-elastis terdiri dari dua cabang : cabang AC' dan cabang BC',



Gambar 13

dengan titik-asal masing-masing A dan B. Koordinat-koordinat cabang kiri (AC') kita namakan x serta y dan pada cabang kanan (BC') kita sebut ξ dan η.

Arah positif untuk absis-absis adalah ke dalam dan untuk ordinat-ordinat ke bawah. Di dalam contoh dipilih bahwa $a < b$ dan berhubung dengan itu ordinat garis-elastis maximum terdapat di sebelah kanan C (cabang BC''), dan di titik C' akan terdapat $\frac{d\eta}{d\xi} < o$ (sebab sudah melalui puncak) sedang $\frac{dy}{dx}$ masih $> o$ (puncak belum tercapai di cabang AC'), sedang di titik C' di situ kedua-dua cabang garis-elastis bertunggalan garis-singgung yang berarti bahwa :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{d\eta}{d\xi} \quad \text{atau} \quad \operatorname{tg}\varphi_c = -\operatorname{tg}\Psi_c.$$

CABANG AC'	CABANG BC'
$M_x = P\frac{b}{l}x$	$M_\xi = P\frac{a}{l}\xi$
$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EI}M_x = -\frac{Pb}{EIl}x$	$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -\frac{1}{EI}M_\xi = -\frac{Pa}{EIl}\xi$
$\frac{dy}{dx} = -\frac{Pb}{EIl}\int x\,dx = -\frac{Pb}{EIl}(\frac{1}{2}x^2 + C)$	$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{Pa}{EIl}\int \xi\,d\xi = -\frac{Pa}{EIl}(\frac{1}{2}\xi^2 + K)$
$y = -\frac{Pb}{EIl}(\frac{1}{6}x^3 + Cx + C')$	$\eta = -\frac{Pa}{EIl}(\frac{1}{6}\xi^3 + K\xi + K')$
$y_a = (y)_{x=o} = 0;\ C' = 0$	$\eta_b = (\eta)_{\xi=o} = 0;\ K' = 0$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = -\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\xi=b}$$

$$-\frac{Pb}{EIl}(\tfrac{1}{2}a^2 + C) = +\frac{Pa}{EIl}(\tfrac{1}{2}b^2 + K) \quad (1)$$

$$bC + aK = -\tfrac{1}{2}a^2b - \tfrac{1}{2}ab^2 \quad (1)$$

$y_c = \eta_c$
$(y)_{x=a} = (\eta)_{\xi=b}$

$$\frac{Pb}{EIl}(\tfrac{1}{6}a^3 + Ca) = \frac{Pa}{EIl}(\tfrac{1}{6}b^3 + Kb) \quad (2)$$

$$abC - abK = \tfrac{1}{6}ab^3 - \tfrac{1}{6}a^3b \quad (2)$$
$$b^2C + abK = -\tfrac{1}{2}a^2b^2 - \tfrac{1}{2}ab^3 \quad (1)$$
$$(a+b)\,bC = -\tfrac{1}{3}ab^3 - \tfrac{1}{2}a^2b^2 - \tfrac{1}{6}a^3b$$

$$(a+b)bC = -ab(\tfrac{1}{3}b^2 + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{6}a^2) = -\tfrac{1}{6}ab(a+b)(a+2b) = -\tfrac{1}{6}ab(a+b)(l+b)$$

$$C = -\tfrac{1}{6}a(l+b)$$
$$K = -\tfrac{1}{6}b(l+a)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Pb}{EIl}\{\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{6}a(l+b)\} = \frac{Pb}{6EIl}\{a(l+b) - 3x^2\}$$

$$y = -\frac{Pb}{EIl}\{\tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{6}a(l+b)x\} = \frac{Pb}{6EIl}\{a(l+b)x - x^3\}$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{Pa}{EIl}\{\tfrac{1}{2}\xi^2 - \tfrac{1}{6}b(l+a)\} = \frac{Pa}{6EIl}\{b(l+a) - 3\xi^2\}$$

$$\eta = -\frac{Pa}{EIl}\{\tfrac{1}{6}\xi^3 - \tfrac{1}{6}b(l+a)\xi\} = \frac{Pa}{6EIl}\{b(l+a)\xi - \xi^3\}$$

Tempat-tempat yang penting:

$$\operatorname{tg}\varphi_a = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=o} = \frac{Pab(l+b)}{6EIl};\ \operatorname{tg}\ \psi_b = \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\xi=o} = \frac{Pab(l+a)}{6EIl}$$

$$y_c = (y)_{x=a} = \frac{Pb}{6EIl}\{a^2(l+b) - a^3\} = \frac{Pb}{6EIl}\{a^2(a+2b) - a^3\} = \frac{Pa^2b^2}{3EIl}$$

$$\eta_c = (\eta)_{\xi=b} = \frac{Pa}{6EIl}\{b^2(l+a) - b^3\} = \frac{Pa}{6EIl}\{b^2(2a+b) - b^3\} = \frac{Pa^2b^2}{3EIl}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_c = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = \frac{Pb}{6EIl}\{a(a+2b) - 3a^2\} = \frac{Pab(b+a)}{3EIl}$$

$$\operatorname{tg}\psi_c = \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\xi=b} = \frac{Pa}{6EIl}\{b(2a+b) - 3b^2\} = \frac{Pab(a-b)}{3EIl}$$

Mencari di mana ordinat menjadi extrem (maximum): Ini terdapat di cabang BC' jika $b > a$ dan pada $\xi = \xi_m$; $\frac{d\eta}{d\xi} = o$; $b(l+a) - 3\xi_m^2 = o$;

$$\xi_m^2 = \tfrac{1}{3}b(l+a);\ \xi_m = \sqrt{\tfrac{1}{3}b(l+a)} = \sqrt{\tfrac{1}{3}b(2a+b)}$$

$$\xi_m = l\sqrt{\tfrac{1}{3}\frac{b}{l}\left(1+\frac{a}{l}\right)} = \alpha\, l$$

Untuk $a = b = \frac{1}{2}l$ terdapat $\alpha = \frac{1}{2}$ atau $\xi_m = \frac{1}{2}l$.

Untuk $a = 0{,}1\,l$ serta $b = 0{,}91\,l$, terdapat $\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}.0{,}9.\,1{,}1} = 0{,}575$ atau $\xi_m = 0{,}575\,l$.

Untuk $a = 0$, serta $b = 1$, $x = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}577$ (kejadian *limit*). Jadi tempat ordinat-maximum pada garis-elastis tak begitu jauh dari tengah-tengah balok.

Ordinat di titik tengah balok akan kita namakan f. Jika $a > b$, titik tengah ini terletak di cabang AC' jadi rumus y yang berlaku serta dengan mengisi $x = \frac{1}{2}l$ dan $a = l - b$, kita mendapat:

$$f_{a>b} = \frac{Pb}{6EI}\{\tfrac{1}{2}(l-b)(l+b) - \tfrac{1}{6}l^2\}$$

Jika $a < b$, yang berlaku rumus η :

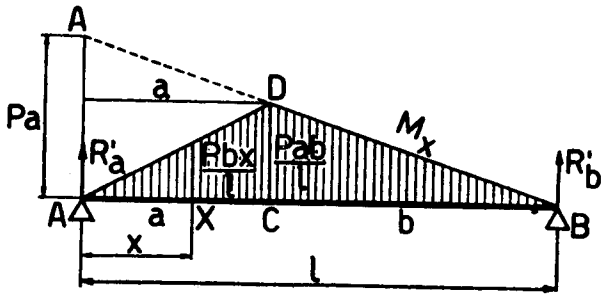
$$f_{a<b} = \frac{Pa}{6EI}\{\tfrac{1}{2}(l-a)(l+a) - \tfrac{1}{6}l^2\}$$

Kejadian khusus: $a = b = \frac{1}{2}l$

$$f = \frac{Pl^3}{48EI}$$

§ **5a. Bidang-momen (bidang M_x) sebagai muatan** (gambar 13a).

ABD adalah bidang-momen pada muatan P yang berdiri di C. Tinggi $\Delta\ ABD$ yaitu $CD = P\frac{ab}{l}$.



Gambar 13a

Perpanjangan garis BD memotong garis-vertikal yang melalui A di titik A dan kita mendapat $AA = Pa$. Statis-momen bidang $\Delta\ ABD$ terhadap A, yaitu S_a = statis-momen bidang $\Delta\ AAB$ terhadap A minus statis-momen bidang AAD terhadap A.

$$S_a = \tfrac{1}{2}l.Pa.\tfrac{1}{3}l - \tfrac{1}{2}a.Pa.\tfrac{1}{3}a = \tfrac{1}{6}Pa(l^2 - a^2) = \tfrac{1}{6}Pab\,(l+a)$$

Jika bidang ABD dianggap sebagai muatan, maka reaksi perletakan di B ada:

$$R'_b = \frac{1}{l} \cdot S_a = \frac{Pab}{6l}(l+a),$$ dan dengan cara serupa reaksi-perletakan di A ada: $$R'_a = \frac{1}{l} \cdot S_b = \frac{Pab}{6l}(l+b)$$

Untuk titik X sejauh $x < a$ dari A terdapat $M_x = P\frac{b}{l}x$ dan kemudian:
Kekuatan-atau gaya-melintang :

$$Q'_x = R'_a - \tfrac{1}{2}x.P\frac{b}{l}x = \frac{Pab}{6l}(l+b) - \frac{P}{2l}bx^2 =$$

$$= \frac{Pb}{6l}\{a(l+b) - 3x^2\} = EI.\frac{dy}{dx} \text{ (lih. § 5)}$$

Momen :

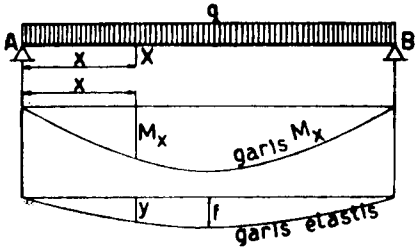
$$M'_x = R'_a.x - \tfrac{1}{2}x\,P\frac{b}{l}\,x.\tfrac{1}{3}x = \frac{Pab}{6l}(l+b)x - \tfrac{1}{6}P\frac{b}{l}\,x^3 =$$

$$= \frac{Pb}{6l}\{a(l+b)x - x^3\} = EI.y$$

Jadi kesimpulan di dalam § 4 juga berlaku di sini : Garis-elastis dapat dilukiskan oleh garis-momen, jika bidang-momen dianggap sebagai muatan dan faktor-pengli-pat ialah $\frac{1}{EI}$.

§ 6. Balok dimuati penuh terbagi rata.

Oleh karena keadaan symmetris, garis elastis terdiri dari dua cabang yang sym-metris dan kita cukup dengan mempelajari cabang kiri :



Gambar 14

$$M_x = \tfrac{1}{2}qlx - \tfrac{1}{2}qx^2 = \tfrac{1}{2}q(lx - x^2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EI}M_x =$$

$$= -\frac{q}{2EI}(lx - x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{q}{2EI}\int(lx - x^2)dx =$$

$$= -\frac{q}{2EI}(\tfrac{1}{2}lx^2 - \tfrac{1}{3}x^3 + C)$$

Untuk $x = \frac{1}{2}l$, $\frac{dy}{dx} = 0$.

$$\tfrac{1}{2}l(\tfrac{1}{2}l)^2 - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}l)^3 + C = 0$$

$$\tfrac{1}{8}l^3 - \tfrac{1}{24}l^3 + C = 0;\ C = -\tfrac{1}{12}l^3$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{q}{2EI}(\tfrac{1}{2}lx^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{12}l^3) = +\frac{q}{2EI}(\tfrac{1}{12}l^3 - \tfrac{1}{2}lx^2 + \tfrac{1}{3}x^3)$$

$$y = \frac{q}{2EI}(\tfrac{1}{12}l^3x - \tfrac{1}{6}lx^3 + \tfrac{1}{12}x^4 + C')$$

Untuk $x = 0, y = 0$, jadi $C' = 0$.

$$y = \frac{q}{2EI}(\tfrac{1}{12}l^3x - \tfrac{1}{6}lx^3 + \tfrac{1}{12}x^4) = \frac{q}{24EI}(l^3x - 2lx^3 + x^4)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=o} = \frac{ql^3}{24EI}$$

$$f = (y)_{x=\frac{1}{2}l} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}$$

§ 7. Beberapa muatan terpusat.

Di dalam praksis yang sering diperlukan ialah turunnya titik-tengah balok, oleh karena ordinat-maximum garis elastis terdapat tak begitu jauh dari tengah-tengah balok (§ 5). Jadi di sini kita akan mempelajari ordinat di tengah-tengah balok, yaitu : f.

Untuk muatan-muatan di kiri tengah balok berlaku rumus $f_{a<b}$ dan di sebelah kanannya rumus $f_{a>b}$. Kemudian kita menjumlah hasil-hasil dari $f_{a<b}$ dan da-ri $f_{a>b}$. Muatan-muatan di sebelah kiri adalah P_1 sejauh a_1 dari A, P_2 sejauh a_2 dari A, ...P_n **sejauh** a_n dari $A(a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ harus $< \frac{1}{2}l)$ dan muatan-muatan di sebelah kanan adalah K_1 sejauh b_1, K_2 sejauh b_2 .... K_n sejauh b_n dari perle-takan B :

$$f = \Sigma\frac{Pa}{6EI}\{\tfrac{1}{2}(l-a)(l+a) - \tfrac{1}{8}l^2\} + \Sigma\frac{Kb}{6EI}\{(\tfrac{1}{2}l - b)(l+b) - \tfrac{1}{8}l^2\} =$$

$$= \frac{1}{6EI}[P_1a_1\{\tfrac{1}{2}(l-a_1)(l+a_1) - \tfrac{1}{8}l^2\} + \ldots.$$

$$P_na_n\{\tfrac{1}{2}(l-a_n)(l+a_n) - \tfrac{1}{8}l^2\} + K_1b_1\{\tfrac{1}{2}(l-b_1)(l+b_1) - \tfrac{1}{8}l^2\} + \ldots\ldots$$

$$K_nb_n\{\tfrac{1}{2}(l-b_n)(l+b_n) - \tfrac{1}{8}l^2\}]$$

Jadi yang kita perlukan hanya *jarak* dari muatan *sampai titik-perletakan yang terdekat.*

Secara grafis kita menggambar garis-momen pada muatan-muatan, misalnya dengan perantaraan gambar kutub dan polygon-batang. Kemudian menganggap bidang-momen ini sebagai muatan, yang kita bagi-bagi di dalam beberapa lajuran. Luas-luas lajuran ini digambar sebagai muatan pada gambar-kutub dan kemudian kita menggambar polygon-batangnya dan yang diperoleh belakangan ini adalah garis yang melukiskan garis-elastis (setelah dilipatkan dengan $\frac{1}{EI}$ dan memperhitung-skala tangan-kutub serta skala gambar).

§ 8. Muatan terbagi.

Ordinat muatan adalah q_x yang mungkin variabel. Untuk muatan di sebelah kiri dari tengah-tengah balok kita mempergunakan rumus $f_{a<b}$ serta mengganti P dengan $dP = q_x da$ sedang a dijadikan variabel.

$$f_{a<b} = \frac{1}{6EI}\int_{a_1}^{a_2} q_x a \{\tfrac{1}{2}(l-a)(l+a) - \tfrac{1}{8}l^2\}\, da$$

sedang a_1 dan a_2 yang kedua-duanya $\leq \frac{1}{2}l$ berarti absis-permulaan dan absis-penghabisan bidang-muatan di bagian kiri balok (absis-absis ini diukur dari perletakan A.).

Untuk bidang-muatan di sebelah kanan kita akan mendapat:

$$f_{a>b} = \frac{1}{6EI}\int_{b_1}^{b_2} q_x b \{\tfrac{1}{2}(l-b)(l+b) - \tfrac{1}{8}l^2\}\, db \text{ dan } b_1 \text{ serta } b_2$$

diukur dari perletakan B.

$$f = f_{a<b} + f_{a>b}$$

Sebagai contoh, balok dimuati penuh terbagi rata: q.

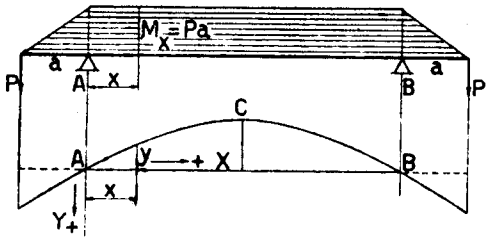
$$f_{a<b} = f_{a>b};\ f = 2f_{a<b} = \frac{q}{6EI}.2\int_o^{1/2l} a\{\tfrac{1}{2}(l-a)(l+a) - \tfrac{1}{8}l^2\}\, da =$$

$$= \frac{q}{3EI}\int_o^{1/2l} (\tfrac{3}{8}l^2a - \tfrac{1}{2}a^3)\, da = \frac{q}{3EI}\left[(\tfrac{3}{16}l^2a^2 - \tfrac{1}{8}a^4\right]_o^{1/2l} = \tfrac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}$$

(bandingkan dengan pendapat di dalam § 6).

§ 9. Momen tetap.

Ini tercapai pada bagian balok di antara kedua-dua titik perletakannya, yang dimuati seperti gambar 15.



Gambar 15

$$M_x = -Pa \text{ (tetap)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EI}M_x = +\frac{Pa}{EI}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Pa}{EI}(x + C)$$

$$x = \tfrac{1}{2}l,\ \frac{dy}{dx} = 0;\ C = -\tfrac{1}{2}l$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Pa}{EI}(x - \tfrac{1}{2}l)$$

$$y = \frac{Pa}{EI}(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}lx + C');\ x = 0;\ y = 0;\ C' = 0$$

$$y = \frac{Pa}{2EI}(x^2 - lx);\ x = \tfrac{1}{2}l,\ y = -\frac{Pal^2}{8EI} \text{ (berarti ke atas)}$$

Menurut A, § 7 terdapat: $\frac{1}{r} = \frac{M}{EI}$ sedang di sini $M = M_X = -Pa$ tetap, jadi $\frac{1}{r}$ bernilai tetap pula, yang berarti bahwa sumbu-balok membentuk *busur-lingkaran* dengan radius r. Menurut pendapat di atas, maka kita mencapai persamaan untuk *parabol:* $y = \frac{Pa}{2EI}(x^2 - lx)$.

Perbedaan ini disebabkan oleh karena kita mengabaikan suku $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

Bidang-momen di antara A dan B berbangun segi-panjang dengan ordinat $-Pa$ yang tetap. Jika ini dianggap sebagai muatan maka persamaan garis-momen nya terdapat :

$$M_x' = \div\left(\tfrac{1}{2}Palx - \tfrac{1}{2}Pax^2\right) = \frac{Pa}{2}(x^2 - 1x) = EIy,$$

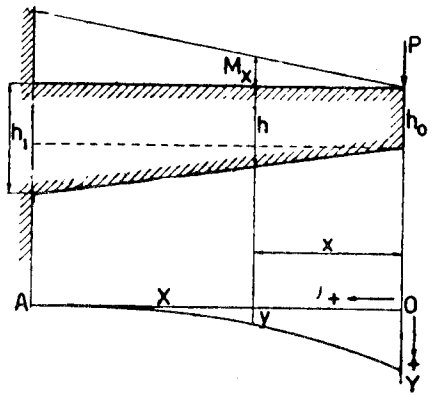
yang berbangun parabola pula.

Mengabaikan suku $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ berarti pula menyamakan ds dengan dx,

jadi menganggap bahwa panjang sumbu-balok setelah dibengkok tak berobah, jadi perletakan rol akan bergeser sehingga mendekati perletakan lainnya yang berbentuk sendi. Akan tetapi soal ini boleh diabaikan di dalam praksis.

§ 10. Balok dengan I tak tetap.

Jika besaran $I = Ix$ tak tetap, ini tak boleh ditempatkan di luar tanda integrasi, dan jika $Ix = f(x)$ terketanui, kita dapat menjalankan integrasi



Gambar 16

$$\iint \frac{M_x}{EI_x}\,dx,$$

di mana M_x dan I_x masing-masing fungsi (x). Sebagai contoh kita ambil balok-konsol terjepit sebelah dengan lebar yang tetap serta tinggi yang bertambah secara lurus Titik-asal susunan koordinat O diambil di ujung konsol, di mana kita mengerjakan muatan terpusat P.

$$M_x = -P_x$$

Pada garis-elastis kita mendapat bahwa $\frac{dy}{dx}$ bernilai negatif (sebab jika x bertambah, y berkurang) dan mencapai nilai nol di titik A. Jadi nilai $\frac{dy}{dx}$ berobah dari < 0 di O hingga $= 0$ di

A yang berarti bahwa nilainya bertambah sepanjang perjalanan OA sedang x juga bertambah. Dengan begitu $\frac{d^2y}{dx^2}$ bernilai *positif* sedang M_x *negatif*, jadi berlawanan juga tandanya dengan M_x.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EI_x}M_x = \frac{P}{EI_x}x$$

Kedua-dua anggauta kita lipatkan dengan EI_o di mana I_o = inertimomen tampang di ujung, dan kemudian menentukan $y' = EI_o y$.

$$EI_o\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx^2} = P\frac{I_o}{I_x}x$$

$$\frac{I_o}{I_x} = \frac{h_o^3}{h^3} = \frac{h_o^3}{\{h_o + (x/l)(h_1 - h_o)\}^3} = l^3\left(\frac{h_o}{h_1 - h_o}\right)^3\frac{1}{\{h_o l/(h_1 - h_o) + x\}^3} =$$

$$= \alpha^3 l^3\frac{1}{(a+x)^3} \text{ dengan: } \alpha^3 = \left(\frac{h_o}{h_1 - h_o}\right)^3 \text{ dan } \frac{h_o}{h_1 - h_o}l = a = \alpha l$$

$$\frac{d^2y'}{dx^2} = P\alpha^3 l^3\frac{x}{(a+x)^3} = P(\alpha l)^3\frac{(z-a)}{z^3}, \text{ jika } z = a + x \text{ atau } x =$$

$$= z - a, \text{ sedang } dx = dz$$

$$\frac{dy'}{dx} = P(\alpha l)^3\int\frac{(z-a)}{z^3}\,dz = P(\alpha l)^3\int\left(\frac{1}{z^2} - \frac{a}{z^3}\right)dz =$$

$$= P(\alpha l)^3\left(-\frac{1}{z} + \frac{a}{2z^2} + C_1\right)$$

Untuk $x = l$ atau $z = l + a$ maka $\frac{dy}{dx} = 0$.

$$-\frac{1}{l+a} + \frac{a}{2(l+a)^2} + C_1 = 0;\ C_1 = \frac{1}{l+a} - \frac{a}{2(l+a)^2} = \frac{2l+a}{2(l+a)^2}$$

$$\frac{dy'}{dx} = P(\alpha l)^3\left(-\frac{1}{z} + \frac{a}{2z^2} + \frac{2l+a}{2(l+a)^2}\right) =$$

$$= P(\alpha l)^3\left(-\frac{1}{x+a} + \frac{a}{2(x+a)^2} + \frac{2l+a}{2(l+a)^2}\right)$$

$$y' = P(\alpha l)^3 \left(-\lg z - \frac{a}{2z} + \frac{(2l+a)z}{2(l+a)^2} + C_2 \right)$$

$$x = l \text{ atau } z = l + a; y' = 0; -\lg(l+a) - \frac{a}{2(l+a)} + \frac{(2l+a)}{2(l+a)} + C_2 = 0;$$

$$C_2 = \lg(l+a) + \frac{a}{2(l+a)} - \frac{2l+a}{2(l+a)} = \lg(l+a) - \frac{l}{(l+a)}$$

$$y' = EI_o y = P(\alpha l)^3 \left\{ \lg \frac{l+a}{z} - \frac{a}{2z} + \frac{(2l+a)z}{2(l+a)^2} - \frac{l}{l+a} \right\} =$$

$$= P(\alpha l)^3 \left\{ \lg \frac{l+a}{x+a} - \frac{a}{2(x+a)} + \frac{(2l+a)(x+a)}{2(l+a)^2} - \frac{l}{l+a} \right\}$$

Untuk $x = 0$ terdapat:

$$y' = P(\alpha l)^3 \left\{ \lg \frac{l+a}{a} - \tfrac{1}{2} + \frac{(2l+a)a}{2(l+a)^2} - \frac{l}{l+a} \right\} =$$

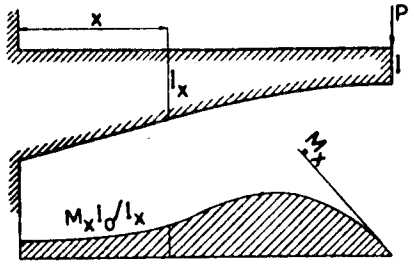
$$= P(\alpha l)^3 \left\{ \lg \left(1 + \frac{l}{a}\right) - \tfrac{1}{2} + \frac{a^2 - 2l^2}{2(l+a)^2} \right\}$$

$$\frac{dy'}{dx} = -P(\alpha l)^3 \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \frac{2l+a}{2(l+a)^2} \right) = P(\alpha l)^3 . \frac{-l^2}{2a(l+a)^2}$$

§ 11. **Secara grafis.**

Seringkali integrasi sukar dikerjakan, sebab $\frac{I_o}{I_x} = f(x)$ tak begitu sederhana bentuknya, misalnya jika tepi balok tak lurus.

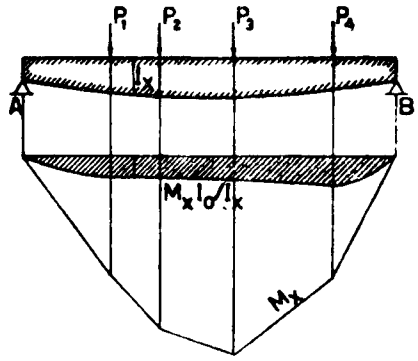
Gambar 17*a* memperlihatkan balok-konsol dengan tepi-bawah bengkok yang dimuati sebesar P di ujungnya. Garis-momen (garis M_x) berupa garis lurus, dan bidang M_x berupa segi-tiga. Ordinat-ordinat M_x ini dilipatkan dengan $\frac{I_o}{I_x}$ dan dengan begitu kita memperoleh bidang yang diharsir, yang kemudian dipakai sebagai bidang-muatan. Garis-momen yang nanti diperoleh sebagai akibat dari muatan ini, akan melukiskan garis-elastis dengan skala EI_o.



Gambar 17*a*

Garis-momen termaksud ini dapat digambar dengan perantaraan gambar-kutub.

Gambar 17*b* menunjukkan balok di atas dua titik-perletakan A dan B dengan l tak tetap serta dimuati oleh beberapa muatan-muatan terpusat. Juga di sini ordinat-ordinat bidang M_x dilipatkan dengan $\frac{I_o}{I_x}$ sehingga kita mencapai bidang yang diharsir, yang nanti dipakai sebagai bidang-muatan, dst.



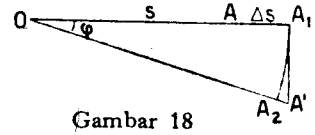
Gambar 17*b*

Apabila ordinat-ordinat $M_x \frac{I_o}{I_x}$ terdapat terlalu kecil, boleh kita lipatkan dengan sesuatu faktor-tetap c untuk mencapai kesaksamaan yang memuaskan.

C. PERALIHAN TITIK-HUBUNGAN PADA VAKWERK CARA WILLIOT

§ 1. **Uraian.**

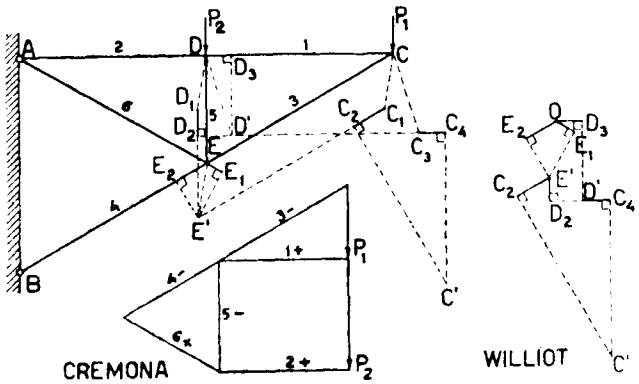
Batang OA digambar 18 memanjang sebanyak $\Delta s = \frac{Ps}{EF}$, dan jika O itu titik yang tetap, titik A akan jatuh di A_1 menurut ketentuan bahwa $AA_1 = \Delta s$. Biasanya barang-batang itu juga berputar sudut, ambillah φ sehingga A_1 menjalani busur-lingkaran dan jatuh di titik A_2. Di dalam praksis, Δs dan φ itu amat kecil dan berhubung dengan itu busur A_1A_2 boleh diganti dengan garis $A_1A' \perp OA$ dan boleh dianggap bahwa titik A pada akhirnya jatuh di A' (melalui titik A_1). Jika OA memandak, titik A_1 jatuh di kiri A, dst.



Gambar 18

§ 2. **Diagram Williot.**

Cara pendekatan di atas ini akan kita pergunakan pada konsolvakwerk menurut gambar 19. Setelah menggambar Cremona pada muatan, kita mengetahui gaya-gaya batang: N_1, N_2 d.s.t. Jika F itu luas-tampang batang dan s itu panjangnya, kita



Gambar 19

menghitung $\Delta s = \frac{N}{EF} s = \frac{\sigma}{E} s$, positif atau negatif menurut sifat N (menarik atau menekan). Oleh karena Δs itu biasanya besaran yang amat kecil, lebih baik kita menggambarnya menurut skala yang cukup besar. Untuk itu kita melipatkannya dengan E/s_o di mana s_o berarti sesuatu ukuran panjang sesuka kita (misalnya panjang batang yang sering terjumpa) dan dengan begitu kita memakai besaran

$\Delta s' = \Delta s.\ E/s_o = \sigma \frac{s}{s_o}$ yang berdimensi kg/cm^2.

Kemudian besaran-besaran $\Delta s'$ ini kita lukiskan pada batang-batang yang bersangkutan, dengan mengingat apakah ini perpanjangan ataukah perpandakan. Pada gambar 19 tersebut kita melihat :

$$EE_1 = \Delta s'_6 = \sigma_6 \frac{s_6}{s_o} (+); EE_2 = \Delta s'_4 = \sigma_4 \frac{s_4}{s_o} (-)$$

Kita mulai dengan batang-batang 6 dan 4 oleh karena ujungnya A dan B tak beralih. Jika hubungan E dilepas, maka titik E sebagai ujung batang AE (atau 6) akan jatuh di E_1; dan sebagai ujung batang BE di titik E_2. Menurut uraian di §1 maka titik E jatuh di E' dengan $E_2E' \perp BE$ dan $E_1E' \perp AE$. Jika hubungan D dibuka, batang DE (5) akan beralih // sendirinya, yaitu di $E'D_1$ sehingga $E'D_1$ = // ED. Batang 5 memandak dengan $\Delta s_5 = \frac{\sigma_5}{E} s_5$ yang dilukiskan dengan D_1D_2 = $\Delta s'_5 = \sigma_5 \frac{s_5}{s_o}$. Titik D juga ujung pada batang AD (2) sedang AD memanjang

sebanyak $\Delta s_2 = \frac{\sigma_2}{E} s_2$ yang dilukiskan oleh $DD_3 = \Delta s'_2 = \sigma_2 \frac{s_2}{s_o}$.

Pada akhirnya titik D terdapat di D' yang diperoleh dengan perantaraan garis $D_1D' \perp D'E'$ dan $D_3D' \perp AD$. Batang DC akan beralih // sendirinya sehingga $D'C_3$ = // DC apabila hubungan C dibebaskan; dan batang EC beralih menjadi $E'C_1$ = // EC. Perpanjangan batang DC (1), $\Delta s_1 = \frac{\sigma_1}{E} s_1$ dilukiskan oleh $C_1C_4 = \Delta s'_1 = \sigma_1 \frac{s_1}{s_o}$ dan perpandakan batang EC(3), $\Delta s_3 = \frac{\sigma_3}{E} s_3$ oleh $C_1C_2 = \Delta s'_3 = \sigma_3 \frac{s_3}{s_o}$.

Garis-garis yang ditarik siku-siku terhadap batang-batang 1 dan 3 melalui C_4 dan C_2 berpotongan s.s.l. di C' di mana titik C akan jatuh pada akhirnya.

Oleh karena di dalam lukisan seperti diterangkan di atas ini, panjang batang asli tak lagi dipergunakan dan kita hanya menggunakan garis-garis sepanjang $\Delta s'$ dan garis-garis-normalnya, maka lebih mudah jika kita menggambar lukisan itu di luar gambar konstruksi sebagai berikut :

Dari sesuatu titik O kita melukiskan $\Delta s'_4 = OE_2$ (// EB), $\Delta s'_6 = OE_1$ (// AE) dan $\Delta s'_2 = OD_3$ (// AD). Ketiga-tiga batang 4, 6 dan 2 itu mempunyai ujung tak beralih, yaitu B dan A, oleh karena itu besaran-besaran $\Delta s'$ yang bersangkutan dapat dilukiskan sekaligus dari titik O. Sesudah itu menarik dari E_1, garis $\perp AE$ dan dari E_2 garis $\perp BE$, kedua-dua garis normal mana berpotongan di E'. Kemudian menarik garis $E'D_2 = \Delta s'_5$ (// DE), garis $\perp DE$ melalui D_1 dan garis $\perp AD$ dari D_3; kedua-dua garis-normal ini memotong s.s.l. di D'. Selanjutnya menarik $E'C_2 = C_1C_2 = \Delta s'_3$ // CE dan $D'C_4 = \Delta s'_1$ // DC ; pada akhirnya garis $\perp CE$ dari titik C_2 dan garis $\perp DC$ dari C_4 yang saling berpotongan di titik C'.

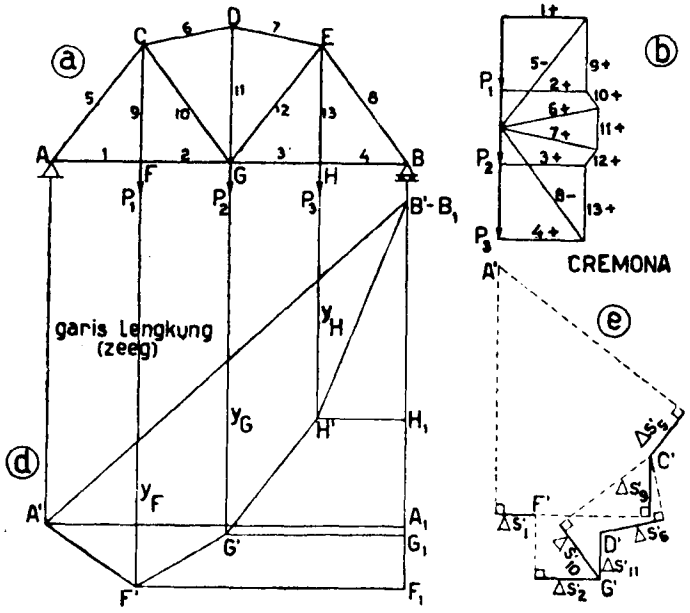
Oleh karena batang DC membentuk satu garis dengan AD pada mana A itu tetap, maka $\Delta s'_1$ boleh digambar dari titik D_3, dan dari ujungnya kita menarik garis $\perp AC$.

Lukisan yang tergambar belakangan ini dinamakan diagram/*Williot*.

Setelah mempelajari gambar-gambar dengan saksama kita mendapat, bahwa: $OE' = EE'$; $OD' = DD'$ dan $OC' = CC'$.

§ 3. Vakwerk di atas dua perletakan.

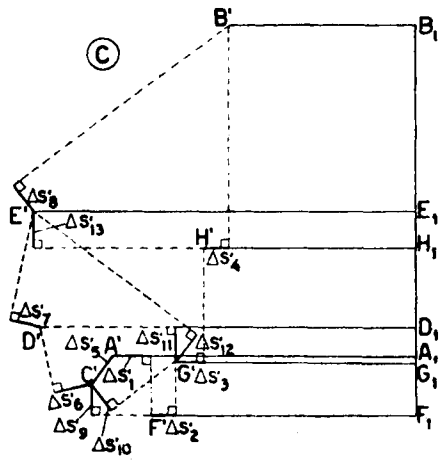
Perletakan A adalah sendi dan B rol. Cremona kita gambar untuk menentukan gaya-gaya batang dan kemudian besaran-besaran $\Delta s' = \sigma \frac{s}{s_o}$.



Gambar 20*abde*

Untuk sementara dianggap bahwa batang AC (no. 5) tak berputar.

Untuk menggambar Williot kita menarik garis $A'C' = \Delta\, s'_5$ // CA, kemudian dari A' menarik $\Delta\, s'_1$ ($///AF$) dan dari C' garis-garis $\Delta\, s'_9$ $\Delta\, s'_{10}$ dan $\Delta\, s'_6$ (masing-masing senantiasa // batang yang bersangkutan, dan arahnya ditentukan oleh pendapat perpanjangan ataukah perpandakan). Dari ujung-ujung $\Delta\, s'_1$ dan $\Delta\, s'_9$ ditarik garis-garis yang $\perp$ padanya dan yang saling berpotongan di titik F'. Menarik dari F' sebatang garis sepanjang $\Delta\, s'_2$ dan dari ujung ini serta ujung garis $\Delta\, s'_{10}$ ditarik garis-garis normalnya yang menghasilkan titik G', dari mana ditarik sepotong garis dengan panjang $\Delta\, s'_{11}$. Garis-garis normal terhadap $\Delta\, s'_{11}$ dan $\Delta\, s'_6$ memotong s.s.l. di titik D'. Kemudian tariklah garis-garis sepanjang $\Delta\, s'_7$ dari D' dan $\Delta\, s'_{12}$ dari G' serta garis-garis normalnya untuk memperoleh titik



Gambar 20*c*

E'. Dari E' ditarik garis sepanjang $\Delta\, s'_{13}$ dan dari G' garis $\Delta\, s'_3$ untuk mendapatkan titik H' dengan perantaraan garis-garis yang $\perp$ padanya. Pada akhirnya digambar garis $\Delta\, s'_8$ dan E' serta garis $\Delta\, s'_4$ dari H' dan pula garis-garis yang $\perp$ padanya untuk mendapatkan titik B'.

Menurut uraian di atas tadi, titik B akan naik sejauh jarak-vertikal antara A' dan B' yang bertentangan dengan kenyataan, sebab titik B itu dipegang oleh perletakan B dan tak akan dapat beralih secara vertikal. Jarak-mendatar antara A' dan B' melukiskan geseran perletakan rol B sepanjang garis AB.

Pertentangan tersebut di atas disebabkan oleh anggapan bahwa batang AC tak akan berputar. Untuk mencapai hasil dari pekerjaan di atas ini, kita hanya akan mengambil *peralihan-vertikal* pada titik-titik hubungan. Untuk ini kita memproyeksikan titik-titik $A'B' \ldots . H'$ di atas garis vertikal, proyeksi-proyeksi mana kita namakan $A_1, B_1, C_1 \ldots . H_1$. Garis vertikal yang mengandung titik A_1 $B_1, \ldots . H_1$ ini kita pindah di bawah titik-perletakan B (gambar 20*d*). Di sini kita hanya akan mempelajari turunnya *titik-titik hubungan bawah,* yaitu A F G H dan B. Titik-titik A_1, F_1, G_1, H_1 dan B_1 kita proyeksikan di atas garis-garis vertikal yang melalui titik-hubungan yang bersangkutan dan dengan begitu kita mendapat titik-titik A' di bawah A, F' di bawah F, G' di bawah G, H' di bawah H dan $B' = B_1$ di bawah B. Kemudian kita menarik garis-penghubung $A'B'$ dan ordinat-ordinat titik-titik A', F', G', H' dan B' terhadap garis $A'B'$ melukiskan turunnya titik-titik hubungan bawah $A \ldots . B$. Kita menarik garis $A'B'$ tadi oleh karena pada hakekatnya A dan B tidak turun.

Garis $A'F'G'H'B'$ dengan garis penutup $A'B'$ mempertunjukkan garis lentur (zeeg) pada tepi bawah bangunan yang seringkali diperlukan di dalam praksis. Sesudah itu, kita juga dapat memutar garis $A'B'$ sehingga letaknya menjadi mendatar.

Bilamana *keadaan symmetris,* kita cukup dengan menggambar Williot untuk separo-bangunan. Batang-tiang GD tak akan berputar; titik G kita ambil sebagai titik-tetap dan kita bekerja menurut gambar 20*e*, sebagai berikut :

$$G'D' = \Delta\, s'_{11}$$

Dari G' menarik garis-garis yang melukiskan $\Delta\, s'_2$ dan $\Delta\, s'_{10}$ dan dari D' garis $\Delta\, s'_6$ Dengan perantaraan garis-garis $\perp \Delta\, s'_{10}$ dan $\perp \Delta\, s'_6$ kita mendapat C' d.s.t.

Pada akhirnya kita mendapat letaknya A'. Jarak vertikal antara A' dan F' serta G' melukiskan turunnya titik-titik hubungan terhadap garis AB, dan oleh karena keadaan symmetris, turunnya titik H sama dengan turunnya titik F.

D. PEKERJAAN DEFORMASI

§ 1. Robahan-panjang.

Kita kembali lagi pada batang sepanjang s dengan luas-tampang F yang menahan kekuatan-normal sentris sebesar N. Sebagai akibat dari kekuatan ini, panjang batang berobah sebanyak $\Delta s = \frac{Ns}{EF}$ jadi titik-pegangan N beralih sejauh Δs ke arah bekerjanya. Maka jika titik pegangan sesuatu kekuatan itu beralih, kekuatan menjalankan *pekerjaan.*

Pada bangunan-civil, kekuatan-kekuatan atau muatan-muatan yang bekerja itu *tidak sekonyong-konyong* caranya, yaitu akibatnya mulai dengan bernilai nol dan mencapai maksimum di dalam sesuatu waktu Δt.

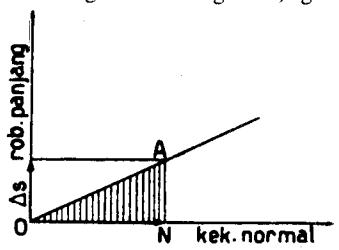
Kekuatan N tersebut di atas itu juga kita anggap bekerja pelahan-lahan atau tidak sekonyong-konyong. Pada permulaan nilainya ada nol dan pada akhirnya mencapai N.

Pada suatu ketika kekuatan-normal ini mempunyailah nilai $N' < N$. Setelah nilai N' ini bertambah dengan dN', panjang-batang berobah dengan $d(\Delta s) = \frac{dN'}{EF} s$ dan kekuatan N' menjalankan pekerjaan sebanyak $dU = N'd(\Delta s) = N' \frac{s}{EF} dN'$

Jadi jumlah pekerjaan yang dijalankan sedari $N' = 0$ hingga $N' = N$ ada:

$$U = \int dU = \int_0^N N' \frac{s}{EF} dN' = \tfrac{1}{2} N^2 \frac{s}{EF} = \tfrac{1}{2} N . \frac{Ns}{EF} = \tfrac{1}{2} N . \Delta s$$

Gambar 21 melukiskan hubungan antara Δs dan N, untuk sesuatu batang. Oleh karena Δs itu untuk sesuatu batang di mana s dan EF besaran yang tetap, bertanding lurus dengan N, garis yang melukiskan tadi berupa garis lurus yang melalui titik-asal O. Pada sesuatu titik A, absis adalah N dan ordinat adalah Δs dan $\frac{1}{2}N \Delta s$ berarti luas ΔOAN jadi pekerjaan yang dijalankan oleh N boleh dilukiskan oleh luas ΔOAN itu.



Gambar 21

Pekerjaan seperti tersebut di atas tadi tertimbul oleh robahan-panjang, jadi oleh deformasi dan berhubung dengan itu disebut

pekerjaan deformasi oleh robahan-panjang atau *pekerjaan robahan panjang.*

Di atas tadi dianggap bahwa *luas* tampang-batang, F seluruh panjang batang itu *tetap* (batang prismatis) dan begitu juga besarnya kekuatan-normal N.

Jika F dan atau N tidak tetap, kita mendapat :

$dU = \frac{1}{2} N^2 \frac{ds}{EF}$ di mana ds itu panjangnya bagian-elemen pada bangunan.

$U = \int dU = \int N^2 . \frac{ds}{2EF}$ sedang N dan F itu mungkin variabel.

§ 2. Putaran-sudut.

Momen berhasrat memutar sesuatu tampang pada mana momen bekerja, dan apabila ini terlaksana maka bidang-pegangannya ikut berputar. Berhubung dengan ini, momen menjalankan pekerjaan pula.

Menurut *A* § 7, putaran sudut yang disebabkan oleh momen M pada sesuatu bagian-elemen sepanjang ds terdapat : $d\varphi = M \frac{ds}{EI}$. Di sini juga boleh dianggap bahwa momen itu tidak bekerja sekonyong-konyong, pada permulaan bernilai nol dan pada akhirnya mencapai nilai M.

Pada sesuatu ketika besarnya momen adalah M', yang kemudian bertambah dengan dM'. Tambahan sebesar dM' menyebabkan putaran pada bidang-pegangan M' sebanyak $d(d\varphi) = dM' \frac{ds}{EI}$, dan dengan begitu M' bekerja sebanyak $M'd(d\varphi)$

$= M'.dM' \frac{ds}{EI}$.

Sejak $M' = 0$ hingga $M' = M$ pekerjaan yang dijalankannya menjadi :

$$dU = \int_0^M M'.dM' \frac{ds}{EI} = \tfrac{1}{2} M^2 \frac{ds}{EI}.$$

Untuk seluruh bangunan, *pekerjaan deformasi disebabkan oleh momen* atau *pekerjaan-lengkung* terdapat :

$U = \int M^2 . \frac{ds}{2EI}$, di mana M dan EI (mungkin) variabel.

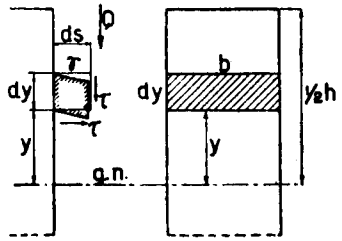
§ 3. Geseran.

Kita mengambil tampang balok yang berbangun *persegi* dan berukuran: *b.h.* Kita mengambil bagian-elemen dari balok sepanjang *ds* dan setinggi *dy* yang letaknya sejauh *y* dari garis-netral (gambar 22). Kekuatan melintang yang bekerja pada seluruh tampang adalah Q dan menurut
A § 9 terdapat

$$\tau = \frac{QS}{bI}$$

$$dQ = \tau.b.dy = \frac{QS}{I}\,dy$$

$\gamma = \frac{\tau}{G}$; titik pegangan dQ beralih sejauh



Gambar 22

$dg = \gamma.ds$ dan menjalankan pekerjaan sebanyak $d(dU) = \frac{1}{2}dQ.\,dg$ oleh karena caranya bekerja dianggap juga pelahan-lahan. *Pekerjaan deformasi yang diakibatkan oleh geseran* di dalam bagian-elemen tersebut menjadi :

$$dU = \int_{-1/2h}^{1/2h} d(dU) = \tfrac{1}{2}\int_{-1/2h}^{1/2h} dQ.\,dg = \tfrac{1}{2}\int_{-1/2h}^{1/2h} \tau.bdy.\frac{\tau}{G}\,ds =$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{bds}{G}\int_{-1/2h}^{1/2h}\tau^2 dy = \tfrac{1}{2}\frac{bds}{G}\int_{-1/2h}^{1/2h}\left(\frac{QS}{bI}\right)^2 dy = \tfrac{1}{2}\frac{Q^2 ds}{GbI^2}\int_{-1/2h}^{1/2h} S^2 dy$$

$$S = \int_y^{1/2h} bdy.y = \tfrac{1}{2}b\left[y^2\right]_y^{1/2h} = \tfrac{1}{2}b(\tfrac{1}{4}h^2 - y^2)$$

$$S^2 = \tfrac{1}{4}b^2(\tfrac{1}{16}h^4 - \tfrac{1}{2}h^2y^2 + y^4)$$

$$\int_{-1/2h}^{1/2h} S^2 dy = \tfrac{1}{4}b^2\int_{-1/2h}^{1/2h}(\tfrac{1}{16}h^4 - \tfrac{1}{2}h^2y^2 + y^4)dy = \tfrac{1}{120}b^2h^5$$

$$I^2 = (\tfrac{1}{12}bh^3)^2 = \tfrac{1}{144}b^2h^6$$

$$dU = \tfrac{1}{2}\frac{Q^2 ds.\frac{1}{120}.b^2h^5}{G\frac{1}{144}b^3h^6} = \tfrac{1}{2}Q^2\,\frac{ds}{\frac{5}{6}bhG} = \tfrac{1}{2}Q^2\,\frac{ds}{\frac{5}{6}FG} = \tfrac{1}{2}Q^2\,\frac{ds}{F'G}$$

jika F = luas-tampang.

Pada seluruh bangunan menjadi : $U = \int dU = \int Q^2.\,\frac{ds}{2GF'}$ *(pekerjaan geser).*

Untuk tampang persegi terdapat $F' = \frac{5}{6}F$ dan pada umumnya, jika tampang berbangun sesuka kita, $F' = \nu F$ di mana ν itu besaran yang tergantung kepada bangun tersebut.

Berhubung dengan itu, besaran GF' kita sebut *faktor keteguhan melawan geseran* pada sesuatu tampang. Ini berlainan dengan arti GF' di dalam *A* § 9, di mana besaran ini hanya berlaku pada sesuatu tempat di tampang.

§ 4. Torsi.

Di dalam *A* § 10 terdapat bahwa torsi pada batang bulat yang disebabkan oleh momen-torsi M_t ada $d\Psi = M_t\,\frac{ds}{GI_p}$ dengan $I_p = \frac{1}{2}\pi r^4$. Pada tampang yang tidak berbangun lingkaran, faktor I_p harus diganti dengan I_p' yang nilainya tergantung kepada bangun tampang.

Jadi pada umumnya terdapat : $d\psi = M_t\,\frac{ds}{GI_p'}$ dan *pekerjaan-torsi* menjadi

$$U = \int M_t^2.\,\frac{ds}{2GI_p'}$$

§ 5. Resume.

Oleh karena ada empat jenis deformasi atau robahan-bangun, juga terdapat ada empat jenis pekerjaan deformasi.

a. Pekerjaan robahan-panjang : $U_n = \int N^2.\,\frac{ds}{2EF}$

b. Pekerjaan lengkung : $U_m = \int M^2.\,\frac{ds}{2EI}$

c. Pekerjaan geser : $U_g = \int Q^2.\,\frac{ds}{2GF'}$

d. Pekerjaan torsi : $U_t = \int M_t^2.\,\frac{ds}{2GI_p'}$,

Semua jenis pekerjaan ini selalu bernilai *positif* oleh karena mengandung suku berpangkat dua atau kwadrat.

§ 6. Pekerjaan deformasi luar.

Jika titik-pegangan kekuatan P melentur (turun) sejauh δ, maka pekerjaan yang dilakukan ada $\frac{1}{2}P\delta$, oleh karena caranya bekerja pelahan-lahan. Pekerjaan sejenis ini kita sebut *pekerjaan deformasi luar* berlainan dengan jenis-pekerjaan termaksud di atas, yang tergolong *pekerjaan deformasi dalam.*

BAB I

ARTI STATIS TAK TERTENTU

§ 1. Pengantar.

Kita telah mempelajari bangunan-bangunan (konstruksi-konstruksi), pada mana gaya-gaya (yaitu kekuatan-kekuatan dan momen-momen) dapat dihitung dengan hukum statika atau hukum syarat-seimbang. Ukuran bagian-bagian yang membentuk bangunan tidak mempengaruhi perjalanan hitungan ini. Bangunan demikian ini kita namakan bangunan *statis-tertentu.*

Untuk menentukan pembagian gaya-gaya tersebut di dalam bangunan, kita lebih dahulu menghitung reaksi-reaksi-perletakannya. Pada bangunan rata, yaitu yang sumbu-sumbu bagian-bagiannya terletak di dalam bidang rata, syarat-seimbang menghasilkan tiga persamaan, yaitu :

$\Sigma K_x = 0$ (jumlah komponen mendatar = o)
$\Sigma K_y = 0$ („ „ vertikal = o)
$\Sigma M = 0$ („ momen terhadap sesuatu titik = o)

Jadi jika perletakan bangunan itu menimbulkan tiga gaya-reaksi, maka ketiga-tiga gaya ini dapat dihitung dengan tiga persamaan tadi, dan bangunan adalah *statis-tertentu* (balok di atas dua perletakan-bebas, balok terjepit sebelah, busur tiga sendi atau skarnir, d.l.l.).

Di sini kita akan mempelajari jenis-jenis bangunan, di mana syarat-syarat seimbang tidak mencukupi untuk menghitung gaya-gaya reaksinya supaya dapat tahu bagaimana pembagiannya gaya-gaya di dalam bangunan ini. Selain daripada syarat-syarat seimbang kita masih memerlukan *persamaan-persamaan deformasi* jadi ukuran bagian-bagian bangunan akan mempengaruhi pembagian gaya-gaya tersebut. Bangunan semacam ini dinamakan *statis tak tertentu.*

§ 2. Pembagian.

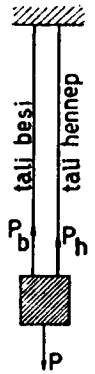
Mengapa sesuatu konstruksi itu menjadi statis tak tertentu, itu disebabkan oleh beberapa hal. Berhubung dengan ini bangunan statis tak tertentu boleh dibagi-bagikan di dalam *tiga* bagian :

1. Bangunan terdiri dari bagian-bagian yang masing-masing sudah lengkap untuk menahan muatan-luar. Ini kita namakan *bangunan-bangunan yang bekerja bersama-sama.*
2. Bangunan *statis tak tertentu luar.* Ini disebabkan oleh karena adanya kelebihan reaksi-perletakan.
3. Bangunan *statis tak tertentu dalam,* disebabkan oleh kelebihan bagian pada bangunan (misalnya batang di dalam vakwerk).

§ 3. Bangunan-bangunan yang bekerja bersama-sama.

Kita akan mempelajari beberapa contoh.

1. Tali-besi dan tali-hennep yang bersama-sama menahan muatan. Masing-masing bagian (tali) sudah membentuk bangunan sendiri untuk menggantungkan sesuatu muatan P. Sebagian dari muatan ini, sebesar P_b ditahan oleh tali-besi dan sebagian sebesar P_h oleh tali-hennep. Syarat-seimbang hanya dapat menentukan bahwa $P_b + P_h = P$ dan tak dapat menentukan besarnya P_b dan P_h masing-masing.



Gambar I, 1

Untuk lengkapnya, dianggap bahwa panjangnya kedua-dua utas tali itu sama, yaitu = l. Menurut hukum deformasi (di sini robahan-panjang), kita boleh menentukan bahwa perpanjangan-perpanjangan pada tali-besi dan tali hennep sama besarnya, jadi $\Delta\, l_b = \Delta\, l_h$.

Dengan mempergunakan hukum Hooke, kita mendapat : $\Delta\, l_b = P_b l/E_b F_b$ dan $\Delta\, l_h = P_h l/E_h F_h$, di mana E berarti modulus kenyal dan F berarti luas-tampang.

$$P_b l/E_b F_b = P_h l/E_h F_h$$

$$P_b : P_h = E_b F_b : E_h F_h \text{ sedang } P_b + P_h = P$$

$$P_b = \frac{E_b F_b}{E_b F_b + E_h F_h} P \text{ dan } P_h = \frac{E_h F_h}{E_b F_b + E_h F_h} . P$$

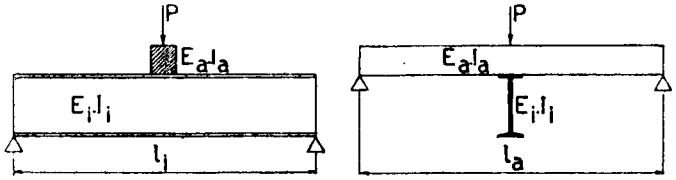
Faktor EF kita namakan *faktor keteguhan melawan robahan-panjang.* Jadi makin besar faktor ini, makin besar bagian-muatannya yang diterima.

Di sini diperingatkan bahwa hitungan di atas itu didasarkan atas penganggapan, bahwa sebelum ada muatan, kedua-dua tali itu *bebas-tegangan.*

2. Anak-balok dan ibu-balok. Tengah-tengah anak-balok diletakkan di atas tengah-tengah ibu-balok. Berat-sendiri diabaikan. Sebelum ada muatanluar, kedua-dua balok bebas-tegangan. Muatan P bekerja di tengah-tengah balok. Bagian-muatan yang ditahan oleh anak-balok adalah P_a dan yang dipikul oleh ibu-balok adalah P_i. Syarat-seimbang hanya dapat menentukan : $P_a + P_i = P$. Persamaan deformasi (di sini lengkungan) menunjukkan bahwa turunnya kedua-dua balok di tempat titik-perjumpaan (jadi di tengah-tengahnya) sama besarnya, jadi $\delta_a = \delta_i$,

$\delta_a = P_a l_a^3/48\, E_a I_a$ dan $\delta_i = P_i l_i^3/48\, E_i I_i$; $P_a l_a^3/48\, E_a I_a = P_i l_i^3/48\, E_i I_i$.

Faktor EI kita namakan faktor *keteguhan melawan lengkungan.*



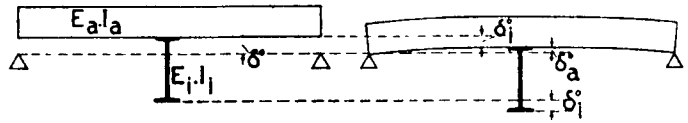
Gambar I, 2

$$P_a : P_i = E_a I_a l_i^3 : E_i I_i l_a^3 \text{ sedang } P_a + P_i = P$$

Dengan $E_a I_a/E_i I_i = k$ menjadi :

$$P_a = \frac{k l_i^3}{l_a^3 + k l_i^3} \text{ dan } P_i = \frac{l_a^3}{l_a^3 + k l_i^3}$$

Sebagai akibat dari salah "stellan" letaknya ibu-balok terlalu tinggi sebanyak $\delta°$ dari pada mestinya. Setelah anak-balok diletakkan tetap, tengah-tengah



Gambar I, 3

ibu-balok turun sejauh $\delta_i°$ dengan kemungkinan bahwa ibu-balok masih terlalu tinggi letaknya, yaitu $\delta_i° < \delta°$. Oleh karena anak-balok memaksa turunnya ibu-balok, maka anak-balok menderita tekanan keatas sebesar P_0 dari ibu-balok, dan sebaliknya ibu-balok menderita tekanan sebesar P_0 pula ke bawah. Anak-balok melengkung ke atas sejauh $\delta° - \delta_i = \delta_a° = P_o l_a^3/48\, E_a I_a$ (di tengah-tengah-

nya) dan ibu-balok melengkung ke bawah sejauh $\delta_i^\circ = P_o l_i^3/48\,E_i I_i$.

$$\delta_a^\circ + \delta_i^\circ = \delta^\circ$$

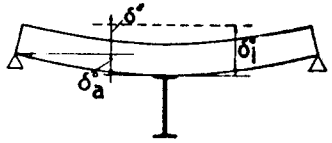
$$\tfrac{1}{48} P_o(l_a^3/E_a I_a + l_i^3/E_i I_i) = \delta^\circ$$

$$P_o = \frac{48\,\delta^\circ}{l_a^3/E_a I_a + l_i^3/E_i I_i} = \frac{48\,E_a I_a}{l_a^3 + k.l_i^3}\cdot\delta^\circ$$

Sesudah itu diadakan muatan P di tengah-tengah balok.

$$P_a = \frac{kl_i^3}{l_a^3 + kl_i^3}\,P - P_o \text{ dan } P_i = \frac{l_a^3}{l_a^3 + kl_i^3}\,P + P_o$$

Kita juga dapat menghitung secara langsung. Anak-balok turun sejauh δ_a (diukur dari garis yang menghubungkan titik-titik perletakannya) dan ibu-balok turun sejauh $\delta_i = \delta^\circ + \delta_a$



Gambar I, 4

$$\delta_a = P_a l_a^3/48\,E_a I_a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\delta_i = P_i l_i^3/48\,E_i I_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\delta_i - \delta_a = \delta^\circ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$P_a + P_i = P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\delta^\circ = \delta_i - \delta_a = (P - P_a)l_i^3/48\,E_i I_i - P_a l_a^3/48\,E_a I_a$$

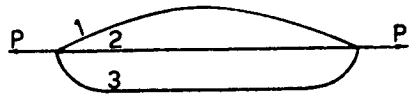
$$48\,E_a I_a \delta^\circ = (P - P_a)kl_i^3 - P_a l_a^3$$

$$P_a(l_a^3 + kl_i^3) = Pkl_i^3 - 48\,E_a I_a\,\delta^\circ$$

$$P_a = \frac{kl_i^3}{l_a^3 + kl_i^3}\,P - \frac{48\,E_a I_a}{l_a^3 + kl_i^3}\,\delta^\circ = \frac{kl_i^3}{l_a^3 + kl_i^3}\,P - P_o$$

$$P_i = P - P_a = \frac{l_a^3}{l_a^3 + kl_i^3}\,P + P_o$$

3. Susunan-batang. Kekuatan menarik sebesar 1 ton memperpanjang batang 1 dengan δ_{11}, batang 2 dengan δ_{22} dan batang 3 dengan δ_{33}.



Gambar I, 5

Kekuatan P dibagi-bagi kepada batang-batang ini sehingga batang 1 memikul P_1, batang 2 menahan P_2 dan batang 3 menerima P_3.

Ketiga-tiga batang *memanjang sama,* sedang $P_1 + P_2 + P_3 = P$.

Perpanjangan batang 1 ada $\delta_1 = P_1\delta_{11}$, batang 2 ada $\delta_2 = P_2\delta_{22}$ dan batang 3 ada $\delta_3 = P_3\delta_{33}$.

$$P_1.\delta_{11} = P_2.\delta_{22} \text{ atau } P_2 = P_2\delta_{11}/\delta_{22}$$

$$P_1.\delta_{11} = P_3.\delta_{33} \text{ atau } P_3 = P_1.\delta_{11}/\delta_{33}$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = P \text{ atau } P_1(1 + \delta_{11}/\delta_{22} + \delta_{11}/\delta_{33}) = P$$

$$P_1(1/\delta_{11} + 1/\delta_{22} + 1/\delta_{33}) = P.1/\delta_{11}$$

$$P_1 = \frac{1/\delta_{11}}{1/\delta_{11} + 1/\delta_{22} + 1/\delta_{33}}\,P = \frac{1/\delta_{11}}{\Sigma\,1/\delta}\,P$$

$$P_2 = \frac{1/\delta_{22}}{\Sigma\,1/\delta}\,P \text{ dan } P_3 = \frac{1/\delta_{33}}{\Sigma\,1/\delta}\,P$$

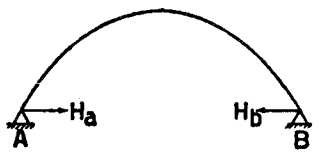
Pendapat-pendapat ini mengingatkan kita pada hukum Kirchoff di dalam ilmu elektrik.

§ 4. Statis tak tertentu-luar.

Balok lurus itu stabil serta statis-tertentu jika dicepit sebelah atau diletakkan bebas di atas dua titik-perletakan (sendi dan rol). Apabila perletakannya ditambah, balok menjadi statis tak tertentu. Kelebihan perletakan ini menimbulkan *gaya-reaksi statis kelebihan* atau *gaya-reaksi statis tak tertentu.* Jika banyaknya kelebihan ini ada n, maka bangunan menjadi statis tak tertentu berlipat n; dengan $n = 1$ menjadi statis tak tertentu berlipat satu atau tunggal.

Balok lurus terusan di atas n perletakan-bebas itu menjadi statis tak tertentu berlipat $(n-2)$, dan banyaknya gaya statis kelebihan (tak tertentu) juga ada $(n - 2)$.

Busur dengan tiga skarnir (sendi) itu stabil serta statis-tertentu. Reaksi-reaksi-perletakan pada busur itu tidak berarah vertikal, jadi mempunyai kom-



Gambar I, 6

ponen-komponen mendatar. Pada busur tiga-skarnir garis-tekan muatan harus melalui ketiga-tiga titik-skarnir ini, jadi sudah tertentu perjalanannya. Dengan begitu besar serta arah-kerjanya reaksi-reaksi perletakan dapat diketahui, jadi juga komponen-komponennya mendatar yang masing-masing sama besarnya, yaitu : H (tangan kutub) dan arah-kerjanya berlawanan satu sama lain.

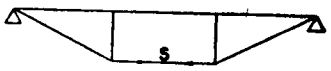
Jika skarnir di puncak dihapuskan, perjalanan garis-tekan tak dapat ditentukan begitu saja (sebab diharuskan melalui hanya dua titik-skarnir saja). Syarat seimbang hanya dapat menentukan bahwa $H_a = H_b = H$ dan tak mencukupi untuk menentukan besarnya. (Muatan dianggap vertikal). Setelah H ini diketahui, kita dapat menggambar perjalanan garis-tekan muatan pada busur, sebab tangan-kutubnya (H) sudah terdapat dan harus melalui dua titik yang tertentu (skarnir-skarnir A dan B). Jadi yang kita perlukan itu ialah besaran H tadi dan berhubung dengan ini H menjadi gaya statis kelebihan atau gaya statis tak tertentu dan bangunan menjadi statis tak tertentu tunggal.

Busur tercepit sebelah juga stabil serta statis tertentu. Cepitan itu menimbulkan tiga gaya-reaksi, yaitu momen, kekuatan-vertikal dan kekuatan-mendatar. Apabila ujung lainnya tercepit pula, di sini akan tertimbul tiga gaya-reaksi pula dan bangunan menjadi statis tak tertentu berlipat-tiga.

§ 5. Statis tak tertentu-dalam.

Bangunan *vakwerk* rata itu stabil serta statis tertentu jika $2k=s+r$ dan batang-batangnya disusun yang tepat. Di sini s berarti banyaknya batang, k banyaknya titik-hubungan dan r banyaknya gaya-reaksi, yaitu $r = 3$. Tambahan sebatang diagonal di dalam sesuatu vak (diagonal rangkap), menimbulkan tambahnya satu gaya-batang, yang menjadi gaya statis kelebihan yang tergolong *gaya-dalam.* Bangunan menjadi statis tak tertentu-*dalam* tunggal. Jika ada n vak yang mempunyai diagonal rangkap, bangunan menjadi statis tak tertentu berlipat n.

Balok-bertulang seperti digambar I, 7 itu statis tak tertentu tunggal. Yang menjadi gaya kelebihan ialah kekuatan-tarik H di batang s. Jika batang s ini dipotong, lenyaplah kekuatan H tadi dan bangunan menjadi balok di atas dua perletakan yang statis tertentu. Kekuatan H itu adalah gaya-dalam pula.



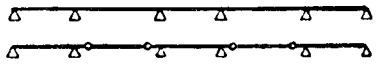
Gambar I, 7

Sebagai teladan lainnya, kita ambil *gelang tertutup* (berbangun lingkaran, ellips, persegi

dan sebagainya), yang menahan muatan di dalam bidangnya. Jika kita memotong gelang ini di sesuatu tampang, maka lenyaplah gaya-gaya yang bekerja pada tampang ini. Gaya-gaya ini terdiri dari : momen, kekuatan-normal dan kekuatan-melintang. Ketiga-tiga gaya ini adalah gaya-dalam, yang kita anggap sebagai statis kelebihan, dan dengan begitu bangunan kita sebut statis tak tertentu-*dalam* berlipat tiga.

§ 6. Perbandingan antara statis tak tertentu luar dan dalam.

1. Balok terusan di atas n perletakan-bebas. Banyaknya kelebihan perletakan ada $n - 2$. Jika $(n - 2)$ perletakan ini dihilangi, bangunan menjadi statis tertentu.



Gambar I, 8

Oleh karena reaksi-perletakan itu tergolong *gaya-luar,* bangunan ini disebut statis tak tertentu-*luar* (berlipat $n - 2$). Sekarang banyaknya perletakan tidak dirobah, dan kita mengadakan $(n - 2)$ sendi yang tepat letaknya supaya tiap-tiap bagian bangunan harus stabil (balok-Gerber). Dengan begitu susunan menjadi statis-tertentu.

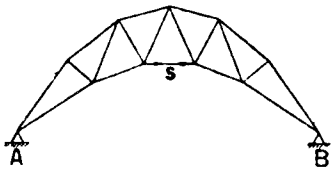
Sendi-sendi itu melenyapkan kemungkinan adanya momen-momen ditampang balok di tempatnya. Momen-momen balok ini kita anggap sebagai gaya-kelebihan. Oleh karena momen-balok itu tergolong gaya-dalam, maka dipandang dari sudut susunan Gerber, balok terusan itu juga boleh dinamakan statis tak tertentu-*dalam* (berlipat $n - 2$ pula).

Kita juga dapat memotong balok di atas perletakan-perletakan antara, yang banyaknya ada $n - 2$. Dengan begitu susunan terdiri dari $(n - 1)$ batang balok yang masing-masing statis tertentu (balok di atas 2 perletakan). Memotong balok di atas perletakan berarti melenyapkan momen-balok di situ. Jika momen-momen ini dianggap sebagai gaya kelebihan, susunan boleh disebut statis tak tertentu-*dalam.*

2. Busur dua skarnir. Menjadi statis tertentu jika di puncak diadakan skarnir, yang melenyapkan momen-busur di situ. Jadi momen-puncak ini dapat dianggap sebagai gaya kelebihan dan bangunan boleh dinamakan statis tak tertentu-*dalam* (tunggal).

3. Busur tercepit. Kita memotong puncaknya, sehingga terjadi dua busur yang masing-masing tercepit sebelah dan statis tertentu. Dengan begitu kita menghapuskan gaya-gaya pada tampang-puncak, yaitu : momen, kekuatan-normal dan kekuatan-melintang (jadi 3 gaya). Ketiga-tiga gaya ini adalah gaya-dalam dan jika dianggap sebagai gaya-kelebihan, bangunan dikatakan statis tak tertentu-*dalam*, berlipat tiga.

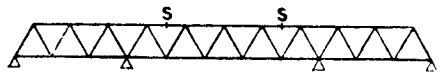
Kita juga dapat mengadakan tiga skarnir supaya bangunan menjadi statis tertentu. Skarnir-skarnir ini melenyapkan momen-momen di tempatnya dan jika momen-momen ini dianggap sebagai gaya kelebihan, bangunan tergolong statis tak tertentu-dalam serta berlipat tiga pula.



Gambar I, 9

4. Busur-vakwerk dua skarnir. Jika batang *S* dihapuskan, terjadilah busur dengan tiga skarnir yang statis tertentu. Gaya kekuatan di batang *S* dianggap sebagai gaya kelebihan dan dengan begitu bangunan disebut statis tak tertentu-*dalam*, tunggal.

5. Vakwerk-terusan. Setelah menghilangi batang-batang *S* maka tercapailah tiga buah vakwerk yang masing-masing statis tertentu. Dengan menganggap batang-batang *S* tadi sebagai bagian-kelebihan, atau kekuatan-kekuatan di batang-batang tersebut, sebagai gaya-kelebihan (gaya-dalam), bangunan dapat disebut statis tak tertentu-*dalam* (berlipat dua).



Gambar I, 10

Apabila yang dianggap sebagai gaya-kelebihan itu reaksi-reaksi pada perletakan-perletakan antara (dua buah), maka bangunan dinamakan statis tak tertentu-*luar*.

6. Kesimpulan. Menurut contoh-contoh di atas ini, teranglah bahwa pada hakekatnya tak ada bedanya antara sifat statis tak tertentu-dalam dan luar. Ini tergantung kepada penganggapan gaya-gaya mana yang dianggap sebagai statis kelebihan Bangunan vakwerk di atas dua perletakan-bebas dengan beberapa diagonal-rangkap, melulu bersifat statis tak tertentu dalam, sebab gaya-kelebihan-luar tidak ada. Begitu juga balok bertulang di atas dua perletakan-bebas.

§ 7. Kombinasi.

Bangunan vakwerk dengan diagonal-rangkap (satu atau lebih) itu statis tak tertentu-dalam. Apabila perletakannya juga menimbulkan reaksi statis kelebihan (jadi menimbulkan sifat statis tak tertentu-luar), bangunan menjadi statis tak tertentu dalam dan luar. Contoh : busur-vakwerk dua sendi dengan diagonal-rangkap, vakwerk terusan dengan diagonal-rangkap.

§ 8. Cara menghitung.

Di dalam menghitung statika pada bangunan statis tak tertentu, langkah yang pertama ialah menghitung gaya-gaya yang statis kelebihan. Untuk ini kita menghapuskan (di dalam pikiran saja) gaya-gaya kelebihan ini supaya mencapai susunan yang statis tertentu. Kemudian menentukan syarat-syarat yang harus dipenuhi, misalnya bahwa titik-titik pegangan gaya-gaya kelebihan ini tak boleh beralih atau berputar-sudut. Syarat-syarat ini nanti akan menghasilkan persamaan-persamaan deformasi yang dapat menentukan nilai besaran-besaran yang kita cahari ini.

Sesudah mengetahui nilai besaran-besaran statis tak tertentu ini, dengan syarat-seimbang kita dapat menghitung dengan mudah pembagian gaya-gaya di seluruh bangunan dan tegangan-tegangannya yang kita anggap penting.

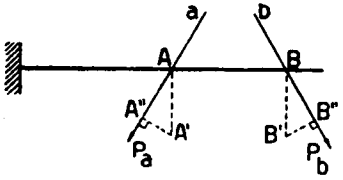
BAB II

PERSAMAAN DEFORMASI

A. FAKTOR PENGARUH-LUAR

§ 1. Arti faktor pengaruh-luar.

Di titik A bekerjalah kekuatan P_a menurut garis a. Titik A akan beralih tempat (di A') dan komponen peralihan ini menurut garis a adalah $\delta_a = AA''$ yang bertanding lurus dengan besarnya P_a dan tergantung kepada letak titik A, arah garis a serta jenis bangunan. Berhubung dengan ini kita boleh menulis; $\delta_a = P_a.\delta_{aa}$, di mana δ_{aa} itu faktor yang tetap.



Gambar II, 1

Titik B juga akan berpindah dan komponen pindahan ini menurut garis b adalah $\delta_b = BB''$ yang juga bertanding lurus dengan nilai P_a dan tergantung pada letak titik B, arah garis b serta jenis bangunan. Kita dapat menulis: $\delta_b = P_a.\delta_{ba}$, di mana δ_{ba} itu besaran yang tetap pula.

δ_{aa} berarti faktor-pengaruh atas peralihan-tempat titik A menurut arah kerjanya sesuatu kekuatan P_a yang berpegangan di titik A ini.

δ_{ba} berarti faktor-pengaruh atas peralihan titik B menurut garis b sebagai akibat dari kekuatan P_a pula yang bekerja di titik A.

Faktor-faktor ini kita namakan *faktor pengaruh-luar*, oleh karena peralihan-peralihan-tempat ini menimbulkan pekerjaan-luar. Besaran δ_{aa} itu senantiasa bernilai positif sebab diukur menurut arah-kerjanya kekuatan, sedang δ_{ba} dapat bernilai positif atau negatif, tergantung pada arah garis b terhadap arah-kerjanya P_a.

Sekarang kekuatan P_a kita hilangkan dan di titik B kita kerjakan kekuatan P_b menurut garis b. Kita akan mendapat :

$$\delta_b = P_b.\delta_{bb} \text{ dan } \delta_a = P_b.\delta_{bb}$$

δ_{bb} = faktor-pengaruh atas peralihan-tempat titik B menurut arah-kerja kekuatan P_b yang berpegangan di titik B.

δ_{ab} = faktor-pengaruh atas peralihan titik A menurut garis a sebagai akibat dari kekuatan P_b yang bekerja di titik B.

Faktor-pengaruh dengan indeks kembar juga dinamakan *faktor-pengaruh sendiri*, atau *pribadi*.

Sebagai akibat dari kedua-dua kekuatan P_a dan P_b akan terdapat :

$$\delta_a = P_a.\delta_{aa} + P_b.\delta_{ab}$$
$$\delta_b = P_a.\delta_{ba} + P_b.\delta_{bb}$$

Jika di titik-titik C, D, E ...., juga bekerja kekuatan-kekuatan P_c, P_d, P_e ...., maka :

$$\delta_a = P_a.\delta_{aa} + P_b.\delta_{ab} + P_c.\delta_{ac} + P_d.\delta_{ad} + P_e.\delta_{ae} + \ldots.$$
$$\delta_b = P_a.\delta_{ba} + P_b.\delta_{bb} + P_c.\delta_{bc} + P_d.\delta_{bd} + P_e.\delta_{be} + \ldots.$$
$$\delta_c = P_a.\delta_{ca} + P_b.\delta_{cb} + P_c.\delta_{cc} + P_d.\delta_{cd} + P_e.\delta_{ce} + \ldots., \text{ d.s.t.}$$

Tentang *dimensi demikian :*

$$[\delta_a] = [\delta_b] = [\delta.] = [l] = [\text{cm}]$$
$$[\delta_{aa}] = [\delta_{ab}] = [\delta. .] = [l/k] = [\text{cm/kg}]$$

§ 2. Hukum Maxwell.

Pada permulaan bekerjalah kekuatan P_a di titik A yang akan beralih menurut garis-kerja P_a sejauh $\delta_a = P_a.\delta_{aa}$. Oleh karena P_a itu bekerja pelahan-lahan (tidak sekonyong-konyong), maka pekerjaan yang dijalankan olehnya ada $\frac{1}{2}P_a.\delta_a = \frac{1}{2}P_a.P_a.\delta_{aa} = \frac{1}{2}P_a^2.\delta_{aa}$. Kemudian mulai bekerjalah kekuatan P_b di titik B. Titik A beralih lagi sejauh $P_b.\delta_{ab}$ (diukur menurut garis-kerja P_a). Oleh karena P_a sudah bekerja sepenuhnya, maka pekerjaannya bertambah dengan $P_a.P_b\delta_{ab}$ dan P_b yang bekerja tidak sekonyong-konyong menjalankan pekerjaan sebesar $\frac{1}{2}P_b.P_b\delta_{bb} = \frac{1}{2}P_b^2.\delta_{bb}$.
Jumlah pekerjaan yang dijalankan oleh kedua-dua kekuatan ini terdapat :

$$U = \tfrac{1}{2}P_a^2.\delta_{aa} + P_a.P_b\delta_{ab} + \tfrac{1}{2}P_b^2.\delta_{bb}$$

Sekarang urut bekerjanya kekuatan-kekuatan tadi kita balik, pertama-tama bekerjalah hanya kekuatan P_b di titik B, yang dengan begitu menjalankan pekerjaan sebanyak $\frac{1}{2}P_b^2\delta_{bb}$ (caranya bekerja pelahan-lahan). Sesudah itu kekuatan P_a mulai bekerja di titik A. Mengikuti keterangan di atas, tambahan pekerjaan oleh P_b ada

$P_b.P_a\delta_{ba}$ dan P_a bekerja sebanyak $\frac{1}{2}P_a^2.\delta_{aa}$. Jumlah pekerjaan sekarang menjadi:

$$U' = \tfrac{1}{2}P_a^2.\delta_{aa} + P_b.P_a\delta_{ba} + \tfrac{1}{2}P_b^2.\delta_{bb}$$

Oleh karena cara urut bekerjanya kekuatan-kekuatan itu tidak mempengaruhi nilai jumlah pekerjaan yang dijalankan, maka boleh ditentukan bahwa $U = U'$.

$$\tfrac{1}{2}P_a^2.\delta_{aa} + P_a.P_b.\delta_{ab} + \tfrac{1}{2}P_b^2.\delta_{bb} = \tfrac{1}{2}P_a^2\delta_{aa} + P_b.P_a\delta_{ba} + \tfrac{1}{2}P_b^2.\delta_{bb}$$
$$P_a.P_b\delta_{ab} = P_b.P_a\delta_{ba}$$
$$\delta_{ab} = \delta_{ba}$$

Ini berarti : faktor-pengaruh atas peralihan titik A diukur menurut garis-kerja kekuatan P_a (yang berpegangan di A) sebagai akibat dari kekuatan P_b yang bekerja di titik B (jadi nilai δ_{ab}) sama dengan faktor-pengaruh atas peralihan titik B diukur menurut garis-kerja P_b sebagai akibat dari P_a tadi (nilai δ_{ba}).

Inilah *hukum Maxwell* atau hukum *saling-pengaruh* (timbal balik).

$$\begin{aligned} U &= \tfrac{1}{2}P_a^2.\delta_{aa} + P_a.P_b\delta_{ab} + \tfrac{1}{2}P_b^2.\delta_{bb} = \\ &= \tfrac{1}{2}P_a^2.\delta_{aa} + \tfrac{1}{2}P_aP_b\delta_{ab} + \tfrac{1}{2}P_aP_b\delta_{ab} + \tfrac{1}{2}P_b^2\delta_{bb} = \\ &= \tfrac{1}{2}P_a^2\delta_{aa} + \tfrac{1}{2}P_a.P_b\delta_{ab} + \tfrac{1}{2}P_b.P_a\delta_{ba} + \tfrac{1}{2}P_b^2.\delta_{bb} = \\ &= \tfrac{1}{2}P_a(P_a\delta_{aa} + P_b\delta_{ab}) + \tfrac{1}{2}P_b(P_a\delta_{ba} + P_b\delta_{bb}) = \\ &= \tfrac{1}{2}P_a\delta_a + \tfrac{1}{2}P_b\delta_b \end{aligned}$$

Jika ada banyak kekuatan-kekuatan, P_a, P_b, P_c ..... , terdapat

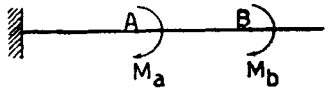
$$U = \tfrac{1}{2}P_a.\delta_a + \tfrac{1}{2}P_b.\delta_b + \tfrac{1}{2}P_c.\delta_c + \ldots = \tfrac{1}{2}\Sigma P\delta$$

§ 3. **Perluasan hukum Maxwell.**

Hukum ini berlaku juga antara dua momen, dan pula antara momen dan kekuatan. Momen itu terutama menyebabkan putaran-sudut φ dan secara tak langsung juga menimbulkan peralihan-tempat yang kita tulis dengan δ'. Kekuatan itu pertama-tama mengakibatkan peralihan-tempat (tertulis δ) dan secara tak langsung dapat juga menyebabkan putaran-sudur, φ'. Jadi peralihan tempat disebabkan oleh momen itu δ' dan putaran-sudut oleh kekuatan ialah φ'. (Kekuatan dapat bekerja jika titik-pegangnya beralih dan momen dapat bekerja jika tampang-kerjanya-berputar).

a. **Perbandingan antara dua momen** (gambar II, 2).

$$\varphi_a = M_a.\varphi_{aa} + M_b\varphi_{ab}$$
$$\varphi_b = M_a.\varphi_{ba} + M_b\varphi_{bb}$$



Gambar II, 2

Arti-arti φ_{aa}, φ_{ab}, φ_{bb} dan φ_{ba} itu analog dengan apa yang diuraikan di dalam § 1.

Jika pada permulaan yang bekerja hanya M_a maka A berputar sudut sebesar $M_a.\varphi_{aa}$ dan M_a bekerja sebanyak $\frac{1}{2}M_a.M_a\varphi_{aa} = \frac{1}{2}M_a^2\varphi_{aa}$ (sebab M bekerja pelahan-lahan).

Sesudah M_b dikerjakan, A berputar sudut lagi dengan $M_b.\varphi_{ab}$ dan B dengan $M_b.\varphi_{bb}$. Oleh karena M_a sudah bekerja sepenuhnya, tambahan pekerjaannya ada $M_a.M_b\varphi_{ab}$ dan M_b bekerja sebanyak $\frac{1}{2}M_b^2.\varphi_{bb}$.

$$U = \tfrac{1}{2}M_a^2\varphi_{aa} + M_aM_b\varphi_{ab} + \tfrac{1}{2}M_b^2\varphi_{bb}$$

Jika urut bekerjanya momen-momen ini kita balik, maka mengikuti keterangan di dalam § 2 kita mendapat :

$$U' = \tfrac{1}{2}M_a^2\varphi_{aa} + M_b.M_a\varphi_{ba} + \tfrac{1}{2}M_b^2.\varphi_{bb}$$

Dengan menentukan $U = U'$ terdapat: $\varphi_{ab} = \varphi_{ba}$.

Dimensi : $[\varphi.] = [0]$ (tak berdimensi)

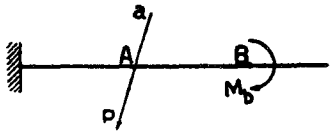
$$[\varphi..] = \left[\frac{\varphi.}{\text{momen}}\right] = \left[\frac{1}{\text{momen}}\right] = [k^{-1}l^{-1}] = [\text{kg}^{-1}\text{cm}^{-1}]$$

b. **Perbandingan antara kekuatan dan momen.**

$$\delta_a = P_a.\delta_{aa} + M_b.\delta'_{ab},\quad \varphi_a = P_a.\varphi'_{aa} + M_b.\varphi_{ab}$$
$$\delta_b = P_a.\delta_{ba} + M_b.\delta'_{bb},\quad \varphi_b = P_a.\varphi'_{ba} + M_b.\varphi_{bb}$$

δ'_{ab} = pengaruh atas peralihan titik A menurut garis-kerja P_a sebagai akibat dari M_b.

δ'_{bb} = pengaruh atas peralihan titik B (diukur menurut sesuatu garis yang kita pilih sendiri), sebagai akibat dari momen M_b.



Gambar II, 3

φ'_{aa} = pengaruh atas putaran-sudut pada tampang A sebagai akibat dari P_a.

φ'_{ba} = pengaruh atas putaran-sudut pada tampang B diukur menurut arah-kerja M_b, sebagai akibat dari P_a.

Pada permulaan yang kita anggap bekerja dahulu ialah P_a dan sesudahnya, momen M_b. Dengan begitu terdapat :

$$U = \tfrac{1}{2}P_a^2.\delta_{aa} + P_a.M_b\delta'_{ab} + \tfrac{1}{2}M_b^2.\varphi_{bb}$$

Jika urut-kerja gaya-gaya ini di balik, maka

$$U' = \tfrac{1}{2}P_a^2.\delta_{aa} + M_b.P_a\varphi'_{ba} + \tfrac{1}{2}M_b^2.\varphi_{bb}$$

Oleh karena $U = U'$, menjadi : $\delta'_{ab} = \varphi'_{ba}$.

$$[\delta'_{..}] = [l/\text{momen}] = [k^{-1}] = [\text{kg}^{-1}]$$
$$[\varphi'_{..}] = [1/\text{kekuatan}] = [k^{-1}] = [\text{kg}^{-1}]$$

Jadi $[\delta'_{..}] = [\varphi'_{..}]$

§ 4 Hukum Castigliano.

Pada sesuatu bangunan bekerjalah kekuatan-kekuatan P_a, P_b, P_c ..... P_x di titik-titik berturut-turut *A, B, C*..... *X*. Menurut pengakhiran § 2 terdapat :

$$U = \tfrac{1}{2}\Sigma P.\delta. = \tfrac{1}{2}P_a\delta_a + \tfrac{1}{2}P_b\delta_b + \tfrac{1}{2}P_c\delta_c + \ldots . \tfrac{1}{2}P_x\delta_x$$
$$\delta_a = P_a\delta_{aa} + P_b\delta_{ab} + P_c\delta_{ac} + \ldots . P_x\delta_{ax}$$
$$\delta_b = P_a.\delta_{ba} + P_b.\delta_{bb} + P_c.\delta_{bc} + \ldots . P_x.\delta_{bx}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta_x = P_a.\delta_{xa} + P_b.\delta_{xb} + P_c.\delta_{xc} + \ldots . P_x.\delta_{xx}$$
$$U = \tfrac{1}{2}P_a(P_a\delta_{aa} + P_b\delta_{ab} + P_c\delta_{ac} + \ldots . P_x\delta_{ax}) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}P_b(P_a\delta_{ba} + P_b\delta_{bb} + P_c\delta_{bc} + \ldots . P_x\delta_{bx}) +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \tfrac{1}{2}P_x(P_a\delta_{xa} + P_b\delta_{xb} + P_c\delta_{xc} + \ldots . P_x\delta_{xx})$$
$$dU/dP_x = \tfrac{1}{2}P_a\delta_{ax} + \tfrac{1}{2}P_b\delta_{bx} + \tfrac{1}{2}P_c\delta_{cx} + \ldots .$$
$$\tfrac{1}{2}P_a\delta_{xa} + \tfrac{1}{2}P_b\delta_{xb} + \tfrac{1}{2}P_c\delta_{xc} + \ldots . P_x\delta_{xx}$$
$$= P_a\delta_{xa} + P_b\delta_{xb} + P_c\delta_{xc} + \ldots . P_x\delta_{xx}$$
$$= \delta_x$$

Ini berarti : differensial-kosien dari jumlah pekerjaan ke sesuatu kekuatan itu sama dengan peralihan titik-pegangannya (diukur menurut arah kerjanya).

Inilah hukum *Castigliano.*

Selanjutnya, $d^2U/dP_x^2 = \delta_{xx}$.

Differensial-kosien kedua dari jumlah pekerjaan ke sesuatu kekuatan berarti faktor-pengaruhnya sendiri, jadi senantiasa positif.

Kemudian $d^2U/dP_x dP_a = d\dfrac{dU}{dP_x}/dP_a = d\delta_x/dP_a = \delta_{xa}$. Differensial-kosien

kedua dari jumlah pekerjaan, pertama kali ke suatu kekuatan (P_X) kemudian kelainan kekuatan (P_a) berarti faktor-pengaruh atas peralihan titik-pegangan kekuatan yang pertama (P_X) dari kekuatan yang kedua (P_a)

Jalan lain ialah demikian. Sebelum gaya-gaya tadi dikerjakan, bekerjalah gaya di P_X di titik pegangan P_X, yang kemudian di susul oleh gaya-gaya termaksud. Sebagai akibat dari yang belakangan ini, titik pegangan gaya dP_X atau gaya P_X sendiri beralih sejauh δ_X. Oleh karena gaya dP_X telah bekerja sepenuhnya, maka ini menjalankan pekerjaan sebesar $dU = dP_X\delta_X$, jadi $\delta_X = dU/dP_X$.

Secara umum kita tulis

$$\delta_j = d\,U/dP_j = P_a\delta_{ja} + P_b\delta_{jb} + \ldots\ldots P_j\delta_{jj} + P_k\delta_{jk} + \ldots . P_x\delta_{jx}.$$

$$\delta_k = d\,U/dP_k = P_a\delta_{ka} + P_b\delta_{kb} + \ldots\ldots P_j\delta_{kj} + P_k\delta_{kk} + \ldots . P_x\delta_{kx}.$$

$$d\delta_j/dP_j = d^2U/dP_j^2 = \delta_{jj}\,;\quad d\delta_j/dP_k = d^2U/dP_j\,dP_k = \delta_{jk}.$$

$$d\delta_k/dP_k = d^2U/dP_k^2 = \delta_{kk}\,;\quad d\delta_k/dP_j = d^2U/dP_k\,dP_j = \delta_{kj}.$$

Oleh karena $d^2U/dP_j\,dP_k = d^2U/dP_k\,dP_j$, maka $\delta_{jk} = \delta_{kj}$ yang berarti lagi **hukum timbal balik Maxwell.**

Jika P_j dan P_k diganti dengan M_j dan M_k, menjadi :

$$\varphi_j = dU/dM_j = P_a\varphi'_{ja} + P_b\varphi'_{jb} + \ldots\ldots\ldots M_j\varphi_{jj} + M_k\varphi_{jk} + \ldots . P_x\varphi_{jx}$$

$$\varphi_k = dU/dM_k = P_a\varphi'_{ka} + P_b\varphi'_{kb} + \ldots\ldots\ldots M_j\varphi_{kj} + M_k\varphi_{kj} + \ldots . P_x\varphi'_{kx}.$$

$$\varphi_{jj} = d^2U/dM_j^2,\ \varphi_{kk} = d^2U/dM_k^2\,;\ \varphi_{jk} = \varphi_{kj}.$$

Sekarang P_j saja yang dirobah menjadi M_j.

$$\varphi_j = P_a\varphi'_{ja} + \ldots . M_j\varphi_{jj} + P_k\varphi'_{jk} + \ldots\ldots\ldots P_x\varphi'_{jx}$$

$$\delta_k = P_a\delta_{ka} + \ldots . M_j\delta'_{kj} + P_k\delta_{kk} + \ldots\ldots\ldots P_x\delta_{kx}.$$

$d\varphi_j / dP_k = d^2U / dM_j\, dP_k = \varphi'_{jk}$ dan $d\delta_k / d M_j = d^2U / dP_k\, dM_j = \delta'_{kj}$.

Terdapat $\varphi'_{jk} = \delta'_{kj}$.

Jadi menurut perjalanan di atas itu, urutnya uraian terbalik:
pertama-tama mendapatkan hukum Castigliano dan berdasarkan ini, baru hukum Maxwel.

§ 5. Beberapa contoh.

A. Balok terjepit sebelah dengan I tetap dan bentang OB = l.

1. Akibat gaya-gaya P_a dan P_b

$M_x = P_a x + P_b(x + b)$, diambil nilai mutlaknya.

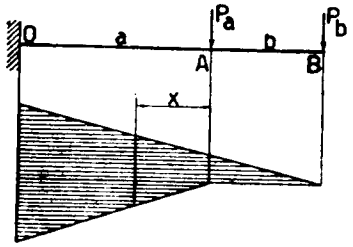
$dM_x/dP_a = x;\ dM_x/dP_b = (x + b)$

$U = \int M_x^2\, dx/2EI$

$$\delta_a = dU/dP_a = \int_o^a M_x\,(dM_x/dP_a)\, dx/EI$$

$$\delta_{aa} = d^2U/dP_a^2 = \int_o^a (dM_x/dP_a)^2\, dx/EI$$

$$= \int_o^a x^2 dx/EI = a^3/3EI$$



Gambar II, 3a

$$\delta_b = dU/dP_b = \int_{-b}^a M_x\,(dM_x/dP_b)\, dx/EI$$

$$\delta_{bb} = d^2U/dP_b^2 = \int_{-b}^a (dM_x/dP_b)^2\, dx/EI = \int_{-b}^a (x + b)^2\, dx/EI = l^3/3EI.$$

$$\delta_{ab} = \delta_{ba} = d^2U/dP_a dP_b = \int_o^a (dM_x/dP_a)(dM_x/dP_b)\, dx/EI =$$

$$= \int_o^a x(x + b)\ dx/EI = (\tfrac{1}{3}a^3 + \tfrac{1}{2}a^2b)/EI = (\tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{6}a)\, a^2/EI$$

$$\delta_a = P_a\delta_{aa} + P_b\delta_{ab} = \tfrac{1}{3}a^3P_a/EI + (\tfrac{1}{3}a^3 + \tfrac{1}{2}a^2b)\, P_b/EI$$

$$\delta_b = P_a\delta_{ba} + P_b\delta_{bb} = (\tfrac{1}{3}a^3 + \tfrac{1}{2}a^2b)\, P_a/EI + \tfrac{1}{3}l^3\, P_b/EI$$

Dengan menentukan $P_a = 0$ dan membuat a variabel terdapat $\delta_a = \frac{P_b}{EI}(\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2b)$ yang berarti ordinat garis lentur akibat P_b.

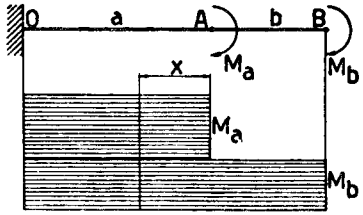
2. Akibat momen M_a dan M_b

$M_x = M_a + M_b$

$dM_x/dM_a = dM_x/dM_b = 1.$

$$\varphi_{aa} = \int_o^a dx/EI = a/EI$$

$$\varphi_{bb} = \int_{-b}^a dx/EI = l/EI$$



Gambar II, 4

$$\varphi_{ab} = \varphi_{ba} = \int_o^a (dM_x/dM_a)\,(dM_x/dM_b)\, dx/EI = a/EI$$

$$\varphi_a = M_a\varphi_{aa} + M_b\varphi_{ab} = (M_a + M_b)\, a/EI$$

$$\varphi_b = M_a\varphi_{ba} + M_b\varphi_{bb} = (M_a a + M_b l)/EI$$

3. Kekuatan-kekuatan P_a dan P_b, dan momen-momen M_a dan M_b.

$M_x = P_a x + P_b\,(x + b) + M_a + M_b$

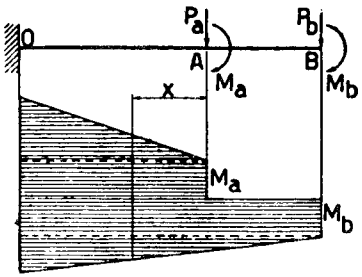
$dM_x/dP_a = x\ ;\ dM_x/dP_b = (x + b)$

$dM_x/dM_a = dM_x/dM_b = 1.$

$\delta'_{ab} = \varphi'_{ba} = d^2U/dP_a.dM_b =$

$$= \int_o^a (dM_x/dP_a)(dM_x/dM_b)\, dx/EI =$$

$$= \int_o^a x\, dx/EI = \tfrac{1}{2}a^2/EI$$



Gambar II, 5

$$\delta'_{ba} = \varphi'_{ab} = d^2U/dP_b.dM_a = \int_o^a (x + b)\, dx/EI = (\tfrac{1}{2}a^2 + ab)/EI = a(l - \tfrac{1}{2}a)/EI$$

$$\delta'_{aa} = \varphi'_{aa} = d^2U/dP_a.dM_a = \int_o^a x dx/EI = \tfrac{1}{2}a^2/EI.$$

$$\delta'_{bb} = \varphi'_{bb} = d^2U/dP_b.dM_b = \int_{-b}^a (x + b)\, dx/EI = \tfrac{1}{2}l^2/EI$$

$$\delta_a = P_a\delta_a + P_b\delta_{ab} + M_a\delta'_{aa} + M_b\,\delta'_{ab} =$$

$$= \frac{1}{EI}\{\tfrac{1}{3}\,P_a a^3 + P_b(\tfrac{1}{3}\,a^3 + \tfrac{1}{2}\,a^2 b) + \tfrac{1}{2}\,M_a\,a^2 + \tfrac{1}{2}\,M_b a^2\}$$

$$\delta_b = P_a\delta_{ba} + P_b\delta_{bb} + M_a\delta'_{ba} + M_b\delta'_{bb} =$$

$$= \frac{1}{EI}\{P_a(\tfrac{1}{3}\,a^3 + \tfrac{1}{2}\,a^2 b) + \tfrac{1}{3}\,P_b l^3 + M_a(\tfrac{1}{2}\,a^2 + ab) + \tfrac{1}{2}\,M_b l^2\}$$

$$\varphi_a = M_a\varphi_{aa} + M_b\varphi_{ab} + P_a\varphi'_{aa} + P_b\varphi'_{ab} =$$

$$= \frac{1}{EI}(M_a a + M_b a + \tfrac{1}{2}\,P_a a^2 + \tfrac{1}{2}\,P_b a^2 + P_b ab)$$

$$\varphi_b = M_a\varphi_{ba} + M_b\varphi_{bb} + P_a\varphi'_{ba} + P_b\varphi'_{bb} =$$

$$= \frac{1}{EI}(M_a a + M_b l + \tfrac{1}{2}\,P_a a^2 + \tfrac{1}{2}\,P_b l^2)$$

B. Balok di atas dua titik perletakan (EI tetap).

1. *Lenturan akibat beban vertikal.*

Kita mengadakan dua gaya P_c dan P_d seperti gambar.

$$M_{x<a} = P_c\frac{b}{l}\,x + P_d\frac{s}{l}\,x;$$

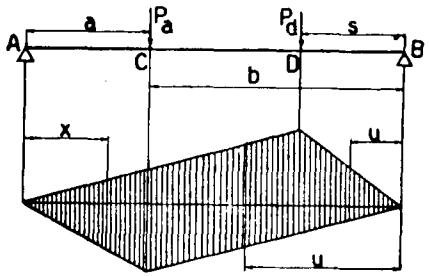
$$(dM_x/dP_c)^2 = \frac{b^2}{l^2}\,x^2;$$

$$(dM_x/dP_c)\,(dM_x/dP_d) = \frac{bs}{l^2}\,x^2$$

$$M_{s<u<b} = P_c\frac{a}{l}\,u + P_d\frac{s}{l}(l-u);$$

$$(dM_u/dP_c)^2 = \frac{a^2}{l^2}\,u^2;$$

$$(dM_u/dP_c)(dM_u/dP_d) = \frac{as(l-u)u}{l^2}$$



Gambar II, 6

$$M_{u<s} = P_c\,\frac{a}{l}\,u + P_d\,\frac{(l-s)}{l}\,u;\quad (dM_u/dP_c)^2 = \frac{a^2}{l^2}\,u^2;$$

$$(dM_u/dP_c)\,(dM_u/dP_d) = \frac{a(l-s)\,u^2}{l^2}$$

$$\delta_{cc} = d^2U/dP_c^2 = \frac{1}{EI}\int(dM/dP_c)^2 = \frac{1}{EI}\left\{\int_o^a (dM_x dP_c)^2\,dx + \int_o^b (dM_u/dP_c)^2\,dx\right\} = \frac{1}{EIl^2}\left(\int_o^a b^2x^2dx + \int_o^b a^2u^2du\right) = a^2b^2/3EI$$

$$\delta_{cd} = \delta_{dc} = d^2U/dP_c dP_d = \frac{1}{EI}\int(dM/dP_c)(dM/dP_d) = \frac{1}{EI\,l^2}\left\{\int_o^a bsx^2\,dx + \int_s^b as(l-u)\,u\,du + \int_o^s a(l-s)\,u^2du\right\} = \frac{a}{6EI\,l}\{b(l+a)s - s^3\}$$

Jika $P_d = 0$ maka $\delta_d = P_c\,\delta_{dc} = P_c\,\dfrac{a}{6EI\,l}\,\{b\,(l+a)\,s - s^3\}$,

lihat Peng. *B* § 5.

Dan apabila s dibuat variabel, ini berarti ordinat garis lentur di bagian kanan P_c sebagai akibatnya.

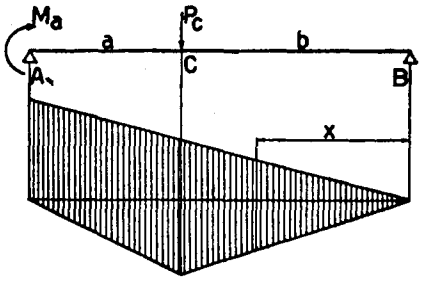
Jika sekarang D diambil di sebelah kiri C sejauh $x \leqq a$, maka dengan cara yang serupa, terdapat :

$$\delta_d = P_c\cdot\frac{b}{6EI\,l}\,\{a(l+b)\,x - x^3\}$$ sedang x variabel.

2. *Putaran ujung akibat beban vertikal.*

Untuk mempelajari putaran sudut pada ujung A, kita mengerjakan momen M_a di situ yang bekerjanya searah

$$M_{x<b} = P_c\frac{a}{l}\,x + M_a\frac{x}{l}$$



Gambar II, 7

$$(dM_x/dP_c)\,(dM_x/dM_a) = \frac{ax^2}{l^2}$$

$$M_{x>b} = P_c\frac{b}{l}\,(l-x) + M_a\frac{x}{l}$$

$$(dM_x/dP_c)\,(dM_x/dM_a) = \frac{b\,(l-x)\,x}{l^2}$$

$$\varphi'_{ac} = \delta'_{ca} = d^2U/dP_c dM_a = \frac{1}{EI\,l^2}\left\{\int_c^b ax^2dx + \int_b^l b\,(l-x)\,x dx = \right.$$

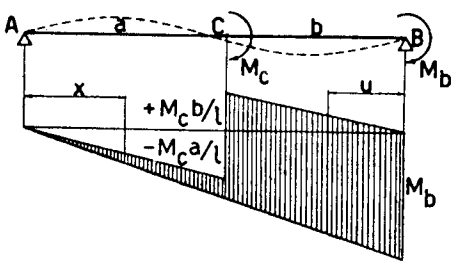
$$= \frac{ab\,(l+b)}{6EI\,l} = \frac{b\,(l^2-b^2)}{6EI\,l}$$

$$\varphi_a = P_c\varphi'_{ac} = P_c\,\frac{ab\,(l+b)}{6EI\,l}$$

Untuk menghitung φ'_{bc} kita mengadakan M_b pada ujung B, dan akan mendapat:

$$\varphi'_{bc} = \frac{ab\,(l+a)}{6EI\,l} = \frac{a\,(l^2-a^2)}{6EI\,l}$$

3. *Putaran ujung akibat momen M_c.*



Gambar II, 8

$$M_{x<a} = -M_c\,\frac{x}{l} + M_b\,\frac{x}{l}.$$

$$(dM_x/dM_c)\,(dM_x/dM_b) = -\frac{x^2}{l^2}$$

$$M_{u<b} = M_c\,\frac{u}{l} + M_b\,\frac{(l-u)}{l}$$

$$(dM_u/dM_c)\,(dM_u/dM_b) = \frac{u\,(l-u)}{l^2}$$

$$\varphi_{bc} = \varphi_{cb} = d^2U/dM_c\,dM_b = \frac{1}{EIl^2}\left\{-\int_o^a x^2\,dx + \int_o^b u\,(l-u)\,du\right\} =$$

$$= \frac{1}{EIl^2}\left(-\tfrac{1}{3}a^3 + \tfrac{1}{2}lb^2 - \tfrac{1}{3}b^3\right) = \frac{1}{6EI\,l}\,(l^2-3a^2)$$ menurut arah M_b.

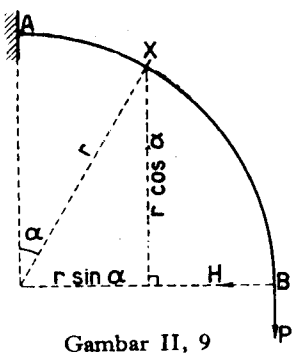
Dengan cara analogos terdapat

$$\varphi_{ac} = \varphi_{ca} = \frac{1}{6EI\,l}\,(l^2-3b^2)$$ menurut arah M_a (ke kiri)

C. Cara dengan mengadakan gaya fiktif.

Di dalam contoh-contoh di atas tersimpul, bahwa untuk menghitung lenturan atau putaran, kita mengadakan kekuatan atau momen yang selaras, yang nilainya

pada akhirnya tidak dipakai lagi, atau diberi nilai nol. Cara ini dapat diperlihatkan di dalam contoh lain.



Gambar II, 9

Batang AB berbentuk seperempat lingkaran (EI tetap) terjepit di A sehingga terletak di dalam bidang vertikal. Ujung B dibebani vertikal sebesar P.

Berapakah peralihannya ujung B ?

Titik B beralih secara vertikal (δ_v) dan mendatar (δ_h). untuk mempelajari yang terakhir ini, kita mengadakan gaya fiktif mendatar H di B.

$$M_x = Pr\,(1-\sin\alpha) + Hr\cos\alpha$$

$$(dM_x/dP)^2 = r^2\,(1-\sin\alpha)^2;$$

$$(dM_x/dP)\,(dM_x/dH) = r^2\,(1-\sin\alpha)\cos\alpha;\quad (dM_x/dH)^2 = r^2\cos^2\alpha.$$

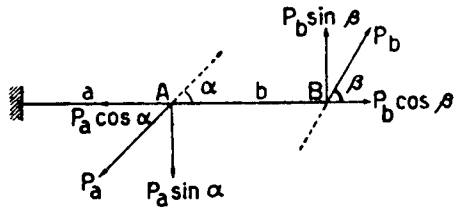
$$\delta_{vv} = d^2U/dP^2 = \frac{r^3}{EI}\int_o^{\frac{1}{2}\pi}(1-\sin\alpha)^2\,dx = \frac{(3\pi-8)\,r^3}{4EI}$$

$$\delta_{vh} = \delta_{hv} = d^2U/dP.dH = \frac{r^3}{EI}\int_o^{\frac{1}{2}\pi}(1-\sin\alpha)\cos\alpha\,d\alpha = \frac{r^3}{2EI}$$

$$\delta_{hh} = d^2U/dH^2 = \frac{r^3}{EI}\int_o^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2\alpha\,d\alpha = \frac{\pi\,r^3}{4EI}$$ (ini dipakai jika memang ada gaya mendatar di B).

$$\delta_v = P.\delta_{vv}\ ;\quad \delta_h = P.\delta_{hv}$$

§ 6. **P_a dan P_b bekerjanya tak vertikal.**
Akibat kekuatan-normal diabaikan.



Gambar II, 10

$$\delta_{aa} - \text{vertikal} = \tfrac{1}{3}\,\frac{a^3}{EI}.\sin\alpha$$

$$\delta_{aa} = (\delta_{aa} - \text{vertikal})\sin\alpha =$$

$$= \tfrac{1}{3}\,\frac{a^3}{EI}\sin^2\alpha$$

$$\delta_{ba} \text{ — vert.} = -\left(\tfrac{1}{3}\frac{a^3}{EI} + \tfrac{1}{2}\frac{a^2 b}{EI}\right)\sin\alpha$$

$$\delta_{ba} = (\delta_{ba} \text{ — vert.})\sin\beta = -\left(\tfrac{1}{3}\frac{a^2}{EI} + \tfrac{1}{2}\frac{a^2 b}{EI}\right)\sin\alpha\sin\beta$$

$$\delta_{bb} = \tfrac{1}{3}\frac{l^3}{EI}\cdot\sin^2\beta$$

$$\delta_{ab} \text{ — vert.} = -\left(\tfrac{1}{3}\frac{a^3}{EI} + \tfrac{1}{2}\frac{a^2 b}{EI}\right)\sin\beta$$

$$\delta_{ab} = (\delta_{ab} \text{ — vert.})\sin\alpha = -\left(\tfrac{1}{3}\frac{a^3}{EI} + \tfrac{1}{2}\frac{a^2 b}{EI}\right)\sin\alpha\sin\beta = \delta_{ba}$$

Jika akibat kekuatan-normal juga diperhitung:

$$\delta_{aa}\text{-mendatar} = a\cos\alpha/EF$$

$$\delta_{aa} = (\delta_{aa} \text{ — vert.})\sin\alpha + (\delta_{aa} \text{ — mend.})\cos\alpha = \tfrac{1}{3}a^3\sin^2\alpha/EI + a\cos^2\alpha/EF$$

$$\delta_{ba} = \div\,(\tfrac{1}{3}a^3 + \tfrac{1}{2}a^2 b)\sin\alpha\sin\beta/EI + a\cos\alpha\cos\beta/EF$$

$$\delta_{bb} = \tfrac{1}{3}l^3\sin^2\beta/EI + \cos^2\beta/EF$$

§ 7. **Penggunaan.**

a. **Bangunan statis tak tertentu tunggal.**

1. *Reaksi statis tak tertentu adalah gaya-kekuatan X.* Di titik-titik 1, 2, 3, ...*n* bekerjalah kekuatan-kekuatan-luar : P_1, P_2, P_3, ... P_n. Jika reaksi X dihapuskan (bangunan menjadi statis tertentu) titik-pegangannya akan beralih sejauh

$$\Sigma P.\,\delta_x = P_1\delta_{x1} + P_2\delta_{x2} + P_3\delta_{x3} + \ldots . P_n\delta_{xn}$$

ke arah berlawanan dengan arah-kerja X. Kekuatan X yang kemudian diadakan kembali berhasrat memindahkan titik-pegangannya ke arah kerjanya sejauh $X\delta_{xx}$. Supaya titik-pegangan tadi tak beralih, maka harus : $X.\delta_{xx} = \Sigma P.\delta_x$.

$$X = \Sigma P.\delta_x./\delta_{xx}$$

Sebelumnya, kita harus menghitung nilai-nilai δ_{xk} yaitu δ_{x1}, δ_{x2}, δ_{x3} . . δ_{xn}) dan δ_{xx} pada bangunan yang statis tertentu yaitu yang terjadi jika gaya kelebihan X dihapuskan).

Kita juga boleh menggunakan hukum Castigliano. Sebagai akibat dari muatan-muatan luar dan segala reaksi-reaksi-perletakan beserta juga gaya X, maka sesuatu tampang S pada bangunan menahan : momen M kekuatan-normal N_s dan kekuatan-melintang Q_s. Jumlah pekerjaan robahan-bangun adalah $U = \int M_s^2\,ds/2EI + \int N_s^2\,ds/2EF + \int Q_s^2\,ds/2GF'$. Menurut hukum Castigliano tadi, peralihan tempat titik-pegangan kekuatan X terdapat dU/dX. Akan tetapi titik-pegangan X ini tak boleh beralih atau harus bernilai nol.

Jadi $dU/dX = 0$. Kita mendifferensi di bawah tanda-integral.

$$\int \frac{M_s}{EI}\cdot\frac{dM_s}{dX}\,ds + \int \frac{N_s}{EF}\,\frac{dN_s}{dX}\,ds + \int \frac{Q_s}{GF'}\,\frac{dQ_s}{dX}\,ds = 0$$

M_s, N_s dan Q_s itu biasanya funksi X, yang dapat di-differensi.

2. *Gaya statis kelebihan adalah gaya-momen X.*

$$X.\varphi_{xx} = \Sigma P.\varphi_x' = P_1\varphi_{x1}' + P_2\varphi_{x2}' + P_3\varphi_{x3} + \ldots . P_n\varphi_{xn}$$

$$X = \Sigma P.\varphi_x'./\varphi_{xx}$$

Jadi yang kita pelajari di sini ialah *putaran-sudut* pegangan X. Tentu saja, hukum Castigliano juga berlaku di sini.

b. **Statis tak tertentu berlipat dua**, dengan X_a dan X_b sebagai gaya statis kelebihan.

$$X_a\delta_{aa} + X_b\delta_{ab} = \Sigma P.\delta_a = P_1\delta_{a1} + P_2\delta_{a2} + \ldots . P_n\delta_{an}$$

$$X_a\delta_{ba} + X_b\delta_{bb} = \Sigma P.\delta_b = P_1\delta_{b1} + P_2\delta_{b2} + \ldots . P_n\delta_{bn}$$

Jadi 2 persamaan dengan 2 besaran tak terketahui. Menurut Castigliano : $dU/dX_a = 0$ dan $dU/dX_b = 0$.

c. **Statis tak tertentu berlipat k**, dengan X_a, X_b, X_c . . . . . X_k

$$X_a\delta_{aa} + X_b\delta_{ab} + X_c\delta_{ac} + \ldots . X_k\delta_{ak} = \Sigma P.\delta_a$$
$$X_a\delta_{ba} + X_b\delta_{bb} + X_c\delta_{bc} + \ldots . X_k\delta_{bk} = \Sigma P.\delta_b$$
$$X_a\delta_{ca} + X_b\delta_{cb} + X_c\delta_{cc} + \ldots . X_k\delta_{ck} = \Sigma P.\delta_c$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_a\delta_{ka} + X_b\delta_{kb} + X_c\delta_{kc} + \ldots . X_k\delta_{kk} = \Sigma P.\delta_k$$

Kita mendapat k persamaan dengan k besaran tak terketahui. Menurut Castigliano : $dU/dX_a = 0$; $dU/dX_b = 0$; . . $dU/dX_k = 0$.

§ 8. Kesalahan di dalam konstruksi.

Meskipun bangunan tidak menahan muatan-luar, ada kemungkinan bahwa di dalam konstruksi tertimbul tegangan-tegangan yang menyebabkan adanya reaksi-reaksi-kelebihan. Kejadian ini dapat disebabkan oleh kesalahan di dalam me - nyelenggarakan bangunan (salah "stellan") atau perbedaan derajat-panas di pelbagai bagian-bagian-konstruksi.

Sebagai umpama, titik-pegangan reaksi X_a mendapat salah-stellan a cm; titik-pegangan X_b, b cm dst. Jika reaksi-reaksi X_a, X_b, ... X_k dihapuskan, titik-titik-pegangannya beralih sejauh berturut-turut a cm, b cm, ... k cm, menurut garis-kerja reaksi-reaksi tersebut. Nilai-nilai a, b, ... k dianggap *positif*, apabila arahnya ini *berlawanan* dengan arah kerja reaksi yang bersangkutan.

Persamaan-persamaan robahan-bangun terdapat :

$$\begin{aligned} X_a\delta_{aa} + X_b\delta_{ab} + X_c\delta_{ac} + \ldots . X_k\delta_{ak} &= a \\ X_b\delta_{ba} + X_b\delta_{bb} + X_c\delta_{bc} + \ldots . X_k\delta_{bk} &= b \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ X_a\delta_{ka} + X_b\delta_{kb} + X_c\delta_{kc} + \ldots . X_k\delta_{kk} &= k \end{aligned}$$

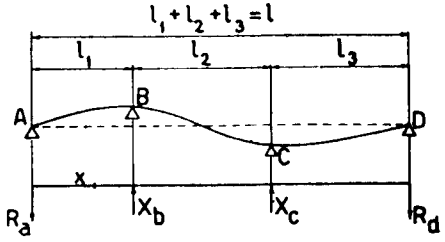
Nilai-nilai X yang terdapat ini ialah reaksi-reaksi kelebihan sebagai akibat dari salah-stellan saja, ini harus ditambahkan nanti dengan pendapat-pendapat yang diakibatkan oleh muatan-muatan-luar.

Dengan mempergunakan hukum Castigliano kita mendapat :

$$dU/dX_a = a;\ dU/dX_b = b; \ldots . dU/dX_k = k.$$

Sebagai contoh kita ambil balok di atas empat titik-perletakan-bebas : A, B, C dan D dengan EI tetap. Perletakan B letaknya terlalu tinggi b cm dan perletakan C terlalu rendah c cm. Sebagai statis kelebihan diambil reaksi-reaksi perletakan X_b dan X_c.

Apabila titik-titik perletakan B dan C dihilangi, titik B akan turun b cm dan titik C naik c cm atau turun $-c$ cm. X_b dan X_c dianggap positif jika arah kerjanya ke atas, jadi perkataan turun berarti arah berlawanan dengan arah kerja ini.



Gambar II, 11

$$\begin{aligned} X_b\delta_{bb} + X_c\delta_{bc} &= b \\ X_b\delta_{cb} + X_c\delta_{cc} &= -c \end{aligned}$$

Dengan hukum Castigliano :

Kita hanya memperhitung robahan-bangun yang disebabkan oleh lengkungan (jadi oleh momen), akibat-akibat dari kekuatan-kekuatan normal dan melintang jadi kita abaikan.

Kekuatan-kekuatan X_b dan X_c (ke atas arahnya) menimbulkan.

$$R_a = \div \frac{1}{l}\{X_b(l_2 + l_3) + X_c l_3\} \text{ dan } R_d = \div \frac{1}{l}\{X_b l_1 + X_c(l_1 + l_2)\}$$

Untuk titik sejauh $x < l_1$ dari A terdapat:

$$M_x = R_a.x = \div \frac{x}{l}\{X_b(l_2 + l_3) + X_c l_3\}$$

$$dM_x/dX_b = \div \frac{x}{l}(l_2 + l_3);\ dM_x/dX_c = \div \frac{x}{l}.l_3$$

Untuk $l_1 < x < (l_1 + l_2)$,

$$M_x = R_a x + X_b(x - l_1) = \div \frac{x}{l}\{X_b(l_2 + l_3) + X_c l_3\} + X_b(x - l_1)$$

$$dM_x/dX_b = -\frac{x}{l}(l_2 + l_3) + (x - l);\ dM_x/dX_c = -\frac{x}{l}l_3$$

Untuk $(l_1 + l_2) < x < (l_1 + l_2 + l_3)$,

$$M_x = R_d(l_1 + l_2 + l_3 - x) = -\frac{(l - x)}{l}\{X_b l_1 + X_c(l_1 + l_2)\}$$

$$dM_x/dX_b = -\frac{(l - x)}{l}l_1;\ dM_x/dX_c = -\frac{(l - x)}{l}(l_1 + l_2)$$

$$U = \int M_x^2 dx/2EI$$

$$dU/dX_b = \frac{1}{EI}\int M_x \frac{dM_x}{dX_b}dx = b \text{ atau } \int M_x \frac{dM_x}{dX_b}dx = EIb \ldots (1)$$

$$dU/dX_c = \frac{1}{EI}\int M_x \frac{dM_x}{dX_c}dx = -c \text{ atau } \int M_x \frac{dM_x}{dX_c}dx = -EIc \ldots . (2)$$

$$\int_o^{l_1} \frac{x}{l}\{X_b(l_2+l_3)+X_c l_3\}\frac{x}{l}(l_2+l_3)dx+\int_{l_1}^{l_1+l_2}\left[\frac{x}{l}\{X_b(l_2+l_3)+X_c l_3\}-X_b(x-l_1)\right]\left\{\frac{x}{l}(l_2+l_3)-(x-l_1)\right\}dx+$$

$$+\int_{l_1+l_2}^{l}\frac{(l-x)}{l}\{X_b l_1+X_c(l_1+l_2)\}\frac{(l-x)}{l}l_1.dx=EIb \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\int_o^{l_1}\frac{x}{l}\{X_b(l_2+l_3)+X_c l_3\}\frac{x}{l}l_3dx+\int_{l_1}^{l_1+l_2}\left[\frac{x}{l}\{X_b(l_2+l_3)+X_c l_3\}-X_b(x-l_1)\right]\frac{x}{l}l_3dx+\int_{l_1+l_2}^{l}\frac{(l-x)}{l}\{X_b l_1+X_c(l_1+l_2)\}\frac{(l-x)}{l}(l_1+l_2)dx=-EIc \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

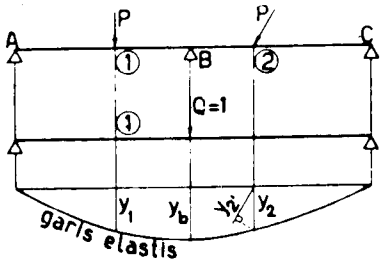
§ 9. Garis-elastis sebagai garis-pengaruh.

Sebagai contoh kita ambil balok terusan di atas 3 titik-perletakan A, B dan C dan reaksi-perletakan B dianggap sebagai gaya kelebihan.

Perletakan B kita hapuskan dan kita mengadakan muatan $Q = 1$. di titik B, yang arah kerjanya *berlawanan* dengan reaksi B. Kita juga boleh mengatakan bahwa kita mengadakan kekuatan $B = -1$, dan menghilangi perletakan B itu berarti menghapuskan kemungkinan bekerjanya reaksi B. Kemudian kita melukiskan garis-elastis balok AC sebagai akibat dari muatan $Q = 1$ (atau $B = -1$) di titik B tadi (susunan statis tertentu).

Ordinat garis-elastis di titik B ada $y_b = Q.\delta_{bb} = \delta_{bb}$. Ordinat pada sesuatu titik 1 ada $y_1 = Q.\delta_{1b} = \delta_{1b}$. jika Q dipindah di titik 1, maka titik B akan turun sejauh $Q\delta_{b1} = \delta_{b1} = \delta_{1b} = y_1$ (hk-Maxwell) Supaya titik B tak akan turun (tak beralih), jika dititik 1 nanti berdiri muatan P, maka kita memerlukan kekuatan B yang ke atas arahnya sehingga

$$B\delta_{bb} = P\delta_{b1} = P\delta_{1b} = Py_1$$
$$By_b = Py_1$$
$$B = P.y_1/y_b$$

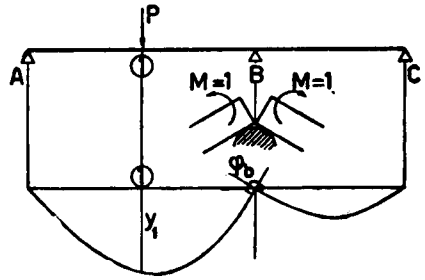


Gambar II, 12

Di sini y_b dan P itu besaran yang tetap, jadi B itu bertanding lurus dengan y_1 atau dengan lain perkataan : Nilai reaksi B sebagai akibat dari muatan yang berdiri di titik 1 itu dapat dilukiskan oleh ordinat garis-elastis di titik 1 tersebut, (di mana muatan berdiri) pada balok AC yang di titik B dimuati dengan kekuatan Q yang besarnya kita tentukan sendiri (misalnya $Q = 1$ ton). Jadi *garis-pengaruh* reaksi B dapat dilukiskan oleh garis-elastis tersebut.

Dengan tidak diterangkan, arah-arah kekuatan Q dan P di atas tadi diambil vertikal. Apabila arah muatan P tidak vertikal (lihat titik 2), kita mengambil proyeksi ordinat garis-elastis menurut arah kerja muatan P ini (garis y'_2 digambar II, 12) dan terdapat $B = P.\ y'_2/y_b$.

Sekarang sebagai reaksi statis tak tertentu kita pilih momen pada balok di titik B (disebut momen-peralihan), yang kita namakan M_b. Balok kita potong di tampang B (jadi menghapuskan kemungkinan bekerjanya M_b) dan di kedua-dua ujung potongan ini kita mengadakan momen $M = 1$, yang arah kerjanya berlawanan dengan M_b (atau mengadakan $M_b = -1$). Kemudian menggambar garis-elastis balok-balok AB dan BC sebagai akibat momen $M = 1$ ini.



Supaya mendapat gambar yang terang, ordinat-ordinat garis-elastis ini dilipatkan dengan faktor EI_o di mana I_o itu momen inersia pada sesuatu tampang (di sini dianggap bahwa EI-balok tak tetap).

Kedua-dua ujung potongan tadi akan *berputar sudut* terhadap satu sama lain sebesar $\varphi_b = M\varphi_{bb} = \varphi_{bb}$. Sesuatu titik 1 (di mana nanti muatan P akan berdiri) akan turun sejauh $y_1 = M\delta'_{1b} = \delta'_{1b}$. Setelah menghilangkan momen $M = 1$ tadi, dan mengadakan muatan P di titik 1, maka putaran sudut pada ujung-potongan terdapat $P\varphi'_{b1}$ dan oleh karena menurut hukum Maxwell $\varphi'_{b1} = \delta'_{1b}$, juga boleh ditulis $P\delta'_{1b} = Py_1$. Supaya balok menjadi utuh lagi (membatalkan putaran sudut atau keadaan rengat pada tampang B) maka kita harus mengadakan momen M_b di B supaya

$$M_b\varphi_{bb} = Py_1$$
$$M_b\varphi_b = Py_1$$
$$M_b = Py_1/\varphi_b,$$ di mana P dan $\varphi_b = \varphi_{bb}$ bernilai tetap.

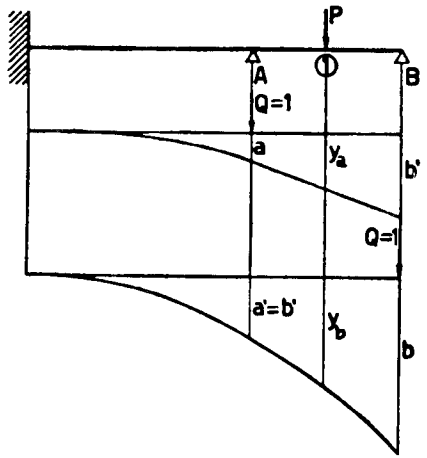
Jadi M_b bertanding lurus dengan y_1 = ordinat garis-elastis di tempat muatan P pada potongan-potongan balok AB dan BC jika di ujung-ujung potongan diadakan momen yang bernilai tertentu (misalnya = 1). Atau juga, *garis-pengaruh* M_b dapat dilukiskan dengan garis-elastis tersebut.

Dari apa yang diuraikan di atas tadi, kita dapat menarik kesimpulan demikian :

Untuk menentukan *garis-pengaruh* sesuatu gaya kelebihan, kita menghapuskan kemungkinan bekerjanya dan kemudian melukiskan *garis-elastis* pada bangunan dengan secara mengadakan suatu gaya tertentu (misalnya = 1) di titik bekerjanya gaya kelebihan tadi, yang arah kerjanya berlawanan dengan padanya.

Hukum ini berguna sekali untuk meraba dengan cepat bagaimana perjalanannya garis-pengaruh sesuatu gaya statis tak tertentu, sebab perjalanan garis-elastis itu mudah sekali melukiskannya menurut perasaan.

§ 10. Garis-elastis pada bangunan statis tak tertentu berlipat dua.



Sebagai contoh, balok tercepit sebelah serta diletakkan di atas dua titik-perletakan A dan B. Sebagai reaksi-reaksi kelebihan kita ambil reaksi-reaksi-perletakan di A dan di B, yaitu X_a dan X_b. Kita menghilangi perletakan-perletakan A dan B (menghapuskan kemungkinan bekerjanya X_a dan X_b) dan melukiskan garis-garis-elastis pada balok tercepit sebelah sebagai akibat muatan Q=1 di atas titik A (X_a = —1) dan sebagai akibat muatan Q=1 di atas titik B (X_b = —1). Ordinat titik 1 pada garis-elastis pertama (akibat X_a = —1) ada y_a dan pada garis-elastis kedua (akibat X_b = —1) ada y_b.

$$a = Q\delta_{aa} = \delta_{aa} \qquad a' = Q\delta_{ab} = \delta_{ab}$$
$$y_a = Q\delta_{1a} = \delta_{1a} \qquad y_b = Q\delta_{1b} = \delta_{1b}$$
$$b' = Q\delta_{ba} = \delta_{ba} \qquad b = Q\delta_{bb} = \delta_{bb}$$

Jika nanti di titik 1 berdiri muatan P, maka titik A akan turun sejauh

$$P\delta_{a1} = P\delta_{1a} = P.y_a$$

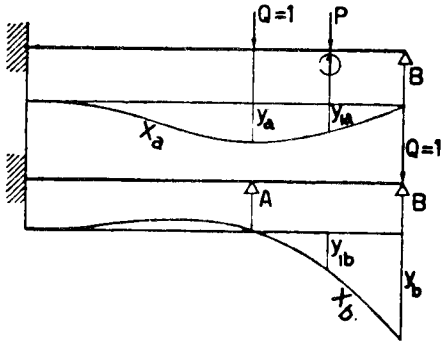
dan titik B turun sejauh $P\delta_{b1} = P\delta_{1b} = P.y_b$.

Mempergunakan persamaan-persamaan di dalam § 7, *b* :

$$X_a\delta_{aa} + X_b\delta_{ab} = P\delta_{a1} \qquad X_a.a + X_b.a' = P.y_a$$
$$X_a\delta_{ba} + X_b\delta_{bb} = P\delta_{b1} \qquad X_b.b' + X_b.b = P.y_b$$

Besaran-besaran a, a' b, b', y_a dan y_b dapat dibaca pada lukisan garis-garis elastis tersebut.

Untuk melukiskan garis-pengaruh X_a, kita hanya menghapuskan kemungkinan bekerjanya X_a saja (menghilangi perletakan A saja) dan kemudian melukiskan garis-elastis sebagai akibat muatan Q = 1 di titik A (X_a = 1). Akan tetapi harus diingat, bahwa susunan masih statis tak tertentu (yaitu tunggal) dan berhubung dengan ini menggambarnya garis-elastis dengan saksama tak dapat tercapai begitu saja, seperti keadaan di § 9. Meskipun begitu, ini tak dipentingkan, sebab kita bermaksud akan meraba saja bagaimana perjalanannya garis-pengaruh X_a.



Gambar II, 15.

$$y_a = \delta_{aa}; \quad y_{1a} = \delta_{1a}$$

Muatan P menurunkan titik A sejauh $P\delta_{a1} = P\delta_{1a} = Py_{1a}$.

$X_a\delta_{aa} = P\delta_{a1}$; $X_a = P\delta_{a1}/\delta_{aa} = P.\delta_{1a}/y_a$ jadi bertanding lurus dengan y_a atau ordinat garis-elastis dititik 1 (dimana P berdiri).

Garis-pengaruh X_b dilukiskan oleh garis-elastis pada bangunan setelah perletakan B dihapuskan serta mengadakan muatan Q = 1 di situ. Menurut perjalanan garis-elastis ini, dapat diduga bahwa X_b bernilai negatif apabila muatan berdiri di sebelah kiri A.

Di tempat cepitan, garis-elastis harus menyinggung pada sumbu balok asli.

B. FAKTOR PENGARUH-DALAM

§ 11. Pengertian.

Sesuatu gaya (kekuatan atau momen) menimbulkan pada sesuatu tampang S : momen-lengkung M_s, kekuatan-normal N_s, kekuatan-melintang Q_s dan momen-torsi T_s. Nilai-nilai gaya-gaya yang tertimbul ini hanya tergantung pada besarnya gaya yang menimbulkan tadi dan kedudukan tampang S itu serta corak konstruksi. Jadi boleh dikatakan bertanding lurus dengan gaya yang menimbulkan itu.

Faktor-pertandingan terhadap momen-lengkung kita namakan α_m, terhadap kekuatan-normal kita sebut α_n, terhadap kekuatan-melintang α_q dan terhadap momen-torsi α_t. Oleh karena M, N, Q dan T itu gaya-dalam (bekerja pada tampang bangunan), maka faktor-faktor ini dinamakan *faktor pengaruh-dalam.* Jadi gaya-kekuatan $P = 1$ akan menimbulkan :

$$M_s = \alpha_m,\ N_s = \alpha_n,\ Q_s = \alpha_q \quad \text{dan} \quad T_s = \alpha_t.$$

Robahan-robahan bangun pada tampang S menjadi :

putaran-sudut	$d\varphi = M_s ds/EI = \alpha_m . ds/EI$
robahan-panjang	$dn = N_s ds/EF = \alpha_n . ds/EF$
geseran	$dg = Q_s ds/GF' = \alpha_q . ds/GF'$
torsi atau pilin	$d\psi = T_s ds/GI'_p = \alpha_t . ds/GI'_p$

GF' = keteguhan melawan geseran dan GI'_p = keteguhan melawan torsi. Tentang arti F' dan I'_p akan diterangkan di bab-bab yang akan datang (lihat juga: pengantar).

Sebaliknya (menurut hukum Maxwell) akan terdapat:

M_s = 1 memindahkan titik-pegangan kekuatan P sejauh $\alpha_m ds/EI$
N_s = 1 memindahkan titik-pegangan kekuatan P sejauh $\alpha_n ds/EF$
Q_s = 1 memindahkan titik-pegangan kekuatan P sejauh $\alpha_q ds/GF'$
T_s = 1 memindahkan titik-pegangan kekuatan P sejauh $\alpha_t ds/GI'_p$

Seperti diuraikan di atas, P = 1 menimbulkan $M_s = \alpha_m$, $N_s = \alpha_n$ $Q_s = \alpha_q$ dan $T_s = \alpha_t$

$M_s = \alpha_m$ memindahkan titik-pegangan kekuatan P sejauh $\alpha_m^2 ds/EI$
$N_s = \alpha_n$ memindahkan titik-pegangan kekuatan P sejauh $\alpha_n^2 ds/EF$
$Q_s = \alpha_q$ memindahkan titik-pegangan kekuatan P sejauh $\alpha_q^2 ds/GF'$
$T_s = \alpha_t$ memindahkan titik-pegangan kekuatan P sejauh $\alpha_t^2 ds/GI'_p$

Arah peralihan-titik pegangan P ini searah dengan garis kerjanya P sendiri.

Peralihan titik pegangan P yang disebabkan oleh gaya-gaya di tampang S ini menjadi $d\delta_p = \alpha_m^2 ds/EI + \alpha_n^2 ds/EF + \alpha_q^2 ds/GF' + \alpha_t^2 ds/GI'_p$. oleh karena P itu menimbulkan gaya-gaya tidak hanya di tampang S ini saja melainkan di semua tampang pada bangunan seluruhnya maka peralihan titik-pegangan P menjadi :

$$\delta_p = \int d\delta_p = \int \alpha_m^2 ds/EI + \int \alpha_n^2 ds/EF + \int \alpha_q^2 ds/GF' + \int \alpha_t^2 ds/GI'_p = \Sigma \int \alpha^2 . dw$$

Oleh karena $\delta_p = P.\delta_{pp} = 1.\delta_{pp} = \delta_{pp}$, maka hasil di atas ini berarti pula

$$\delta_{pp} = \int \alpha_m^2 ds/EI + \int \alpha_n^2 ds/EF + \int \alpha_q^2 ds/GF' + \int \alpha_t^2 ds/GI'_p = \Sigma \int \alpha^2 . dw$$

§ 12. Penggunaan pada statis tak tertentu tunggal.

Gaya kelebihan adalah X. Kita anggap $X = 1$ (jadi gaya = 1 yang arah kerjanya berlawanan dengan X) menimbulkan pada sesuatu tampang S: momen $M_s = \alpha_m$; kekuatan-normal $N_s = \alpha_n$ dan kekuatan-geser (melintang) $Q_s = \alpha_q$ (biasanya, bangunan itu tak menahan torsi). Di dalam susunan statis-tertentu (yaitu setelah kemungkinan bekerjanya X itu dihapuskan) muatan-muatan-luar menimbulkan pada tampang S tersebut momen sebesar M_s°, kekuatan-normal = N_s° dan kekuatan-melintang = Q_s° (gaya-gaya ini mudah didapatkannya). Gaya-gaya pada tampang S ini berkehendak memindah titik-pegangan X sejauh :

$$-\alpha_m M_s^\circ ds/EI - \alpha_n N_s^\circ ds/EF - \alpha_q Q_s^\circ ds/GF'$$

Di sini kita memakai tanda-minus, oleh karena sebagai dasar ukuran diambil gaya $X = -1$. Untuk seluruh bangunan menjadi terdapat, bahwa titik-pegangan X sebagai akibat dari muatan akan beralih sejauh

$$-(\int \alpha_m M_s^\circ ds/EI + \int \alpha_n N_s^\circ ds/EF + \int \alpha_q Q_s^\circ ds/GF').$$

Supaya titik-pegangan X tidak beralih, gaya X harus mencapai nilai supaya : jumlah peralihan titik-pegangan X sebagai akibat dari muatan-luar dan dari X sendiri bernilai nol, jadi :

$$-(\int \alpha_m M_s^\circ ds/EI + \int \alpha_n N_s^\circ ds/EF + \int \alpha_q Q_s^\circ ds/GF') + X(\int \alpha_m^2 ds/EI + \int \alpha_n^2 ds/EF + \int \alpha_q^2 ds/GF') = 0$$

$$X = \frac{\int \alpha_m M_s^\circ ds/EI + \int \alpha_n N_s^\circ ds/EF + \int \alpha_q Q_s^\circ ds/GF'}{\int \alpha_m^2 ds/EI + \int \alpha_n^2 ds/EF + \int \alpha_q^2 ds/GF'} =$$

$$= \frac{\int \alpha_m M_s^o ds/EI + \int \alpha_n N_s^o ds/EF + \int \alpha_q Q_s^o ds/GF'}{\Sigma \int \alpha^2 dw}$$

Hasil ini juga dapat tercapai menurut perjalanan demikian. Gaya X menimbulkan pada tampang S : momen sebesar $-\alpha_m X$, kekuatan-normal sebesar $-\alpha_n X$ dan kekuatan-melintang sebesar $-\alpha_q X$.

Besaran-besaran ini ditambahkan (di-superposisi) pada gaya-gaya tampang yang diakibatkan oleh muatan-luar pada susunan statis tertentu menghasilkan :

$$M_s = M_s^o - \alpha_m X,\ N_s = N_s^o - \alpha_n X \text{ dan } Q_s = Q_s^o - \alpha_q X$$

Gaya-gaya tampang ini akan memindah titik-pegangan X sejauh

$$d\delta_x = -\alpha_m M_s ds/EI - \alpha_n N_s ds/EF - \alpha_q Q_s^o ds/GF'$$

Jumlah peralihan titik-pegangan X menjadi $\int d\delta_x$ yang harus = o

$$-(\int \alpha_m M_s ds/EI + \int \alpha_n N_s ds/EF + \int \alpha_q Q_s ds/GF') = 0$$

$$\int \alpha_m (M_s^o - \alpha_n X) ds/EI + \int \alpha_n (N_s^o - \alpha_n X) ds/EF + \int \alpha_q (Q_s^o - \alpha_q X) ds/GF' = 0$$

$$X = \frac{\int \alpha_m M_s^o ds/EI + \int \alpha_n N_s^o ds/EF + \int \alpha_q Q_s^o ds/GF'}{\int \alpha_m^2 ds/EI + \int \alpha_n^2 ds/EF + \int \alpha_q^2 ds/GF'}$$

Juga boleh mempergunakan hukum Castigliano:

$$U = \int M_s^2 ds/2EI + \int N_s^2 ds/2EF + \int Q_s^2 ds/GF'$$

$$dU/dX = 0$$

$$\int M_s \frac{dM_s}{dX}\frac{ds}{EI} + \int N_s \frac{dN_s}{dX}\frac{ds}{EF} + \int Q_s \frac{dQ_s}{dX}\frac{ds}{GF'} = 0,$$

$$\text{sedang } \frac{dM_s}{dX} = -\alpha_m;\ \frac{dN_s}{dX} = -\alpha_n \text{ dan } \frac{dQ_s}{dX} = -\alpha_q$$

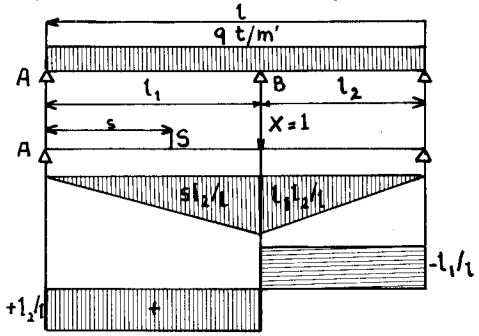
$$-\int (M_s^o - \alpha_m X)\alpha_m ds/EI - \int (N_s^o - \alpha_n X)\alpha_n ds/EF - \int (Q_s^o - \alpha_q X)\alpha_q ds/GF' = 0$$

$$X = \frac{\int \alpha_m M_s^o ds/EI + \int \alpha_n N_s^o ds/EF + \int \alpha_q Q_s^o ds/GF'}{\int \alpha_m^2 ds/EI + \int \alpha_n^2 ds/EF + \int \alpha_q^2 ds/GF'}$$

§ 13. Beberapa contoh.

1. Balok prismatis (dengan EI, EF dan GF' tetap) di atas 3 perletakan dimuati penuh terbagi rata q t/m'.

a. Gaya kelebihan ialah reaksi-perletakan tengah, jadi $X = B$ (gb. II, 16).



Gambar II, 16

Perletakan B dihapuskan dan mengadakan di situ kekuatan = 1 ke bawah arahnya, jadi mengerjakan $X = -1$. Garis-momen dan garis kekuatan-melintang sebagai akibatnya dilukiskan pula (susunan balok di atas 2 perletakan, AC).

Untuk titik-titik S sejauh $s < l_1$ dari A terdapat $\alpha_m = sl_2/l$; $\alpha_q = +l_2/l$; $\alpha_n = 0$.

Untuk titik S sejauh $s > l_1$ dari A terdapat $\alpha_m = (l-s)\,l_1/l$;

$$\alpha_q = -l_1/l;\ \alpha_n = 0$$

$$M_s^o = \tfrac{1}{2}qls - \tfrac{1}{2}qs^2 = \tfrac{1}{2}q(ls - s^2)$$

$$Q_s^o = \tfrac{1}{2}ql - qs = q(\tfrac{1}{2}l - s)$$

$$N_s^o = 0$$

$$X = \frac{\int_o^{l_1} (sl_2/l)\tfrac{1}{2}q(ls - s^2)ds/EI + \int_{l_1}^{l} \{(l-s)l_1/l\}\tfrac{1}{2}q(ls - s^2)ds/EI + \cdots\cdots}{\int (sl_2/l)^2 ds/EI + \int \{(l-s)l_1/l\}^2 ds/EI + \int (l_2/l)^2 ds/GF' + \cdots\cdots}$$

$$\cdots\cdots + \int_o^{l_1} (l_2/l)q(\tfrac{1}{2}l - s)ds/GF' + \int_{l_1}^{l} (-l_1/l)q(\tfrac{1}{2}l - s)ds/GF'$$

$$\cdots\cdots + \int (l_1/l)^2 ds/GF'$$

$$X = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2}q\int_o^{l} sl_2(ls - s^2)ds/EIl + \tfrac{1}{2}q\int_{l_1}^{l} (l-s)l_1(ls - s^2)ds/EIl +$$

$$+ q \int_o^{l_1} l_2(\tfrac{1}{2}l - s)ds/GF'l - q\int_{l_1}^{l} l_1(s - \tfrac{1}{2}l)ds/GF'l =$$

$$= q\left(\frac{l_1l_2(l_1^2 + l_2^2)}{6EI} - \frac{l_1l_2(l_1^3 + l_2^3)}{8EIl} + \frac{l_1l_2(l_2 - l_1)}{2GF'l}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}ql_1l_2\left(\frac{l_1^2 + l_2^2}{3EI} - \frac{l_1^3 + l_2^3}{4EIl} + \frac{l_2 - l_1}{GF'l}\right)$$

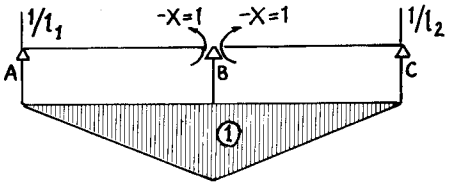
$$\beta = \int_o^{l_1} s^2l_2^2ds/EIl^2 + \int_{l_1}^{l}\{(l - s)l_1\}^2ds/EIl^2 + \int_o^{l_1} l_2^2ds/GF'l^2 +$$

$$+ \int_{l_1}^{l_2} l_1^2ds/GF'l^2 = \frac{l_1^2l_2^2}{3EIl} + \frac{l_1l_2}{GF'l} = \frac{l_1l_2}{l}\left(\frac{l_1l_2}{3EI} + \frac{l}{GF'}\right)$$

Selanjutnya dengan EI/GF' = k tercapailah:

$$X = \tfrac{1}{2}q\{\tfrac{1}{8}(l_1^2 + l_2^2)\,l - \tfrac{1}{4}(l_1^3 + l_2^3) + k(l_2 - l_1)\} / (\tfrac{1}{3}l_1l_2 + k)$$

b. Sebagai gaya statis tak tertentu kita ambil momen peralihan di atas perletakan *B*, jadi $X = M_b$. Arah kerja momen peralihan itu negatif, sebab berhasrat melengkungkan balok ke atas, jadi momen-peralihan yang mempunyai nilai-aljabar negatif itu arah kerjanya positif. Balok kita potong di tampang *B* (melenyapkan kemungkinan bekerjanya *X*) dan mengadakan di ujung-ujung potongan di situ momen = 1 yang arah kerjanya positif, jadi berlawanan dengan arah kerja *X* sendiri, atau mengadakan momen $-X = 1$.



Gambar II,17

Untuk tampang *S* sejauh $s < l_1$ **dari** *A*: $\alpha_m = s/l_1$ **dan** $\alpha_q = 1/l_1$;
(jadi lapangan *AB*)

Untuk tampang *S* sejauh $s < l_2$ **dari** *C*: $\alpha_m = s/l_2$ **dan** $\alpha_q = \div\, 1/l_2$;
(jadi lapangan *CB*)

Pada lapangan *AB* terdapat: $M_s^o = \frac{1}{2}\,ql_1s - \frac{1}{2}qs^2$; $Q_s^o = \frac{1}{2}\,ql_1 - qs$
(*S* diukur dari *A*)

Pada lapangan *CB* terdapat: $M_s^o = \frac{1}{2}ql_2s - \frac{1}{2}qs^2$; $Q_s^o = \div\,\frac{1}{2}ql_2 + qs$
(*S* diukur dari *C*)

$$\int \alpha_m M_s^o ds/EI = \tfrac{1}{2}\frac{q}{EI}\left\{\int_o^{l_1}(s/l_1)(l_1s - s^2)ds + \int_o^{l_2}(s/l_2)(l_2.s - s^2)ds\right\} =$$

$$= \tfrac{1}{24}\,\frac{q}{EI}\,(l_1^3 + l_2^3)$$

$$\int \alpha_q Q_s^o ds/GF' = \frac{q}{GF'}\left\{\int_o^{l_1}(1/l_1)(\tfrac{1}{2}l_1 - s)ds + \int_o^{l_2}(1/l_2)(\tfrac{1}{2}l_2 - s)ds\right\} = 0$$

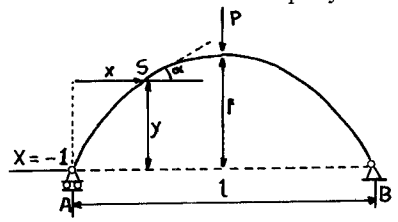
$$\int \alpha_m^2 ds/EI + \int \alpha_q^2 ds/GF' = \frac{1}{EI}\left(\int_o^{l_1} s^2ds/l_1 + \int_o^{l_2} s^2ds/l_2\right) +$$

$$+ \frac{1}{GF'}\left(\int_o^{l_1} ds/l_1^2 + \int_o^{l_2} ds/l_2^2\right) = \tfrac{1}{3}\,\frac{l_1 + l_2}{EI} + \frac{1/l_1 + 1/l_2}{GF'} =$$

$$= \frac{1}{EI}\{\tfrac{1}{3}(l_1 + l_2) + k(1/l_1 + 1/l_2)\}$$

$$X = \tfrac{1}{24}\,q.\frac{(l^3{}_1 + l_2^3)}{\tfrac{1}{3}(l_1 + l_2) + k(1/l_1 + 1/l_2)} = \tfrac{1}{24}\,q.\,\frac{l_1^2 - l_1l_2 + l_2^2}{\tfrac{1}{3} + k/l_1l_2}$$

2. Busur atau pelengkung dengan dua sendi. Reaksi-reaksi pada kedua-dua sendi di *A* dan *B* mempunyai komponen mendatar yang masing-masing sama besarnya dan berlawanan arahnya (muatan luar dianggap bekerja vertikal). Nilai mutlak reaksi-reaksi mendatar ini adalah *H*, yang kita anggap sebagai gaya kelebihan; jadi $X = H$. Arah kerjanya *X* atau *H* ini ke dalam untuk muatan vertikal ke bawah (jadi yang biasa). Jika salah satu sendi, misalnya *A*, diganti dengan rol, maka lenyaplah reaksi-mendatar *H* ini (pada kedua-dua perletakan). Kemudian kita mengadakan kekuatan mendatar = 1 di tempat rol itu yang arahnya ke luar, jadi berlawanan dengan arah kerjanya *X* (atau mengerjakan kekuatan $X = -1$). Di sini kekuatan normal-menekan dianggap positif.



Gambar II, 18

$X = -1$ tadi menimbulkan pada tampang *S* dengan absis *x* dan ordinat *y* : momen sebesar $+ y$, kekuatan normal sebesar $\div \cos\alpha$ (menarik) dan kekuatan melintang sebesar $\sin\alpha$. Jadi $\alpha_m = y$, $\alpha_n = -\cos\alpha$ dan $\alpha_q = \sin\alpha$

Sebagai contoh, kita ambil *EI*, *EF* dan *GF* tetap nilainya (busur prismatis) dan muatan *P* berdiri di tengah-tengah busur, yang symmetris pula bentuknya.

$M_s^\circ = \frac{1}{2}\,P.x$ (utk. $x < \frac{1}{2}\,l$); $N_s^\circ = \frac{1}{2}\,P \sin$; $Q_s^\circ = \frac{1}{2}\,P\cos\alpha$

$$\int \alpha_m M_s^o ds/EI = \tfrac{1}{2}\frac{P}{EI}\,2.\int_o^{1/2l} yx ds = \frac{P}{EI}\int_o^{1/2l} yx ds$$

$$\int \alpha_n N_s^o ds/EF = -\tfrac{1}{2}\frac{P}{EF}\int_o^{l} \cos\alpha \sin\alpha\, ds$$

$$\int \alpha_q Q_s^o ds/GF' = \tfrac{1}{2}\frac{P}{GF'}\int_o^{l} \sin\alpha \cos\alpha\, ds$$

$$\int \alpha_m^2 ds/EI + \int \alpha_n^2 ds/EF + \int \alpha_q^2 ds/GF' =$$

$$= \frac{1}{EI}\int_o^l y^2 ds + \frac{1}{EF}\int_o^l \cos^2\alpha . ds + \frac{1}{GF'}\int_o^l \sin^2\alpha\, ds$$

$$X = \frac{\int \alpha_m M_s^o ds/EI + \int \alpha_n N_s^o ds/EF + \int \alpha_q Q_s^o ds/GF'}{\int \alpha_m^2 ds/EI + \int \alpha_n^2 ds/EF + \int \alpha_q^2 ds/GF'} =$$

$$= \frac{\int_o^{1/2l} yx ds/EI - \tfrac{1}{2}\int_o^l \cos\alpha \sin\alpha\, ds/EF + \tfrac{1}{2}\int_o^l \sin\alpha \cos\alpha\, ds/GF'}{\int_o^l y^2 ds/EI + \int_o^l \cos^2\alpha\, ds/EF + \int_o^l \sin^2\alpha\, ds/GF'}$$

Biasanya y = f (x), sedang $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, jadi integral-integral di atas ini dapat dihitung

§ 14. Statis tak tertentu berganda dua.

Gaya-gaya statis kelebihan adalah :

X_1 dengan faktor-faktor-pengaruh dalam α_{m1}, α_{n1} serta α_{q1}, dan

X_2 dengan faktor-faktor-pengaruh dalam α_{m2}, α_{n2} serta α_{q2}.

$$X_1\Sigma\int \alpha_1^2 dw + X_2\Sigma\int \alpha_1\alpha_2 dw = \int \alpha_{m1} M_s^o dw_m + \int \alpha_{n1} N_s^o dw_n + \int \alpha_{q1} Q_s^o dw_q \ldots (1)$$

$$X_1\Sigma\int \alpha_1\alpha_2 dw + X_2\Sigma\int \alpha_2^2 dw = \int \alpha_{m2} M_s^o dw_m + \int \alpha_{n2} N_s^o dw_n + \int \alpha_{q2} Q_s^o dw_q \ldots (2)$$

$dw_m = ds/EI$; $dw_n = ds/EF$ dan $dw_q = ds/GF'$

$$\Sigma\int \alpha_1^2\, dw = \int \alpha_{m1}^2 dw_m + \int \alpha_{n1}^2\, dw_n + \int \alpha_{q1}^2\, dw_q$$

$$\Sigma\int \alpha_1\alpha_2 dw = \int \alpha_{m1}\alpha_{m2} dw_m + \int \alpha_{n1}\alpha_{n2} dw_n + \int \alpha_{q1}\alpha_{q2} dw_q, \text{d.s.t.}$$

Sebagai contoh, balok terjepit sebelah dan di atas dua perletakan A dan B

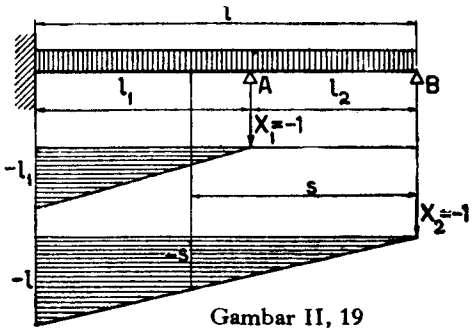
X_1 = reaksi - perletakan A

X_2 = reaksi-perletakan B

$\alpha_{m1} = -(s - l_2)$; $\alpha_{q1} = 1$

(hanya jika $s > l_2$);

$\alpha_{m2} = -s$; $\alpha_{q2} = 1$



Gambar II, 19

$$\Sigma\int \alpha_1^2 dw = \int_{l_2}^l (s-l_2)^2 ds/EI + \int_{l_2}^l 1^2 ds/GF' = \tfrac{1}{3}l_1^3/EI + l_1/GF'$$

$$\Sigma\int \alpha_1\alpha_2 dw = \int_{l_2}^l (s-l_2)s\, ds/EI + \int_{l_2}^l 1^2 ds/GF' = \tfrac{1}{3}l_1^3/EI + \tfrac{1}{2}l_1^2 l_2/EI + l_1/GF'$$

$$\Sigma\int \alpha_2^2 dw = \int_o^l s^2 ds/EI + \int_o^l 1^2 ds/GF' = \tfrac{1}{3}l^3/EI + l/GF'$$

Muatan penuh terbagi rata : qt/m'

$$M_s^o = -\tfrac{1}{2}qs^2;\quad Q_s^o = qs$$

$$\int \alpha_{m1} M_s^o ds/EI + \int \alpha_{q1} Q_s^o ds/GF' = \tfrac{1}{2}q\int_{l_2}^l (s-l_2)s^2 ds/EI + q\int_{l_2}^l s\, ds/GF' =$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{8}l_1^4 + \frac{1}{3}l_1^3 l_2 + \frac{1}{4}l_1^2 l_2^2}{EI} + \frac{\frac{1}{2}l_1^2 + l_1 l_2}{GF'}\right) q$$

$$\int \alpha_{m2} M_s^o ds/EI + \int \alpha_{q2} Q_s^o ds/GF' = \tfrac{1}{2}q\int_o^l s^3 ds/EI + q\int_o^l s\, ds/GF' =$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{8}l^4}{EI} + \frac{\frac{1}{2}l^2}{GF'}\right) q$$

$$X_1\left(\frac{\frac{1}{3}l_1^3}{EI} + \frac{l_1}{GF'}\right) + X_2\left(\frac{\frac{1}{3}l_1^3 + \frac{1}{2}l_1^2 l_2}{EI} + \frac{l_1}{GF'}\right) =$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{8}l_1^4 + \frac{1}{3}l_1^3 l_2 + \frac{1}{4}l_1^2 l_2^2}{EI} + \frac{\frac{1}{2}l_1^2 + l_1 l_2}{GF'}\right) q \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

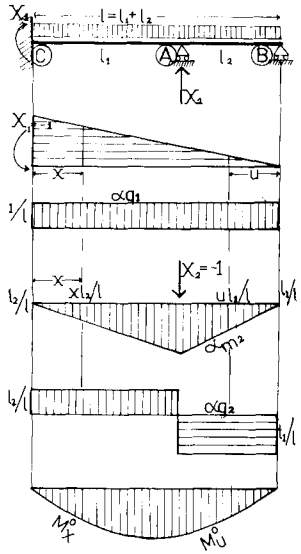
$$X_1\left(\frac{\frac{1}{3}l_1^2 + \frac{1}{2}l_1^2 l_2}{EI} + \frac{l_1}{GF'}\right) + X_2\left(\frac{\frac{1}{3}l^3}{EI} + \frac{l}{GF'}\right) = \left(\frac{\frac{1}{8}l^4}{EI} + \frac{\frac{1}{2}l^2}{GF'}\right) q \ldots . (2)$$

Dibandingkan dengan hukum Maxwell mendapat bahwa

$$\Sigma \int \alpha_1^2 dw \equiv \delta_{11}$$
$$\Sigma \int \alpha_1 \alpha_2 dw \equiv \delta_{12}$$
$$\Sigma \int \alpha_2^2 dw \equiv \delta_{22}$$

Besaran besaran di bagian kanan persamaan-persamaan berarti $\Sigma P.\,\delta_1$. dan $\Sigma P.\delta_2$. Bandingkan dengan **§ 7, *b*** jika indeks *a* diganti 1 dan indeks *b* dengan 2.

Sekarang sebagai gaya-gaya kelebihan diambil $X_1 = M_c$ (momen jepit) dan



Gambar II, 19a

$X_2 = A$ (reaksi perletakan di A) gb II, 19 a.

$\alpha_{m1} = -(l-x)/l$ atau $-u/l$

$\alpha_{q1} = +l_1/l$

$\alpha_{m2} = +xl_2/l$ atau $+ul_1/l$.

$\alpha_{q2} = +l_2/l$ pada lapangan C A, dan $-l_1/l$ pada lapangan A B

$M_x^\circ = \frac{1}{2} qlx - \frac{1}{2} qx^2$ untuk $x \leqslant l_1$

$M_u^\circ = \frac{1}{2} qlu - \frac{1}{2} qu^2$ untuk $u \leqslant l_2$

$Q_x^\circ = \frac{1}{2} ql - qx$; $Q_u^\circ = -\frac{1}{2} ql + \frac{1}{2} qu$

$$\varphi_{11} = \varphi_{cc} = 1/EI \int_o^l u^2/l^2 \, du + 1/GF \int_o^l du/l^2 = l/3EI + 1/lGF.$$

$$\delta_{22} = \delta_{aa} = 1/EI \left\{ \int_o^{l_1} (xl_2/l)^2 \, dx + (ul_1/l)^2 \, du \right\}$$
$$+ 1/GF' \left\{ \int_o^{l_1} (l_2/l)^2 \, dx + (l_1/l)^2 \, du = \right.$$
$$= l_1^2 l_2^2 / 3EI + l_1 l_2 / l \; G \; F'$$

$$\varphi_{12}^1 = \delta_{21} = 1/EI \left\{ \int_o^{l_1} \frac{(l-x).}{l} \frac{l_2}{l} \, x \, dx + \right.$$
$$\left. + \int_o^{l_2} \frac{u}{l} \cdot \frac{l_2}{l} \, u \, du \right\} +$$
$$+ 1/GF' \int_o^{l_1} 1/l. \; l_2/l \; dx + \int_o^{l_2} 1/l. \; l_1/l \; du =$$
$$= -l_1 l_2 (l + l_2) / 6 l EI$$

$$\varphi_1^\circ = \varphi_c^\circ = \int_o^l \alpha_{m1} M_u^\circ \, du/EI + \int_o^l \alpha_{q1} Q_u^\circ \, du/GF' =$$
$$= 9/2EI \int_o^l (l u^2 - u^3) \, du - q/GF' \int 1/l \; (\tfrac{1}{2} l - u) \, du = -ql^3/24 lEI$$

$$\delta_2^\circ = \delta_a^\circ = 1/EI \left\{ \int_o^{l_1} \alpha_{m2} M_x^\circ \, dx + \int_o^{l_2} \alpha_{m2} M_u^\circ \, du \right\}$$
$$+ 1/GF' \left\{ \int_o^{l_1} \alpha_{q2} Q_x^\circ \, dx + \int_o^{l_2} \alpha_{q2} Q_u^\circ \, du \right\} =$$
$$= q/2 \, lEI \left\{ \int_o^{l_1} (lx - x^2) \; x \; l_2 + \int_o^{l_2} (lu - u^2) \, u l_1 \, du \right\} +$$
$$+ q/l \, GF' \left\{ l_2 \int_o^{l_1} (\tfrac{1}{2} l - x) \, dx + l_1 \int_o^{l_2} (\tfrac{1}{2} l - u) \, du \right\} =$$
$$= q \, l_1 l_2 (l^2 + l_1 l_2) / 24 l \; EI + q \, l_1 l_2 / 2 \, GF'$$

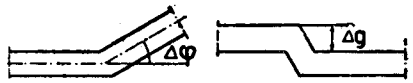
$$X_1 \varphi_{11} + X_2 \varphi'_{12} = \varphi_1^\circ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$X_1 \delta'_{21} + X_2 \delta_{22} = \delta_2^\circ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Kedua-dua persamaan ini menghasilkan X_1 dan X_2 .

§ 15. Salah penyelenggaraan (salah stellan).

Kesalahan ini mungkin terdiri dari; putaran-sudut $\Delta\varphi$, robahan-panjang Δn, geseran Δg, torsi $\Delta\psi$, tidak sama tingginya perletakan-perletakan, dan sebagainya. Maka kesalahan-kesalahan ini menimbulkan tambahan pada nilai gaya kelebihan X sebesar;



Gambar II, 20

$$\Delta X = \frac{\Sigma\,\alpha_m\Delta\varphi + \Sigma\,\alpha_n\Delta n + \Sigma\,\alpha_q\Delta g + \Sigma\,\alpha_t\Delta\psi}{\Sigma\int\alpha^2 dw}$$

Tambahan ini bernilai *positif*, jika kesalahan berkehendak memindah titik-pegangan gaya X ke arah *berlawanan* dengan arah kerjanya apabila kemungkinan bekerjanya X dilenyapkan.

§ 16. Akibat derajat-panas.

Jika derajat-panas sesuatu bagian berlainan dengan bagian-bagian lainnya sehingga menimbulkan robahan-panjang (perpanjangan atau perpandakan) padanya sebesar Δn, inipun menimbulkan

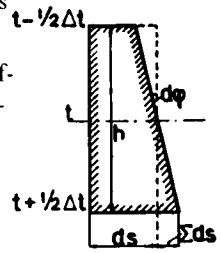
$$\Delta X = \frac{\alpha_n\Delta n}{\Sigma\int\alpha^2 dw}$$

Apabila tepi-bawah balok lebih atau kurang panas dari pada tepi atasnya, peristiwa inipun menimbulkan tambahan pada X pula. Pada umumnya boleh dianggap bahwa perjalanan beda antara derajat-panas tepi-bawah t_b dan derajat-panas tepi-atas t_a itu lurus. Jadi beda antara derajat-panas tepi dan garis-netral (tengah-tengah tampang balok) itu $\pm\frac{1}{2}\Delta t$. Kita anggap bahwa $t_b > t_a$ jadi $\Delta t = t_b - t_a$. Jika Υ itu koeffisien perkembangan memanjang pada balok, maka terdapat (lihat gambar II, 21) : $\varepsilon.ds = \frac{1}{2}\Delta t.\Upsilon.ds$.

$$d\varphi = \varepsilon.ds/\tfrac{1}{2}h = \Delta t.\Upsilon.ds/h$$

$$X_{\Delta t} = \frac{\int\alpha_m d\varphi}{\Sigma\int\alpha^2 dw} = \frac{\Upsilon\int\alpha_m.\Delta t.ds/h}{\Sigma\int\alpha^2 dw}$$

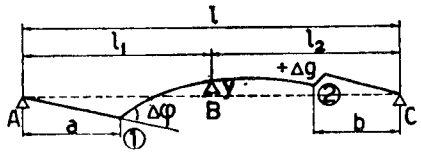
Diingatkan lagi bahwa Δt itu *positif*, jika $t_b > t_a$.



Gambar II, 21

§ 17. Contoh.

Kita ambil balok prismatis terusan di atas tiga perletakan. Salah stellan terdiri dari : putaran-sudut $\Delta\varphi$ di titik 1 sejauh a dari A; geseran $\div\Delta g$ di titik 2 sejauh b dari C dan titik-perletakan B letaknya terlalu tinggi sejauh y. Selanjutnya, tepi bawah lebih panas $\Delta t^\circ C$ dari pada tepi-atas.
Gaya kelebihan $X \equiv B$.



Gambar II, 22

Lapangan AB. Titik S sejauh $s \leqslant l_1$ dari A : $\alpha_m = sl_2/l$;

$$\alpha_q = l_2/l;\ (\alpha_m)_1 = al_2/l$$

Lapangan CB. Titik S sejauh $s \leqslant l_2$ dari C: $\alpha_m = sl_1/l$;

$$\alpha_q = -l_1/l;\ (\alpha_q)_2 = -l_1/l$$

$$\Sigma\int\alpha^2 dw = \int_o^{l_1}(sl_2/l)^2 ds/EI + \int_o^{l_1}(l_2/l)^2 ds/GF' + \int_o^{l_2}(sl_1/l)^2 ds/EI +$$

$$+\int_o^{l_2}(l_1/l)^2 ds/GF = l_1^2 l_2^2/3EIl + l_1 l_2/GF'l \quad \text{(lihat § 13}a\text{)}$$

$$\Delta X\Sigma\int\alpha^2 dw = (al_2/l)\Delta\varphi + y + (l_1/l)\Delta g$$

$$\Delta X = \frac{(al_2/l)\Delta\varphi + y + (l_1/l).\Delta g}{l_1^2 l_2^2/3EIl + l_1 l_2/GF'l} = \frac{al_2\Delta\varphi + yl + l_1.\Delta g}{l_1^2 l_2^2/3EI + l_1 l_2/GF'}$$

$$X_{\Delta t}\,\Sigma\int\alpha^2 dw = (\Upsilon.\Delta t/hl)\left(\int_o^{l_1} sl_2 ds + \int_o^{l_2} sl_1 ds\right) = \Upsilon.\Delta t.l_1 l_2/2h$$

$$X_{\Delta t} = \frac{\Upsilon.\Delta t.l_1 l_2/2h}{l_1^2 l_2^2/3EIl + l_1 l_2/GF'l} = \frac{\Upsilon.\Delta t.l}{2h(l_1 l_2/3EI + 1/GF')}$$

Tambahan pada nilai X menjadi $\Delta X + X_{\Delta t}$.

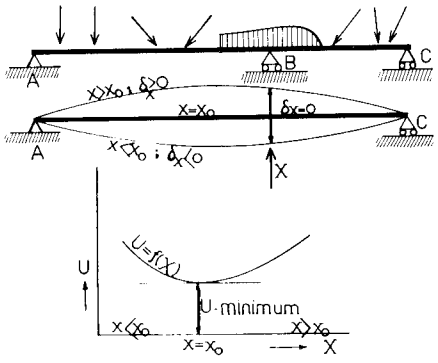
PERPUSTAKAAN DAERAH JAWA TIMUR
JL. MENUR PUMPUNGAN NO. 32
S U R A B A Y A
TAHUN ANGGARAN 1996 / 1997

BAB III

HUKUM PEKERJAAN DEFORMASI MINIMUM

§ 1. Statis tak tertentu tunggal.

Kita mempelajari balok terusan di atas tiga perletakan *A*, *B*, dan *C*. Sebagai gaya statis kelebihan kita anggap reaksi perletakan $B = X$, yang bekerja ke atas (gambar III, 1) Peralihan titik-pegangan *X*, yaitu titik *B* terdapat menurut Castigliano, $\delta_x = dU/dX$.



Gambar III, 1

Jika *X* terlalu kecil nilainya, titik *B* akan turun, jadi beralih ke arah berlawanan dengan arah kerja *X*. Ini berarti bahwa $\delta x = dU/dX < o$ (negatif), jadi dU dan dX berlawanan tandanya. Jika *X* bertambah (jadi dX positif), dU *bernilai* negatif atau *U* berkurang dan tentu saja titik *B* akan naik. Sekarang *X* diperbesar menjadi X_0 hingga *ABC* menjadi lurus, jadi $\delta_x = dU/dX = o$. Mulai pada saat *X* bernilai $< X_0$ (*B* lebih rendah dari pada garis *AC*) hingga bernilai X_0 atau cukup untuk mencapai *ABC* menjadi lurus (jadi selama $\delta_x < o$, sedang dX positif), $dU < o$ atau nilai jumlah pekerjaan robahan bentuk *U berkurang.*

Sesudah *ABC* lurus, nilai *X* ditambah lagi ($dX > o$) yang menyebabkan bahwa titik *B* lebih tinggi letaknya dari pada garis *AC*. Peralihan titik-pegangan *X* searah dengan garis-kerjanya, jadi $dU/dX > o$ (positif) atau dU dan dX bersamaan tandanya. Oleh karena dX positif (*X* diperbesar), dU juga $> o$ yang berarti bahwa *U* bertambah. Jadi mulai pada waktu *X* bernilai cukup untuk mencapai garis lurus *ABC* ($X = X_0$), pekerjaan deformasi *U* akan bertambah jika *X* ditambah.

Jadi semua ini berarti, bahwa pada saat *X* mencapai nilai yang cukup untuk mencapai bahwa titik *B* sama tingginya dengan *A* dan *C*, nilai *U* itu *extrem-minimum.* Pada saat ini terdapat pula $\delta_x = o$ atau $dU/dX = o$.

Jika tujuan kita ini akan mencapai supaya *ABC* itu garis lurus, maka reaksi perletakan kelebihan *X* ini harus mencapai nilai sehingga jumlah pekerjaan deformasi menjadi minimum.

Syarat-seimbang menuntut supaya : $A + C + X = P$

$(M_A + M_C + M_X)$ terhadap sesuatu titik = ΣM_P terhadap titik itu juga.

Jadi menghasilkan 2 persamaan dengan 3 besaran anu (*A*, *C* dan *X*), yang belum cukup untuk menentukan nilai *X*. Di samping ini hukum pekerjaan deformasi minimum ini dapat memberi petunjuk-petunjuk tentang nilai *X* yang paling memuaskan.

§ 2. Mempergunakan dalil ilmu-pasti.

Jumlah pekerjaan deformasi *U* itu tergantung pada nilai *X*, jadi $U = f(X)$. Nilai ini *extrem* apabila $dU/dX = o$, serta $d^2U/dX^2 \neq o$ dan nilai extrem ini *minimum* apabila $d^2U/dX^2 > o$ (positif). Dulu di bab II § 4 telah terdapat bahwa $d^2U/dX^2 = \delta_{xx}$ itu selalu bernilai positif (sebab berarti faktor pengaruh terhadap peralihan titik-pegangan *X* ke arah bekerjanya sendiri). Jadi hukum pekerjaan minimum tadi mencocoki hukum ilmu-pasti.

Hukum ini dapat diperluas sampai keadaan statis tak tertentu lipat dua atau lebih. Kita ambil bangunan statis tak tertentu berlipat dua dengan X_1 dan X_2 sebagai gaya kelebihan. Supaya *U* menjadi minimum, diharuskan supaya :

$$d\,U/dX_1 = o\ (1);\ d^2U/dX_1^2 > o \ldots\ldots \quad (2)$$

$$d\,U/dX_2 = o\ (3);\ d^2U/dX_2^2 > o \ldots\ldots \quad (4)$$

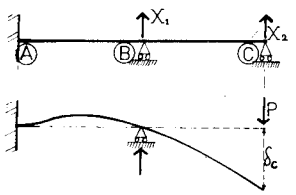
$$\frac{d^2U}{dX_1^2}\cdot\frac{d^2U}{dX_2^2} - \left(\frac{d^2U}{dX_1\,dX_2}\right)^2 > o \ldots\ldots \quad (5)$$

Syarat-syarat (1) dan (3) dipenuhi oleh karena titik-titik pegangan X_1 dan X_2 tidak beralih.

$d^2U/dX_1^2 = \delta_{11}$ dan $d^2U/dX_2^2 = \delta_{22}$, jadi kedua-dua besaran ini positif.

Tinggal membuktikan bahwa $\frac{d^2U}{dX_1^2}\cdot\frac{d^2U}{dX_2^2} - \left(\frac{d^2U}{dX_1dX_2}\right)^2 > o$ atau $\delta_{11}\cdot\delta_{22} - (\delta_{12})^2 > o$. (sarat 5).

Sebagai contoh kita ambil balok terusan ABC terjepit di A (gb,III,2). Sebagai gaya - gaya statis–kelebihan dipilih:



Gambar III, 2

X_1 = B (reaksi-perletakan di B)

X_2 = C (reaksi-perletakan di C)

Perletakan C dihapuskan dan mengerjakan beban P di situ. Jika perletakan B tidak ada, titik C akan turun sejauh $\delta_c^o = P\delta_{22}$

(atau $P\delta_{cc}$) dan titik B sejauh

$\delta_b^o = P\delta_{12}$ (atau $P\delta_{bc}$). Yang terakhir ini dicegah oleh adanya perletakan B yang menghasilkan reaksi B = X_1 menurut sarat

$$\delta_b^o - X_1 \delta_{11} = 0$$

$X_1 = \delta_b^o / \delta_{11}$ (atau δ_b^o / δ_{bb}) = $P\delta_{12} / \delta_{11}$ (atau $P\delta_{bc} / \delta_{bb}$).

Gaya X_1 akan mengangkat ujung C kembali ke atas sejauh

$\delta'_c = X_1 \delta_{21}$ (atau B δ_{cb}), sehingga pada akhirnya titik C beralih sejauh

$\delta_c = \delta_c^o - \delta'_c = P\left(\delta_{22} - \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} . \delta_{21}\right)$ *ke bawah* atau searah dengan gaya P,

mustahil akan beralih berlawanan dengan arah-kerjanya P, sebab P ini satu-satunya gaya-luar yang aktif. Ini berarti bahwa

$$\delta_{22} - \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} . \delta_{21} > 0 \quad \text{atau} \quad \frac{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}.\delta_{21}}{\delta_{11}} > 0.$$

Oleh karena δ_{11} dan δ_{22} itu positif, berarti pula $\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}.\delta_{21} > 0$

Yang memenuhi pada sarat 5 di atas.

Sekarang dipilih $X_1 = M_a$ dan X_2 = B (gb. III,3).

I) Perletakan B hapus dan membebani balok dengan gaya P di situ.

Mengikuti uraian di atas,

terdapat : $\delta_b^o = P\delta_{22} = P\delta_{bb}$

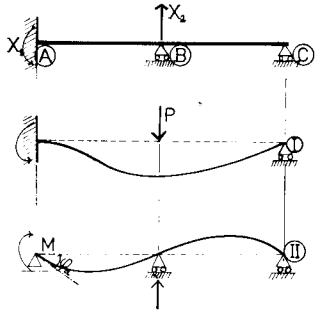
$X_1 = P\varphi'_{12} / \varphi'_{11}$ atau $M_a = P\varphi'_{ab} / \varphi_{aa}$

$$\delta_b = P\left(\delta_{22} - \frac{\varphi'_{12}}{\varphi_{11}} . \delta'_{21}\right) = P\frac{(\varphi_{11}\delta_{22} - \varphi'_{12}.\delta'_{21})}{\varphi_{11}}$$

yang juga niscaya positif.

atau searah dengan P, dan seterusnya.

II) Jepitan di A hapus, berarti perletakan A dijadikan *sendi.* Mengerjakan momen M di situ yang bekerja *positif.*



Gambar III, 3

Terdapat : $\varphi_1^o = \varphi_a^o = M\varphi_{11} = M\varphi_{aa}$.

$\delta_b^o = M\delta'_{21} = M\delta'_{ba}$ dan

$X_2 = M\delta'_{21} / \delta_{22}$.

$$\varphi_1 = \varphi_a = M\left(\varphi_{11} - \frac{\delta'_{21}}{\delta_{22}} . \varphi'_{12}\right) = M\left(\frac{\varphi_{11}\delta_{22} - \delta'_{21}\varphi'_{12}}{\delta_{22}}\right)$$

yang juga positif atau searah dengan M

Kejadian khusus : AB = BC = l ; EI tetap. Perletakan A sendi, B hapus (kejadian II).

$\varphi_{11} = \varphi_{aa} = 2l / 3EI$; $\delta_{22} = \delta_{bb} = (2l)^3 / 48\ EI = l^3 / 6\ EI$;

$\varphi_{12} = \delta'_{21} = l^2 / 4\ EI$ (1/E1 separoh luas bidang momen akibat B = 1)

$(EI)^2\ (\varphi_{11}\delta_{22} - \varphi'_{12}.\delta'_{21})) = (2/3.\ 1/6 - ¼.¼)\ l^4 > 0$

Pada kejadian I, jika perletakan-perletakan B dan C hapus

(X_1 = B, X_2 = C) :

$\delta_{11} = \delta_{bb} = l^3 / 3\ E1$; $\delta_{22} = \delta_{cc} = (21)^3 / 3E1 = 8\ l^3/3E1$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = = \frac{l^3}{3\ EI} + \frac{l^3}{2\ EI} = 5\ l^3 / 6\ EI$$

$(EI)^2.\ (\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{22}) = (1/3.\ 8/3 - 5/6\ .\ 5/6)\ l^6 > 0$

Jadi $\delta_{11}.\delta_{22} - (\delta_{12})^2$ juga positif dan kita dapat memenuhi syarat bahwa pekerjaan diformasi menjadi minimum.

Muatan pada bangunan akan terbagi-bagi sedemikian, hingga pekerjaan deformasi menjadi minimum dan nilai-nilai gaya kelebihan akan terdapat yang sesuai dengan keadaan demikian. itu.

Pendapat-pendapat ini hanya berlaku apabila titik-pegangan gaya kelebihan tak beralih ($\delta_x = dU/dX = o$), tak ada salah-stellan dan akibat derajat-panas.

§ 3. Deformasi yang terpenting.

Deformasi serta pekerjaannya itu diakibatkan oleh : lengkungan atau putaran-sudut (momen), robahan-panjang yaitu perpanjangan atau perpendekan (kekuatan normal), geseran (kekuatan-melintang) dan pilin atau torsi (momen-torsi).
Jadi $U = U_m + U_n + U_g + U_t$

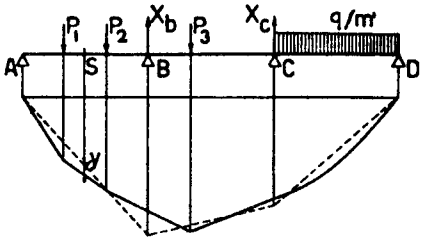
Pada konstruksi-rata biasanya tak ada torsi, U_n dan U_g seringkali $\ll U_m$, dan acapkali boleh diabaikan asal saja dU_n/dX dan dU_g/dX kecil nilainya, yang berarti bahwa titik-pegangan gaya-kelebihan X ini akan beralih sedikit sebagai akibat dari robahan-panjang dan geseran di dalam konstruksi.

Berhubung dengan ini boleh dibetulkan bahwa sebagai pendekatan, gaya kelebihan itu bernilai sedemikian besarnya yang menyertai *pekerjaan-melengkung* minimum.

§ 4. Penggunaan.

1. *Balok terusan di atas empat titik perletakan A, B, C dan D.* Gaya-gaya kelebihan ialah reaksi-reaksi perletakan X_b dan X_c.

Pada balok AD di atas dua perletakan kita menggambar poligon-batang sebagai akibat dari muatan-muatan luar dengan perantaraan gambar-kutub serta tangan-kutub = H.



Gambar III, 4.

Kemudian menggambar poligon-batang berasal dari X_b dan X_c sebagai kekuatan-kekuatan yang bekerja ke atas dan berdasarkan atas lengan-kutub = H tadi. Jika pada sesuatu tempat S beda antara ordinat poligon-batang pertama dan ordinat poligon-batang kedua ini ada y maka pada tempat itu ada momen $M_s = Hy$. Nilai y (jadi juga nilai M_s) ini positif jika

ordinat poligon-batang pertama (berasal dari muatan luar) lebih panjang dari pada ordinat poligon-batang yang terakhir, dan negatif jika sebaliknya.

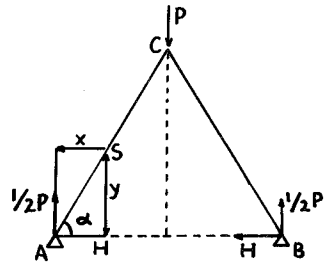
Jika hanya mengindahkan pekerjaan melengkung (dari momen), maka $U = \frac{1}{2} \int M_s^2 ds/EI = H^2 \int y^2 ds/2EI$ harus minimum. Ini berarti juga bahwa $\int y^2$ minimum juga. Jadi nilai-nilai X_b dan X_c itu paling memuaskan, jika poligon-batangnya mendekati poligon-batang berasal dari muatan luar secara hukum "kwadrat terkecil".

2. *Pelengkung.* Beda antara ordinat garis-tekan y dan ordinat sumbu-busur y' ada $y - y' = \Delta y$ yang bernilai positif apabila $y > y'$. Jadi momen pada sesuatu tampang S ada $M_s = H.\Delta y$ (positif atau negatif menurut nilai Δy). $U = \int M_s^2 ds/2EI = H^2 \int (\Delta y)^2 ds/EI$. Ini minimum, jika $\int (\Delta y)^2$ minimum. Jadi berarti bahwa garis-tekan (berasal dari muatan) berhasrat mendekati sumbu-busur menurut hukum kwadrat terkecil.

Muatan penuh terbagi rata menimbulkan garis-tekan yang berbangun parabol. Jika sumbu busur berbangun parabol juga, kita dapat mencapai $\Delta y = o$ (jika hanya mengindahkan deformasi melengkung saja), yaitu garis tekan bersatu padu dengan sumbu-busur. Dengan begitu $\int (\Delta y)^2 ds/2EI = o$ atau juga $U = H^2 \int (\Delta y)^2 ds/2EI = o$. Oleh karena H^2 dan $(\Delta y)^2$ itu selalu positif nilai minimum U ini = o. Jadi $\Delta y = o$ itu sesuai dengan adanya pekerjaan deformasi minimum, dan nilai gaya kelebihan X itu paling memuaskan pada keadaan demikian ini.

3, *Pelengkung segi-tiga symmetris dengan dua sendi.*

Gaya kelebihan itu reaksi-sendi mendatar H. Di puncak C berdirilah muatan P. Pekerjaan melengkung $U = \int M_s^2 ds/2EI$ itu minimum jika $M_s = o$ atau garis-tekan bersatu padu dengan sumbu-bangunan. Jadi reaksi-reaksi sendi R_a dan R_b bersatu-padu dengan berturut-turut garis AC dan garis BC. Oleh karena keadaan simetris, komponen-komponen reaksi-sendi vertikal kedua-duanya ada ½ P masing-masing dan H = ½P cotg.α.



Gambar III, 5

Ini betul, jika akibat-akibat tekanan dan geseran diabaikan. Jika akibat-akibat ini diperhitung juga, kita dapat menghitung H dengan faktor-faktor pengaruh dalam.

$\alpha_m = y = x \operatorname{tg}\alpha;\ \alpha_n = -\cos\alpha;\ \alpha_q = \sin\alpha$ (H = −1 keluar)

$M_s^o = \frac{1}{2}P.x;\ N_s^o = \frac{1}{2}P\sin\alpha;\ Q_s^o = \frac{1}{2}P\cos\alpha;\ ds = dx\sec\alpha$

$$H = \frac{\int \alpha_m M_s^o ds/EI + \int \alpha_n N_s^o ds/EF + \int \alpha_q Q_s^o ds/GF'}{\int \alpha_m^2 ds/EI + \int \alpha_n^2 ds/EF + \int \alpha_q^2 ds/GF'} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sec\alpha\operatorname{tg}\alpha\int_o^{1/2l} x^2 dx/EI - \frac{1}{2}\sec\alpha\sin\alpha\cos\alpha\int_o^{1/2l} dx/EF}{\sec\alpha\ \operatorname{tg}^2\alpha\int_o^{1/2l} x^2 dx/EI + \sec\ \alpha\ \cos^2\ \alpha\int_o^{1/2l} dx/EF}$$

$$\cdots\cdots \frac{+\frac{1}{2}\sec\alpha\cos\alpha\sin\alpha\int_o^{1/2l} dx/GF'}{+\sec\alpha\sin^2\alpha\int_o^{1/2l} dx/GF'} P =$$

$$= \frac{\frac{1}{48}l^3\operatorname{tg}\alpha/EI - \frac{1}{8}l\sin 2\alpha/EF + \frac{1}{8}l\sin 2\alpha/GF'}{\frac{1}{24}l^3\operatorname{tg}^2\alpha/EI + \frac{1}{2}l\cos^2\alpha/EF + \frac{1}{2}l\sin^2\alpha/GF'} P =$$

$$= \frac{tg\,\alpha\,(l^2/i^2) - 6\sin 2\alpha + 6\sin 2\alpha.\,(EF/GF')}{2\operatorname{tg}^2\alpha.\,(l^2/i^2) + 24\cos^2\alpha + 24\sin^2\alpha\,(EF/GF')} P,\ \text{jika}\ \ I/F = i^2$$

Ambil sebagai contoh $\alpha = 45°;\ EF/GF' = 4;\ l^2/i^2 = \beta^2$

$$H = \frac{\beta^2 + 18}{2(\beta^2 + 30)} P;\ M_s = \frac{1}{2}Px - Hx\operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{\beta^2 + 30} Px$$

$$N_s = \frac{1}{2}P\sin\alpha + H\cos\alpha = \frac{\beta^2 + 24}{2(\beta^2 + 30)} P\sqrt{2}$$

$$Q_s = \frac{1}{2}P\cos\alpha - H\sin\alpha = \frac{3}{\beta^2 + 30} P\sqrt{2}$$

Kemudian $AC = BC = \frac{1}{2}l\sec\alpha = s$

$$U = U_m + U_n + U_q$$

$$U_m = 2\int_o^{1/2l} M_s^2 dx\ \text{sec.}\ \alpha/2EI = \frac{36l^3\sec\alpha}{24(\beta^2 + 30)\,EI} P^2 =$$

$$= \frac{1{,}5l^2/i^2}{(\beta^2 + 30)^2} l\sec\alpha\cdot\frac{P^2}{EF} = \frac{3\beta^2}{(\beta^2 + 30)^2} P^2 s/EF =$$

$$= \frac{3}{\beta^2(1 + 30/\beta^2)^2} P^2 s/EF$$

$$U_n = 2\int_o^{1/2l} N_s^2 dx\ \sec\alpha/2EF = \frac{(\beta^2 + 24)^2}{4(\beta^2 + 30)^2}.\,l\sec\alpha.P/EF =$$

$$= \frac{(\beta^2 + 24)^2}{2(\beta^2 + 30)^2}\cdot P^2 s/EF = \frac{(1 + 24/\beta^2)^2}{(1 + 30/\beta^2)^2} P^2 s/EF$$

$$U_q = 2\int_o^{1/2l} Q_s^2 dx\ \sec\alpha/2GF' = \frac{9}{(\beta^2 + 30)^2} l\sec\alpha\ \frac{P^2}{EF}\frac{EF}{GF'} =$$

$$= \frac{72}{(\beta^2 + 30)^2}\cdot P_s^2/EF = \frac{72/\beta^2}{\beta^2(1 + 30/\beta^2)^2} P_s^2/EF$$

Ambil sekarang: $\beta^2 = (l/i)^2 = 100^2 = 10.000$

$$U_m = \frac{3}{\beta^2(1 + 30/\beta^2)^2} P_s^2/EF = \frac{3}{10000\ (1{,}003)^2} P^2 s/EF = 0{,}00029\ P^2 s/EF$$

$$U_n = \frac{1{,}0024^2}{2.1{,}003^2} \qquad P_s^2/EF = \cdots\cdots\cdots\cdots = 0{,}49940 \quad ,,$$

$$U_q = \frac{0{,}0072}{10.000.1{,}009^2} \qquad P_s^2/EF = \cdots\cdots\cdots\cdots = 0{,}00000 \quad ,,$$

$$U = 0{,}49969 P^2 s/EF +$$

$$H = \frac{1 + 18/\beta^2}{2(1 + 30/\beta^2)} P = \frac{1{,}0018}{2.1{,}003} P = 0{,}4985\ P$$

Berdasarkan atas penganggapan bahwa garis-tekan bersatu padu dengan sumbu bangunan, terdapat H = ½ P cot 45° = 0.500 P.

$$M_s = 0;\ N_s = \frac{1}{2}P\sqrt{2};\ Q_s = o$$

$$U_m = 0{,}000$$

$$U_n = 2.N_s^2 s/2EF = 0{,}500\ P^2 s/EF$$

$U_q = \ldots\ldots\ldots \quad \underline{0{,}000}$

$U = 0{,}500\ P^2 s/EF > 0{,}49969\ P^2 s/EF$

Jadi mendasarkan U_m menjadi minimum = 0 saja, sudah cukup saksama.

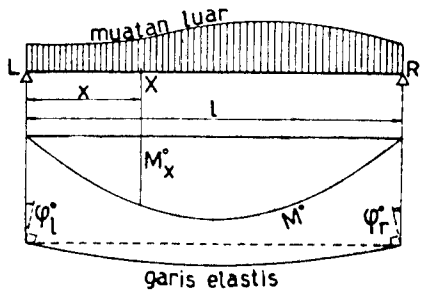
BAB IV

BALOK TERUSAN DI ATAS BEBERAPA TITIK PERLETAKAN

A. PUTARAN SUDUT UJUNG–BALOK

§ 1. Balok di atas dua titik-perletakan.

Sebagai akibat dari muatan luar, balok melengkung, dan tampang-tampangnya menahan gaya-momen M°. Pada suatu tampang X sejauh x dari perletakan kiri (L) besarnya momen-lengkung ini ada M_x°. Seperti sudah diketahui, untuk mempelajari garis-lentur serta putaran-putaran sudut kita boleh menganggap ordinat M_x°/EI_x sebagai "ordinat-muatan" (bidang M_x°/EI dianggap sebagai bidang muatan). Garis-elastis balok dapat dilukiskan dengan garis-momen pada "muatan" ini. Jadi turunnya sesuatu titik pada balok (ordinat garis-elastis pada titik itu) terdapat sebagai momen di tempat titik ini yang ditimbulkan oleh "muatan" tadi dan putaran sudut sebagai "kekuatan-melintang" pada "muatan" ini pula. Dengan begitu putaran-putaran sudut pada ujung-ujung balok terdapat sebagai "reaksi-perletakan" pada "muatan" tersebut.



Gambar IV, 1

φ_l° = putaran-sudut ujung kiri (L) sebagai akibat dari muatan-luar

$= \frac{1}{l} \times$ statis-momen bidang M°/EI_x terhadap titik R =

$$= \frac{1}{l}\int_o^l M_x^\circ\,(l-x)dx/EI_x = \frac{1}{l}\,S_r^\circ$$

Jika tidak mudah untuk menghitung integral-integral ini, maka sebagai pendekatan balok dibagi-bagi di dalam unsur-unsur sepanjang Δx, dan nilai-nilai M_x°, EI_x dan x diambil pada tengah-tengah elemen-elemen ini. Lebih mudah jika melipatkan dengan sesuatu besaran yang tetap I_o, yaitu umpamanya momen-inersia di tampang tengah balok. Dengan begitu kita bekerja dengan besaran-besaran I_o/I_x yang tak berdimensi.

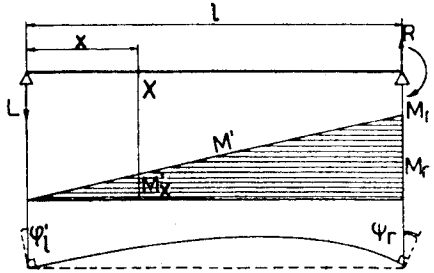
$$\varphi_l^\circ = \frac{1}{EI_o\,l}\int_o^l M_x^\circ\ (I_o/I_x)(l-x)\,dx \sim \frac{1}{E\,I_o\,l}\sum_o^l M_x^\circ\ (I_o/I_x)(l-x)\ \Delta x$$

$$\varphi_r^\circ = \frac{1}{l\,EI_o}\int_o^l M_x^\circ\ (I_o/I_x)\ x\,dx \sim \frac{1}{EI_o\,l}\sum_o^l M^\circ x\ (I_o/I_x)x.\ \Delta x$$

Kemudian apabila EI_x itu tetap = EI (balok prismatis) maka :

$$\varphi_l^o = \frac{1}{EIl}\int_o^l M_x^o(l-x)dx = \frac{1}{EIl}S_r^o = \frac{1}{EIl}$$ statis-momen bidang M° terhadap R.

$$\varphi_r^o = \frac{1}{EIl}\int_o^l M_x^o x dx = \frac{1}{EIl}S_l^o = \frac{1}{EIl}$$ statis-momen bidang M° terhadap L.



Gambar IV, 2*a*

Sekarang pada ujung kanan balok dikerjakan gaya-momen M_r yang melengkungkan balok ke atas (jadi negatif arah kerjanya). Ini menimbulkan reaksi-reaksi perletakan: $L = M_r/l$ (ke bawah) dan $R = M_r/l$ (ke atas). Momen pada tampang X sejauh x dari L ada $M_x' = Lx = (x/l)M_r$.

Ini berarti bahwa garis M' berjalan lurus dan bidang M' berbangun segitiga.

$$\varphi_l' = M_r.\varphi_{lr} = \frac{1}{l}\int_o^l M_x'(l-x)dx/EI_x = \frac{1}{l^2}M_r\int_o^l x(l-x)dx/EI_x$$

$$\varphi_r' = M_r.\varphi_{rr} = \frac{1}{l}\int_o^l M_x' x dx/EI_x = \frac{1}{l^2}.M_r\int_o^l x^2dx/EI_x$$

$$\varphi_{lr} = \frac{1}{l^2}\int_o^l x(l-x)dx/EI_x =$$

$$\frac{1}{EI_o l^2}\int_o^l x(l-x)(I_o/I_x)dx \sim \frac{1}{l^2EI_o}\sum_o^l x(l-x)(I_o/I_x)\Delta x$$

$$\varphi_{rr} = \frac{1}{l^2}\int_o^l x^2dx/EI_x = \frac{1}{EI_o l^2}\int_o^l x^2(I_o/I_x)dx \sim \frac{1}{l^2EI_o}\sum_o^l x^2(I_o/I_x).\Delta x$$

Dan jika EI_x itu tetap = EI, menjadi :

$$\varphi_{lr} = \frac{1}{EI}\int_o^l x(l-x)dx = \tfrac{1}{6}l/EI;\ \varphi_l' = \tfrac{1}{6}M_r l/EI$$

$$\varphi_{rr} = \frac{1}{EI}\int_o^l x^2dx = \tfrac{1}{3}l/EI;\ \varphi_r' = \tfrac{1}{3}M_r l/EI$$

Kemudian mengadakan momen melengkung ke atas M_l pada ujung L, sesudah M_r dilenyapkan. $M_x' = \frac{(l-x)}{l}M_l$

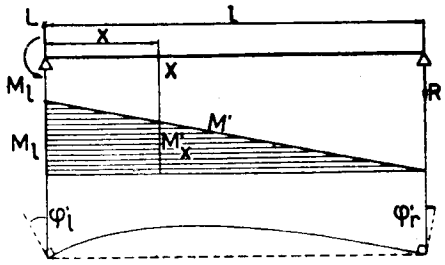
$$\varphi_l' = M_l\varphi_{ll} = \frac{1}{l}\int_o^l M_x'(l-x)dx/EI_x = \frac{1}{l^2}M_l\int_o^l (l-x)^2dx/EI_x$$

$$\varphi_r' = M_l\varphi_{rl} = \frac{1}{l}\int_o^l M_x' x dx/EI_x =$$

$$\frac{1}{l^2}M_l\int_o^l x(l-x)dx/EI_x$$

$$\varphi_{ll} = \frac{1}{l^2}\int_o^l (l-x)^2dx/EI_x =$$

$$\frac{1}{EI_o l^2}\int_o^l (l-x)^2(I_o/I_x)dx$$



Gambar IV, 2*b*

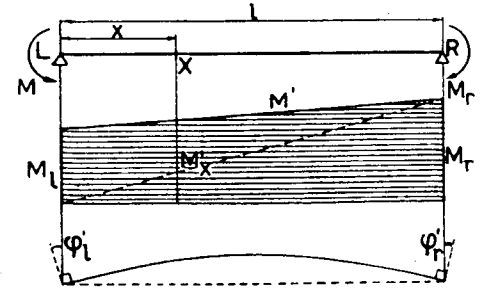
$$\varphi_{rl} = \frac{1}{l^2}\int_o^l x(l-x)dx/EI_x = \frac{1}{EI_o l^2}\int_o^l x(l-x)(I_o/I_x)dx$$

Sambil lalu terbukti lagi bahwa $\varphi_{lr} = \varphi_{rl}$. Pada balok dengan EI_x tetap $= EI$ menjadi pula:

$$\varphi_{ll} = \frac{1}{EIl^2}\int_o^l (l-x)^2dx = \tfrac{1}{3}l/EI;\ \varphi_l' = \tfrac{1}{3}M_l.l/EI$$

$$\varphi_{rl} = \frac{1}{EIl^2}\int_o^l x(l-x)dx = \tfrac{1}{6}l/EI;\ \varphi_r = \tfrac{1}{6}M_l.l/EI$$

Pada akhirnya pada kedua-dua ujung bekerjalah momen-momen M_l dan M_r.



Gambar IV, 3

Bidang M' sekarang berbentuk trapezium.

$$M_x' = \frac{(l-x)}{l}M_l + \frac{x}{l}M_r.$$

$$\varphi_l' = M_l.\varphi_{ll} + M_r.\varphi_{lr}$$

$$\varphi_r' = M_l.\varphi_{rl} + M_r.\varphi_{rr}$$

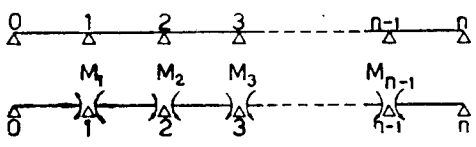
Pada balok prismatis terdapat pula

$$\varphi_l' = \tfrac{1}{3}M_l.l/EI + \tfrac{1}{6}M_r.l/EI$$

$$\varphi_r' = \tfrac{1}{6}M_l.l/EI + \tfrac{1}{3}M_r.l/EI$$

§ 2. Momen-peralihan.

Kita ambil balok terusan di atas $(n + 1)$ titik-perletakan atau dengan n lapangan (gambar 4). Perletakan-perletakan pada ujung o dan n dianggap bebas (sendi dan rol). Balok kita potong-potong pada titik-titik-perletakan antara. Dengan begitu susunan terdiri dari n batang balok, masing-masing diletakkan di atas dua perletakan (bebas), jadi statis-tertentu. Muatan di atas bangunan menimbulkan putaran-putaran-sudut pada ujung-ujung balok-balok ini, sehingga bangunan tidak utuh lagi di tempat perletakan-perletakan antara tadi, sebab di situ akan terjadi *rengat-rengat* sebagai akibat putaran-putaran-sudut tersebut. Untuk mengembalikan keadaan utuh, atau untuk menutup rengat-rengat tadi, kita mengadakan momen-momen pada ujung-ujung potongan ini. Pada umumnya arah kerja momen-momen ini negatif, yaitu melengkungkan ke atas.



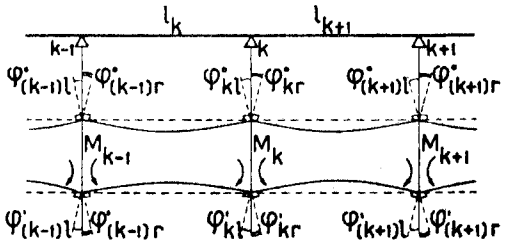
Gambar IV, 4

Momen-momen ini disebut momen-peralihan (lihat M_1, M_2, M_3 .. M_{n-1}). Oleh karena perletakan-perletakan o dan n itu bebas, maka di sini tak ada momen, jadi banyaknya momen-peralihan ada $n + 1 - 2 = n - 1$ dan bangunan ada statis tak tertentu berlipat $(n - 1)$, jika momen-momen peralihan ini dianggap sebagai gaya statis kelebihan. Jika perletakan-perletakan-akhir (o dan n) itu jepitan, di situ akan tertimbul momen-reaksi dan susunan menjadi statis tak tertentu berlipat $(n + 1)$.

§ 3. Persamaan tiga momen.

Kita mempelajari perletakan k pada balok termaksud di dalam § 2. Titik-perletakan k ini diapit oleh lapangan-lapangan l_k dan l_{k+1}.

Akibat dari muatan-luar : Ujung-potongan di sebelah *kiri* titik k (sebagai ujung kanan balok l_k) berputar sudut $\varphi^o_{kl} = \frac{1}{l_k}$ statis momen bidang M^o_k / EI_k pada balok l_k terhadap titik $(k - 1) = (1/l_k) S^o_{k(k-1)}$, dengan M^o_k = ordinat momen pada lapangan l_k.



Gambar IV, 5

Ujung-potongan di sebelah *kanan* titik k (sebagai ujung kiri balok l_{k+1}) berputar-sudut $\varphi^o_{kr} = \frac{1}{l_{k+1}}$ statis-momen bidang M^o_{k+1}/EI_{k+1} pada balok l_{k+1} terhadap titik $(k + 1) = (1/l_{k+1}) S^o_{(k+1)(k+1)}$ jika M^o_{k+1} = ordinat momen lapangan l_{k+1}.

Jadi *rengat* di atas titik-perletakan k menjadi : $\varphi^o_k = \varphi^o_{kl} + \varphi^o_{kr}$.

Tentang index pada S^o demikian : index pertama menunjukkan lapangan dan index kedua, titik-perletakan.

Usaha momen-momen-peralihan.

Putaran-sudut ujung balok di sebelah kiri titik k, yaitu φ'_{kl} disebabkan oleh M_{k-1} dan M_k pada balok l_k; putaran sudut ujung di kanan k, yaitu φ'_{kr} ditimbulkan oleh M_k dan M_{k+1} pada balok l_{k+1}.

$$\varphi'_{kl} = M_{k-1} \cdot \varphi_{k(k-1)} + M_k \cdot \varphi_{kk,l}$$
$$\varphi'_{kr} = M_k \cdot \varphi_{kk,r} + M_{k+1} \cdot \varphi_{k(k+1)}$$

$\varphi_{k(k-1)}$ = faktor-pengaruh atas putaran sudut ujung k berasal dari M_{k-1}.

$\varphi_{kk,l}$ = faktor-pengaruh pribadi dari M_k atas putaran sudut ujung k sebelah kiri (pada balok l_k).

$\varphi_{kk,r}$ = idem ujung k sebelah kanan (pada balok l_{k+1}).

$\varphi_{k(k+1)}$ berasal dari M_{k+1} terhadap ujung k

$$\varphi_{kk} = \varphi_{kk,l} + \varphi_{kk,r}$$

$$\varphi'_k = \varphi'_{kl} + \varphi'_{kr} = M_{k-1}\varphi_{k(k-1)} + M_k(\varphi_{kk,l} + \varphi_{kk,r}) + M_{k+1}\varphi_{k(k+1)}.$$

Oleh karena M_k itu bekerja pada ujung-ujung balok di sebelah kiri dan kanan titik k, maka mempengaruhi nilai φ_k dua kali.

Supaya balok tetap utuh pada perletakan k, maka diharuskan :

$$\varphi'_k = \varphi^o_k$$

$$M_{k-1}\varphi_{k(k-1)} + M_k(\varphi_{kk,l} + \varphi_{kk,r}) + M_{(k+1)} \cdot \varphi_{k(k+1)} = \varphi^o_{kl} + \varphi^o_{kr}$$

Di dalam persamaan ini terdapat tiga momen-peralihan, berhubung dengan ini, dinamakan *persamaan tiga momen* atau *hukum tiga momen.*

Seperti telah dikatakan, arah kerja momen-peralihan itu pada umumnya negatif (membengkok ke atas). Akan tetapi di dalam hitungan dan persamaan

seperti termaksud di atas itu, kita mengambil *nilai-mutlaknya,* jadi positif. Begitu juga tentang tanda untuk φ'. Jika φ° itu disebut positif apabila ter-timbul oleh lengkungan ke bawah, maka φ' itu menjadi negatif. Akan tetapi di dalam persamaan tadi kita juga ambil nilai-mutlaknya saja.

Jadi apabila persamaan-persamaan itu menghasilkan nilai-aljabar positif untuk sesuatu momen-peralihan, ini berarti bahwa momen-peralihan ini bekerja negatif (membengkok balok ke atas).

Supaya tanda-aljabar untuk momen-peralihan ini sesuai juga dengan tanda arah-kerjanya, persamaan dapat tertulis demikian.

$$\varphi'_k + \varphi^o_k = o$$

$$M_{k-1}\varphi_{k(k-1)} + M_k(\varphi_{kk,l} + \varphi_{kk,r}) + M_{k+1}\varphi_{k(k+1)} + \varphi^o_{kl} + \varphi^o_{kr} = o$$

§ 4. Hitungan.

$\varphi_{k(k-1)} = \int_o^{l_k} x(l_k - x)dx/EI_k$ (bandingkan φ_{lr} menurut gambar IV,2)

$\varphi_{kk,l} = \int_o^{l_k} x^2 dx/EI_k$ (bandingkan φ_{rr} menurut gambar IV,2)

$\varphi_{kk,r} = \int_o^{l_{k+1}} (l_{k+1} - x)^2 dx/EI_{k+1}$ (bandingkan φ_{ll} menurut gambar IV,3)

$\varphi_{k(k+1)} = \int_o^{l_{k+1}} x(l_{k+1} - x)dx/EI_{k+1}$ (bandingkan φ_{rl} menurut gambar IV,3)

Jika balok itu prismatis (EI tetap) di masing-masing lapangan :

$$\varphi_{k(k-1)} = \tfrac{1}{6}\, l_k/EI_k$$

$$\varphi_{kk,l} = \tfrac{1}{3} l_k/EI_k \; ; \varphi_{kk,r} = \tfrac{1}{3} l_{k+1}/EI_{k+1}$$

$$\varphi_{k(k+1)} = \tfrac{1}{6} l_{k+1}/EI_{k+1}$$

$\varphi^o_k = 1/EI_k l_k$ statis momennya bidang M° pada balok l_k terhadap titik $(k-1)$ +

$+ 1/EI_{k+1} l_{k+1}$ statis momennya bidang M° pada balok l_{k+1} terhadap titik $(k+1)$

$= 1/EI_k l_k S^o_{k(k-1)} + 1/EI_{k+1} l_{k+1} . S^o_{(k+1)\,(k+1)}$

Persamaan tiga momen menjadi :

$$\tfrac{1}{6} M_{k-1} l_k /EI_k + \tfrac{1}{3} M_k (l_k/EI_k + l_{k+1}/EI_{k+1}) + \tfrac{1}{6} M_{k+1} l_{k+1}/EI_{k+1} = = \varphi^o_{kl} + \varphi^o_{kr}$$

Jika o dan n itu perletakan bebas, kita mendapat mulai dari perletakan 1:

$\tfrac{1}{3} M_1(l_1/EI_1 + l_2/EI_2) + \tfrac{1}{6} M_2 l_2/EI_2 = \varphi^o_{1l} + \varphi^o_{1r}$

$\tfrac{1}{6} M_1 l_2/EI_2 + \tfrac{1}{3} M_2(l_2/EI_2 + l_3/EI_3) + \tfrac{1}{6} M_3 l_3/EI_3 = \varphi^o_{2l} + \varphi^o_{2r}$

$\tfrac{1}{6} M_2 l_3/EI_3 + \tfrac{1}{3} M_3(l_3/EI_3 + l_4/EI_4) + \tfrac{1}{6} M_4 l_4/EI_4 = \varphi^o_{3l} + \varphi^o_{3r}$

$\tfrac{1}{6} M_{k-1} l_k/EI_k + \tfrac{1}{3} M_k (l_k/EI_k + l_{k+1}/EI_{k+1}) + \tfrac{1}{6} M_{k+1} l_{k+1}/EI_{k+1} = \varphi^o_{kl} + \varphi^o_{kr}$

$\tfrac{1}{6} M_{n-2} l_{1n-1}/EI_{n-1} + \tfrac{1}{3} M_{n-1}(l_{n-1}/EI_{n-1} + l_n/EI_n) = \varphi^o_{(n-1)l} + \varphi^l_{(n-1)r}$

Apabila o dan n itu jepitan, terdapat :

$$\tfrac{1}{3} M_o l_1/EI_1 + \tfrac{1}{6} M_1 l_1/EI_1 = \varphi^o_o$$

$$\tfrac{1}{6} M_o\, l_1/EI_1 + \tfrac{1}{3} M_1(l_1/EI_1 + l_2/EI_2) + \tfrac{1}{6} M_2 l_2/EI_2 = \varphi^o_{1l} + \varphi^o_{1r}$$

$$\tfrac{1}{6} M_{n-2} l_{n-1}/EI_{n-1} + \tfrac{1}{3} M_{n-1}(l_{n-1}/EI_{n-1} + l_n/EI_n) + \tfrac{1}{6} M_n l_n/EI_n = = \varphi^o_{(n-1)l} + \varphi^o_{(n-1)r}$$

$$\tfrac{1}{6} M_{n-1} l_n/EI_n + \tfrac{1}{3} M_n l_n/EI_n = \varphi^o_n$$

§ 5. Akibat derajat-panas.

Derajat panas tepi-bawah balok, $t^\circ_b C$ berlainan dengan derajat-panas tepi-atas $t^\circ_a C$. Jika perjalanan beda-panas ini lurus dan $\Delta t = t_b - t_a$ positif, maka menurut bab II § 16 terdapat $= d\varphi_t = \Delta t.\gamma.dx/h$. Dan apabila balok itu simetris terhadap tengah-tengah bentangnya, ujungnya akan berputar $\varphi_t = \int_o^{1/2l} d\varphi_t = \Delta t\,.\,\gamma \int_o^{1/2l} dx/h$, serta jika tinggi balok h itu tetap $\varphi_t = \tfrac{1}{2}\Delta t\,.\,\gamma\,.\,l/h$.

Nilai φ_t ini positif jika $t_b > t_a$ dan dijumlahkan pada nilai φ^o.

Persamaan tiga-momen sebagai akibat dari Δt ini, untuk perletakan k menjadi :

$$M_{k-1}\varphi_{k(k-1)} + M_k(\varphi_{kk,l} + \varphi_{kk,r}) + M_{k+1}\varphi_{k(k+1)=\varphi_{tk}} = \Delta t\,.\,\gamma\left(\int_o^{1/2l_k} dx/h_k + \int_o^{1/2l_{k+1}} dx/h_{k+1}\right)$$

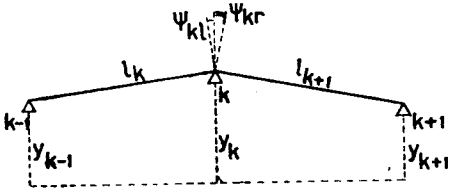
Dan jika balok itu prismatis :

$$\tfrac{1}{6}M_{k-1}l_k/EI_k + \tfrac{1}{3}M_k(l_k/EI_k + l_{k+1}/EI_{k+1}) + \tfrac{1}{6}M_{k+1}l_{k+1}/EI_{k+1} = \tfrac{1}{2}\Delta t\,.\,\gamma(l_k/h_k + l_{k+1}/h_{k+1})$$

Jika adanya Δt ini tidak meliputi seluruh bagian, atau tidak tetap besarnya, maka besaran $\int d\varphi_t$ yaitu luas bidang $d\varphi_t$ dianggap sebagai beban, dan kemudian reaksi-reaksi perletakannya sebagai putaran sudut.

§ 6. Salah stellan.

Beberapa titik-perletakan tak sama tingginya, sehingga tidak terletak pada garis-lurus. Sebagai contoh, titik-titik-perletakan: $(k-1)$, k dan $(k+1)$. Apabila balok di atas k kita potong, ujung-ujung potongan akan berputar sehingga balok rengat. Putaran-putaran sudut ini ada :



Gambar IV, 6

$$\psi_{kl} = (y_k - y_{k-1})/l_k\,, \quad \text{dihitung positif jika } y_k > y_{k-1}$$

$$\psi_{kr} = (y_k - y_{k+1})/l_{k+1}, \quad \text{dihitung positif jika } y_k > y_{k+1}$$

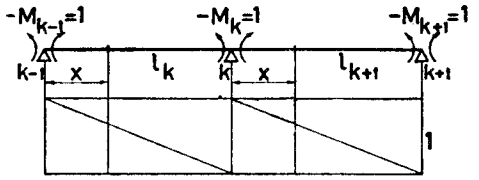
$$\psi_k = \psi_{kl} + \psi_{kr}$$

Nilai ini nanti ditambahkan pada anggauta kanan persamaan tiga momen untuk titik k. Jadi sebagai akibat dari muatan luar, beda panas dan salah stellan terdapat :

$$M_{k-1}\varphi_{k(k-1)} + M_k(\varphi_{kk,l} + \varphi_{kk,r}) + M_{k+1}\varphi_{k(k+1)} = \varphi_k^o + \varphi_{tk} + \psi_k$$

§ 7. Penggunaan faktor pengaruh dalam, α

Harus diperhatikan lagi, bahwa momen-peralihan dengan nilai aljabar yang *positif*



Gambar IV, 7

itu menimbulkan *lengkungan ke atas* (jadi yang disebut lengkungan negatif). Jadi momen-peralihan negatif malahan menimbulkan momen-lengkung positif pada tampang-tampang balok.

Pengaruh terhadap momen-tampang *di lapangan* l_k berasal dari M_{k-1} kita sebut $\alpha_{k(k-1)}$ dan berasal dari M_k, α_{kk}. Pengaruh terhadap momen-tampang *di lapangan* l_{k+1} berasal dari M_k menjadi $\alpha_{(k+1)k}$ dan dari : M_{k+1}, $\alpha_{(k+1)(k+1)}$ (berasal dari M_{k-1} terdapat nol).

Untuk menentukan nilai faktor-faktor α ini, kita mengadakan momen = 1 di atas titik-perletakan yang arah bekerjanya berlawanan dengan arah momen-peralihan di situ (lihat gambar IV,7). Akibat geseran (berasal dari kekuatan-melintang) diabaikan $\alpha_{k(k-1)} = (l_k - x)/l_k$; $\alpha_{kk} = x/l_k$

$\alpha_{(k+1)k} = (l_{k+1} - x)/l_{k+1}$; $\alpha_{(k+1)(k+1)} = x/l_{k+1}$

M°_{xk} = momen tampang X sejauh x dari perletakan kiri pada lapangan l_k yang ditimbulkan oleh muatan-luar.

$M^{\circ}_{x(k+1)}$ = idem pada lapangan l_{k+1}.

$$M_{k-1}\int_o^{l_k}\alpha_{k(k-1)}\alpha_{kk}dx/EI_k + M_k\int_o^{l_k}\alpha^2_{kk}dx/EI_k + M_k\int_o^{k+1}(\alpha^2_{(k+1)k}dx/EI_{k+1}) + M_{k+1}\int_o^{l_{k+1}}\alpha_{k(k+1)}\alpha_{(k+1)(k+1)}dx/EI_{k+1} = \int_o^{l_k}\alpha_{kk}M^o_{xk}dx/EI_k + \int_o^{l_{k+1}}\alpha_{(k+1)k}M^o_{x(k+1)}dx/EI_{k+1}$$

$$\frac{1}{l^2}\,.\,M_{k-1}\int_o^{l_k}x(l_k-x)dx/EI_k + M_k\left(\frac{1}{l_{k_2}}\int_o^{l_k}x^2dx/EI_k + \frac{1}{l^3_{k+1}}\int_o^{l_{k+1}}(l_{k+1}-x)^2dx/EI_{k+1}\right) + \frac{1}{l^3_{k+1}}M_{k+1}\int_o^{l_{k+1}}x(l_{k+1}-x)dx/EI_{k+1} = \frac{1}{l_k}\int_o^{l_k}M^o_{xk}xdx/EI_k + \frac{1}{l_{k+1}}\int_o^{l_{k+1}}M^o_{x(k+1)}(l_{k+1}-x)dx/EI_{k+1} =$$

$$\frac{1}{l_k}\cdot S^o_{k(k-1)} + \frac{1}{l_{k+1}}\cdot S^o_{(k+1)(k+1)} = \varphi^o_{kl} + \varphi^o_{kr}$$

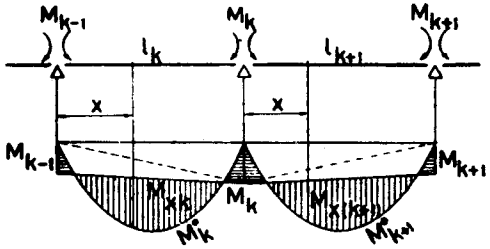
Jadi indentik dengan persamaan :

$$M_{k-1}\varphi_{k(k-1)} + M_k(\varphi_{kk,l} + \varphi_{kk,r}) + M_{k+1}\varphi_{k(k+1)} = \varphi^o_k$$

§ 8. Hukum Castigliano.

Momen pada suatu tampang di lapangan sejauh x dari titik-perletakan $(k-1)$ ada : $M_{xk} = M^o_{xk}$

$$\frac{(l_k - x)}{l_k} M_{k-1} - \frac{x}{l_k} M_k$$



Gambar IV, 8

M^o_{xk} berarti ordinat momen berasal dari muatan luar pada susunan statis tertentu.

Pada lapangan l_{k+1} akan terdapat :

$$M_{x(k+1)} = M^o_{x(k+1)} - \frac{l_{k+1} - x}{l_{k+1}} M_k - \frac{x}{l_{k+1}} M_{k+1}$$

Pekerjaan-lengkung di lapangan-lapangan l_k dan l_{k+1} ada

$$U = U_k + U_{k+1}$$

$$U = \tfrac{1}{2}\int_o^{l_k} M^2_{xk}\,dx/EI_k + \tfrac{1}{2}\int_o^{l_{k+1}} M^2_{x(k+1)}\,dx/EI_{k+1}$$

$$dU/dM_{k-1} = o(1);\ dU/dM_k = o(2);\ dU/dM_{k+1} = o(3)$$

$$(1)\quad \int_o^{l_k} M_{xk}\frac{dM_{xk}}{dM_{k-1}}\,dx/EI_k + \int_o^{l_{k+1}} M_{x(k+1)}\frac{dM_{x(k+1)}}{dM_{k-1}}\,dx/EI_{k+1} = 0$$

$$(2)\quad \int_o^{l_k} M_{xk}\frac{dM_{xk}}{dM_k}\,dx/EI_k + \int_o^{l_{k+1}} M_{(xk+1)}\frac{dM_{x(k+1)}}{dM_k}\,dx/EI_{k+1} = 0$$

$$(3)\quad \int_o^{l_k} M_{xk}\frac{dM_{xk}}{dM_{k+1}}\,dx/EI_k + \int_o^{l_{k+1}} M_{x(k+1)}\frac{dM_{x(k+1)}}{dM_{k+1}}\,dx/EI_{k+1} = 0$$

$$dM_{xk}/dM_{k-1} = -\frac{l_k - x}{l_k};\ dM_{x(k+1)}/dM_{k-1} = 0$$

$$dM_{xk}/dM_k = -x/l_k;\ dM_{x(k+1)}/dM_k = -(l_{k+1} - x)/l_{k+1}$$

$$dM_{xk}/dM_{k+1} = 0;\ dM_{x(k+1)}/dM_{k+1} = -x/l_{k+1}$$

Di sini kita mempelajari titik-perletakan k, jadi akan menguraikan persamaan (2) saja, yang berasal dari $dU/dM_k = 0$

$$(2)\quad \int_o^{l_k}\left(M^o_{xk} - \frac{(l_k - x)}{l_k}M_{k-1} - \frac{x}{l_k}M_k\right)\cdot\frac{x}{l_k}\,dx/EI_k -$$

$$\int_o^{l_{k+1}}\left(M^o_{x(k+1)} - \frac{l_{k+1} - x}{l_{k+1}}M_k - \frac{x}{l_{k+1}}M_{k+1}\right)\frac{(l_{k+1} - x)}{l_{k+1}}\cdot dx/EI_{k+1} = 0$$

$$\frac{1}{l_k^2}M_{k-1}\int_o^{l_k} x(l_k - x)dx/EI + M_k\left(\frac{1}{l_k^2}\int_o^{l_k} x^2 dx/EI_k + \right.$$

$$\left.\frac{1}{l^2_{k+1}}\int_o^{l_{k+1}}(l_{k+1} - x)^2 dx/EI_{k+1}\right) + \frac{1}{l^2_{k+1}}M_{k+1}\int_o^{l_{k+1}} x(l_{k+1} - x)dx/EI_{k+1} =$$

$$\frac{1}{l_k}\int_o^{l_k} M^o_{xk}x\,dx/EI_k + \frac{1}{l_{k+1}}\int_o^{l_{k+1}} M^o_{x(k+1)}(l_{k+1} - x)dx/EI_{k+1}$$

Jadi identik dengan pendapat di dalam § 7 tadi.

§ 9. Reaksi-perletakan sebagai gaya kelebihan.

Susunan statis-tertentu diambil balok di atas dua perletakan, misalnya di atas titik o dan titik n (menghapuskan kemungkinan bekerjanya reaksi-reaksi perletakan-antara). Reaksi-reaksi kelebihan ini kita namakan : $X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots X_k \ldots\ldots X_{n-1}$.

δ^o_1 = turunnya titik pegangan X_1 pada susunan statis tertentu sebagai akibat dari muatan-luar.

δ^o_2 = idem idem titik pegangan X_2

δ^o_k = idem idem titik pegangan X_k

Mempergunakan faktor-faktor pengaruh-luar :

$$(1)\quad X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \ldots . X_k\delta_{1k} + \ldots . X_{n-1}\delta_{1(n-1)} = \delta^o_1$$

$$(2)\quad X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \ldots . X_k\delta_{2k} + \ldots . X_{n-1}\delta_{2(n-1)} = \delta^o_2$$

. . . . . .

$$(k) \qquad X_1\delta_{k1} + X_2\delta_{k2} + X_3\delta_{k3} + \ldots . X_k\delta_{kk} + \ldots . X_{n-1}\delta_{k(n-1)} = \delta^o_k$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(n-1) \ldots . X_1\delta_{(n-1)1} + X_3\delta_{(n-1)2} + X_3\delta_{(n-1)3} + \ldots . X_k\delta_{(n-1)k} + \ldots . X_{n-1}\,\delta_{(n-1)(n-1)} = \delta^o_{n-1}$$

Kita mendapat $(n-1)$ persamaan dengan $(n-1)$ besaran tak terketahui (anu). Perjalanan ini lebih sukar, sebab tiap persamaan mengandung $(n-1)$ besaran tak terketahui.

§ 10. Menghitung φ°.

Di sini dianggap bahwa balok mempunyai EI yang tetap.

a. Muatan terpusat P sejauh a dari perletakan-kiri.

S°_{k-1} = statis-momennya bidang M° terhadap titik $(k-1)$ =

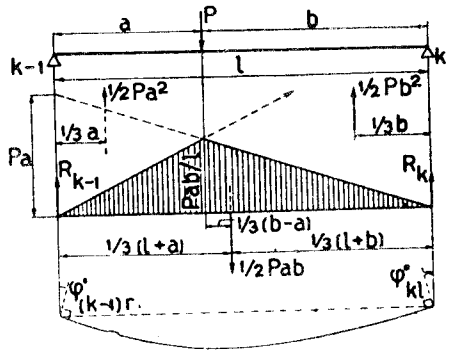
$$= \tfrac{1}{2}Pal\,.\,\tfrac{1}{3}l - \tfrac{1}{2}Pa^2\,.\,\tfrac{1}{3}a = \tfrac{1}{6}Pa(l^2 - a^2) = \tfrac{1}{6}Pab(l+a)$$

S^o_k = idem terhadap titik $k = \tfrac{1}{2}Pbl.\tfrac{1}{3}l - \tfrac{1}{2}Pb^2.\tfrac{1}{3}b =$

$= \tfrac{1}{6}Pb(l^2 - b^2) = \tfrac{1}{6}Pab(l+b)$

$\varphi^o_{(k-1)r} = \dfrac{1}{EIl}S^o_k = \tfrac{1}{6}Pab(l+b)/EIl = \tfrac{1}{6}Pb(l^2-b^2)/EIl$

$\varphi^o_{kl} = \dfrac{1}{EIl}S^o_{k-1} = \tfrac{1}{6}Pab(l+a)/EIl = \tfrac{1}{6}Pa(l^2-a^2)/EIl.$



Gambar IV, 9

Cara lain : bidang momen seluas ½ Pab dianggap sebagai bidang muatan yang resultantanya (garis beratnya) terletak sejauh $\frac{1}{3}(b-a)$ dari garis kerja P.

Reaksi-reaksi perletakannya, $R_{k-1} = \dfrac{1}{l}\,.\,\tfrac{1}{2}Pab.\,\tfrac{1}{3}(l+b)$ dan $R_k = \dfrac{1}{l}\,.\,\tfrac{1}{2}Pab\,.\,\tfrac{1}{3}(l+a)$ melukiskan $EI\,\varphi^o_{k-1}$ dan $EI\varphi^o_k$.

b. Beberapa muatan terpusat.

$P_1, P_2, P_3 \ldots .$ berturut-turut sejauh $a_1, a_2, a_3, \ldots .$ dari perletakan kiri.

$$\varphi^o_{(k-1)r} = \frac{1}{6EIl}\Sigma\,Pab(l+b) = \frac{1}{6EIl}\{P_1a_1b_1(l+b_1) + P_2a_2b_2(l+b_2) +$$

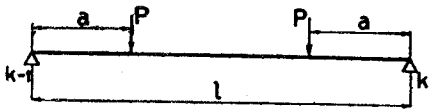
$$+ P_3a_3b_3(l+b_3) + \ldots .\} = \frac{1}{6EIl}\Sigma\,Pb\,(l^2 - b^2)$$

$$\varphi^o_{kl} = \frac{1}{6EI}\Sigma\,Pab(l+a) = \frac{1}{6EIl}\{P_1a_1b_1(l+a_1) + P_2a_2b_2(l+a_2) +$$

$$+ P_3a_3b_3(l+a_3) + \ldots .\} = \frac{1}{6EIl}\Sigma\,Pa\,(l^2 - a^2)$$

Kejadian-khusus: dua muatan sama, P simetris masing-masing sejauh a dari perletakan.

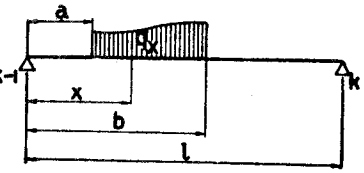
$$\varphi^o_{(k-1)r} = \varphi^o_{kl} = \frac{1}{6EIl}Pab\;\{(l+a) + (l+b)\} = \frac{1}{2EI}Pab$$



Gambar IV, 10

P di tengah-tengah : $Q^\circ_l = Q^\circ_r = Pl^2/IGEI$

c. Muatan terbagi q_x (sembarang tak tetap).
Di dalam pendapat pada kejadian a di atas, P diganti dengan $dP = q_x\,dx$, a diganti dengan x dan b dengan $(l-x)$



Gambar IV, 11

$$\varphi^o_{(k-1)r} = \frac{1}{6EIl}\int_a^b x(l-x)(2l-x)\,q_x\,dx = \frac{1}{6EIl}\int_a^b (x^3 - 3lx^2 + 2l^2x)q_x\,dx$$

$$\varphi^o_{kl} = \frac{1}{6EIl}\int_a^b x(l^2 - x^2)q_x dx = \frac{1}{6EIl}\int_a^b (l^2x - x^3)q_x\,dx$$

d. Jika q_x = tetap = q menjadi :

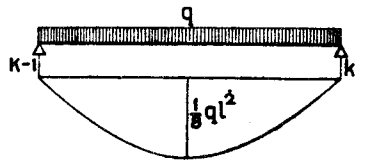
$$\varphi^o_{(k-1)r} = \frac{q}{6EIl}\int_a^b (x^3 - 3lx^2 + 2l^2x)dx \text{ dan } \varphi^o_{kl} = \frac{q}{6EIl}\int_a^b (l^2x - x^3)dx$$

Kejadian khusus, *muatan terbagi rata penuh, q*. Jadi $a = 0$ dan $b = l$.

$$\varphi^o_{(k-1)r} = \frac{q}{6EIl}\int_o^l (x^3 - 3lx^2 + 2l^2x)dx =$$

$\frac{1}{24}ql^3/EI$;

$$\varphi^o_{kl} = \frac{q}{6EIl}\int_o^l (l^2x - x^3)dx = \tfrac{1}{24}ql^3/EI$$



Gambar IV, 12

Sebagai kontrol harus terdapat $\varphi^o_{(k-1)r} = \varphi^o_{kl}$.

Juga terdapat secara langsung dengan perantaraan bidang-momen (gambar IV,12) $M^o_x = \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2$ berjalan serupa parabol

Max $M^o_x = M^o_{x=1/2l} = \frac{1}{8}ql^2$. Luas bidang M^o ada $\frac{2}{3}l.\frac{1}{8}ql^2 = \frac{1}{12}ql^3$ dan statis momennya terhadap $(k-1)$ atau k ada $\frac{1}{12}ql^3.\frac{1}{2}l = \frac{1}{24}ql^4$

$$\varphi^o_{(k-1)r} = \varphi^o_{kl} = \frac{1}{EIl}\cdot\tfrac{1}{24}ql^4 = \tfrac{1}{24}ql^3/EI$$

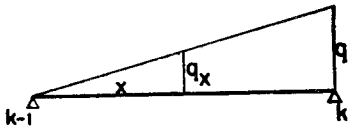
separoh bentang bagian kiri dibebani, mengisi $a = 0, b = \frac{1}{2}l$,

terdapat $Q^\circ_{(k-1)r} = 9\,ql^3 / 384\,EI$; $Q_{kl} = 7\,ql^3 / 384\,EI$.

e. Muatan serupa segi-tiga, penuh dengan ordinat-maksimum q diatas titik perletakan; $q_x = q.x/l$

$$\varphi^o_{(k-1)r} = \frac{1}{6EIl}\int_o^l (x^3 - 3lx^2 + 2l^2x)q_x\,dx =$$

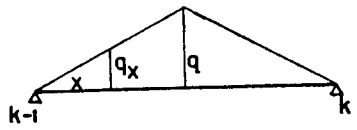
$$\frac{q}{6EIl^2}\int_o^l (x^4 - 3lx^3 + 2l^2x^2)\,dx =$$



Gambar IV, 13

$\frac{7}{360}\,ql^3/EI$; $\varphi^o_{kl} = \frac{1}{6EIl}\int_o^l (l^2x - x^3)q_x dx = \frac{q}{6EIl^2}\int_o^l (l^2x^2 - x^4)dx = \frac{1}{45}ql^3/EI$

f. Muatan penuh segi tiga dengan puncak di tengah-tengah balok



Gambar IV, 14

$$q_x = q\,.\,x/\tfrac{1}{2}l = 2qx/l.$$

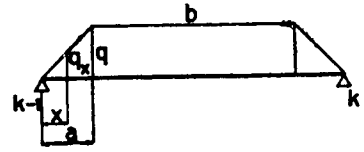
$$\varphi^o_{(k-1)r} = \varphi^o_{kl} = \frac{1}{6EIl}\int_o^{1/2l} (x^3 - 3lx^2 +$$

$$2l^2x)q_x\,dx + \frac{1}{6EIl}\int_o^{1/2l} (l^2x - x^3)q_x\,dx =$$

$$\frac{2q}{6EIl^2}\int_o^{1/2l} (3l^2x^2 - 3lx^3)dx = \frac{q}{EIl^2}\int_o^{1/2l} (l^2x^2 - lx^3)dx = \tfrac{5}{192}\,ql^3/EI$$

g. Muatan serupa trapezium simetris; $q_x = qx/a$

$$\varphi^o_{(k-1)r} = \varphi^o_{kl} = \frac{1}{6EIl}\int_o^a (x^3 - 3lx^2 + 2l^2x)q_x dx +$$



Gambar IV, 15

$$\frac{1}{6EIl}\int_o^a (l^2x - x^3)q_x dx +$$

$$\frac{1}{6EIl}\int_a^{l-a} q(x^3 - 3lx^2 + 2l^2x)\,dx \text{ atau } +$$

$$\frac{1}{6EIl}q\cdot\int_o^b (l^2x - x^3)dx \text{ (keadaan simetris)}$$

$$\varphi^o_{(k-1)r} = \frac{q}{6EIl}\left\{\frac{1}{a}\int_o^a 3(l^2x^2 - lx^3)dx + \int_a^{l-a}(l^2x - x^3)dx = \right.$$

$$\frac{q}{6EI}\{l^2a^2 - \tfrac{3}{4}a^4 + \tfrac{1}{2}l^2(l-a)^2 - \tfrac{1}{4}(l-a)^4 + - \tfrac{1}{2}l^2a^2 + \tfrac{1}{4}a^4\} =$$

$$\frac{q}{24EI}(l^3 - 2la^2 + a^3) = \frac{q}{24EI}(l-a)\{l^2 + a(l-a)\} =$$

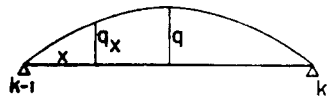
$$\frac{q}{192EI}(l+b)(5l^2 - b^2)$$

$$b = l - 2a$$

Sebagai kontrol: untuk $a = 0$ atau $b = l$, terdapat $\frac{1}{24}ql^3/EI$ (kejadian d penuh)

$a = \frac{1}{2}l$ atau $b = 0$, terdapat $\frac{5}{1024}ql^3/EI$ (kejadian f)

h. Muatan berupa parabol dengan puncak di tengah = q.



Gambar IV,16

$$q_x = x(l-x)4q/l^2$$

$$\varphi^o_{(k-1)r} = \frac{4q}{6EIl^3}\int_o^l (x^3 - 3lx^2 +$$

$$2\,l^2x)\,x\,(l-x)\,dx = \frac{2q}{3EI\,l^3}\int_o^l (-x^5 + 4\,lx^4 - 5l^2\,x^3 + 2\,l^2\,x^3)\,dx = \frac{1}{30}\,ql^3/EI$$

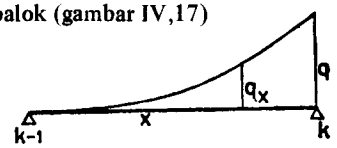
$$Q^\circ_{kl} = \frac{4q}{GE\,I\,l^3}\int_o^l (l^2\,x - x^3)\,x\,(l-x)^\circ\,dx = \frac{2q}{3\,EI\,l^3}\int_o^l (x^5 - lx^4 - l^2x^3 + l^3\,x^2)\,dx =$$

$$\frac{1}{30}\,ql^3/EI$$

i. Muatan parabolis dengan puncak di atas ujung balok (gambar IV,17)

$$q_x = q(x/l)^2 = qx^2/l^2$$

$$\varphi^o_{(k-1)r} = \frac{q}{6EIl^3}\int_o^l (x^3 - 3lx^2 +$$



Gambar IV, 17

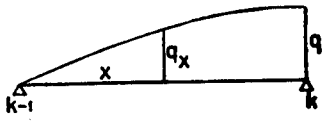
$$2l^2x)x^2dx = \frac{q}{6EIl^3}\int_o^l (x^5 - 3lx^4 + 2l^2x^3)dx = \tfrac{1}{60}ql^3/EI$$

$$\varphi^o_{kl} = \frac{q}{6EIl^3}\int_o^l (l^2x - x^3)x^2dx = \tfrac{1}{12}\,ql^3/EI$$

j. Seperti i, tetapi terbalik.

$q_x = x(2l - x)4q/(2l)^2 = (2lx - x^2)q/l^2$

$$\varphi^o_{k(-1)r} = \frac{q}{6EIl^3}\int_o^l (x^3 - 3lx^2 + 2l^2x)$$



Gambar IV, 18

$$(2lx - x^2)dx = \frac{q}{6EIl^3}\int_o^l (-x^5 + 5lx^4 - 8l^2x^3 + 4l^3x^2)\,dx = \tfrac{1}{360}ql^3/EI$$

$$\varphi^o_{kl} = \frac{q}{6EIl^3}\int_o^l (l^2x - x^3)(2lx - x^2)dx = \frac{q}{6EIl^3}\int_o^l x^5 - 2lx^4 - l^2x^3 + 2l^3x^2)dx = \tfrac{11}{360}ql^3/EI$$

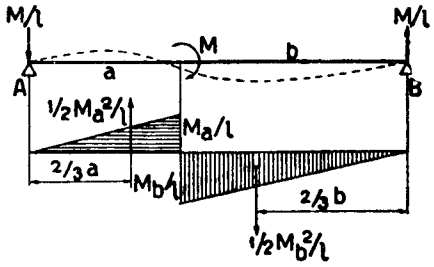
Kombinasi i dan j membentuk muatan penuh terbagi rata q. Sebagai kontrol,

$\varphi^o_{(k-1)r}$ kejadian $i + \varphi^o_{kl}$ kejadian $j = (\frac{1}{90} + \frac{11}{360})ql^3/EI = \frac{1}{24}ql^3/EI$
φ^o_{kl} kejadian $i + \varphi^o_{(k-1)r}$ kejadian $j = (\frac{1}{72} + \frac{1}{36})ql^3/EI = \frac{1}{24}ql^3/EI$

k. Momen M antara kedua-dua ujung.

$$\varphi^o_a = \frac{1}{EIl}\left\{-\tfrac{1}{2}M\frac{a^2}{l}(\tfrac{1}{3}a + b) + \tfrac{1}{2}M\frac{b^2}{l}\cdot\tfrac{2}{3}b\right\} = -\frac{Ml}{6EI}(1 - 3\,b^2/l^2)$$

$$\varphi^o_b = \frac{Ml}{6EI}(1 - 3\,a^2/l^2)$$



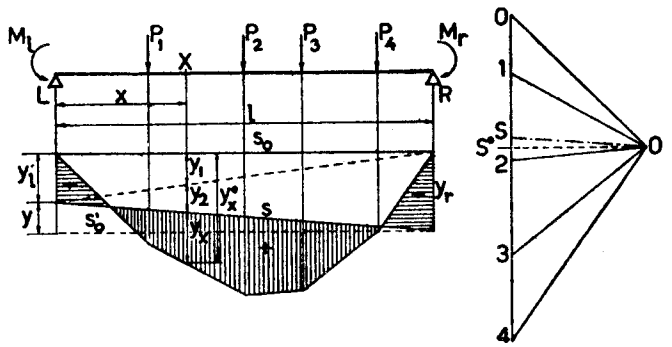
Gambar IV, 19

§ 11. **Poligon-batang dan momen-peralihan.**

Di dalam susunan statis-tertentu kita menggambar gambar-kutub dengan tangan H serta polygon-batangnya dengan garis s_o sebagai garis penutup (gambar IV,20).

Kemudian pada polygon-batang ini kita menggambar $y_l = M_l/H$ dan $y_r = M_r/H$. Di sini M_l berarti momen-peralihan di atas perletakan L dan M_r berarti momen-peralihan di atas perletakan R. Untuk sesuatu tampang X sejauh x dari L terdapat momen sebesar :

$$M_x = M^o_x - \left(\frac{l-x}{l}\right)M_l - \frac{x}{l}M_r$$
$$= H.\left\{y^o_x - \left(\frac{l-x}{l}\right)y_l + \frac{x}{l}y_r\right\}$$
$$= H.\{y^o_x - (y_1 + y_2)\}$$
$$= H.y_x$$



Gambar IV, 20

$(y_1 + y_2)$ = ordinat antara garis s_o dan garis s.
y_x = ordinat antara garis s dan polygon-batang.

R^o_l = reaksi perletakan L disusunan statis-tertentu = panjang garis $o - S^o$ digambar kutub.

R_l = reaksi perletakan L ditimbulkan oleh M_l dan M_r

$$= M_l/l - M_r/l = \frac{H}{l}(y_l - y_r) = -\frac{H}{l}y$$

Pada gambar kutub ditarik garis OS // garis s.

$\triangle\, OS^oS \sim \triangle\, s'_o\ ys.$

$SS^o : y = H : l$
$SS^o = Hy/l = -R'_l$ atau $R'_l = -S_oS$
$R_l = R^o_l + R'_l = oS^o - S^oS = oS.$

Secara begitu kita mendapat : $R_r = R^o_r + R'_r = 4S.$

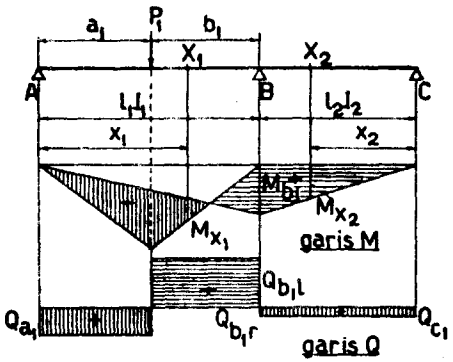
Jadi garis s itu betul garis-penutup di dalam susunan statis tak tertentu.

B. BALOK DI ATAS TIGA PERLETAKAN.

§ 12. Menggunakan persamaan tiga momen.

Balok adalah prismatis atau mempunyai EI tetap di masing-masing lapangan.

a. Muatan terpusat.



Gambar IV, 21

1. *Muatan P_1 berdiri di lapangan AB sejauh a_1 dari titik A. Momen-peralihan disebut M_{b1}. Selanjutnya lihat* § 10 ayat a.

$$\tfrac{1}{3}M_{b1}(l_1/EI_1 + l_2/EI_2) = \tfrac{1}{6}P_1a_1b_1(l_1 + a_1)/l_1EI_1$$

$$2M_{b1}\frac{l_1}{EI_1}\left(1 + \frac{l_2}{l_1}\frac{I_1}{I_2}\right) = P_1a_1(l_1^2 - a_1^2)/l_1EI_1$$

$$M_{b1} = \tfrac{1}{2}P_1\frac{a_1(l_1^2 - a_1^2)}{l_1^2\{1 + (l_2/l_1)\,(I_1/I_2)\}} = P_1 \cdot \gamma_1$$

Pada tampang X_1 sejauh x_1 dari A terdapat : $M_{x1} = M^{\circ}_{x1} - M_{b1}(x_1/l_1)$

Untuk tampang X_2 sejauh x_2 dari C menjadi $M_{x2} = - M_{b1}(x_2/l_2)$.

Reaksi-reaksi perletakan :

$$A_1 = P_1b_1/l_1 - M_{b1}/l_1 = (P_1b_1 - M_{b1})/l_1$$

$$B_1 = P_1a_1/l_1 + M_{b1}/l_1 + M_{b1}/l_2 = P_1 - A_1 + M_{b1}/l_2$$

$$C_1 = - M_{b1}/l_2$$

$$A_1 + B_1 + C_1 = P_1$$

Gaya-gaya lintang pada A, B dan C :

$$Q_{a1} = A_1$$

$$(Q_{b1})_l = A_1 - P_1 \text{ (negatif)}$$

$$(Q_{b1})_r = M_{b1}/l_2$$

$$Q_{c1} = C_1 = - M_{b1}/l_2$$

Kejadian-khusus :

$$l_1 = l_2 = l;\ I_1 = I_2 = I;\ a_1 = a.$$

$$M_{b1} = \tfrac{1}{4}\,Pa(l^2 - a^2)/l^2 = \tfrac{1}{4}\,Pa\{(1 - (a/l)^2\}$$

$$A_1 = P\frac{(l-a)}{l} \div \frac{M_b}{l} = \frac{(4l^3 - 5l^2a + a^3)}{4l^3}P$$

$$B_1 = P\frac{a}{l} + 2\frac{M_b}{l} = \frac{a(3l^2 - a^2)}{2l^3}P$$

$$C_1 = -M_b/l = \div\frac{a(l^2 - a^2)}{4l^3}P$$

$$A_1 + B_1 + C_1 = P$$

Jika $a = \tfrac{1}{2}l$ menjadi $M_{b1} = \frac{3}{16}\,Pa = \frac{3}{32}\,Pl$

$$M_{x1} = \tfrac{1}{2}l = \tfrac{1}{4}\,Pl - \tfrac{1}{2}\,M_{b1} = \frac{13}{64}\,Pl$$

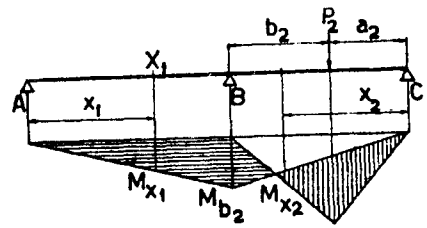
2. *Muatan P_2 sejauh a_2 dari C di lapangan BC* (gamb. IV, 22).

$$\tfrac{1}{3}M_{b2}(l_1/EI_1 + l_2/EI_2) = \tfrac{1}{6}P_2a_2(l_2^2 - a_2^2)/l_2EI_2$$

$$M_{b2} = \tfrac{1}{2}P_2\frac{(l_2^2 - a_2^2)}{l_2^2\{1 + (l_1/l_2)\,(I_2/I_1)\}} = P_2 \cdot \gamma_2$$

$$M_{x2} = M^{\circ}_{x2} - M_{b2}(x_2/l_2)$$

$$M_{x1} = - M_{b2}(x_1/l_1), \text{ d.s.t.}$$



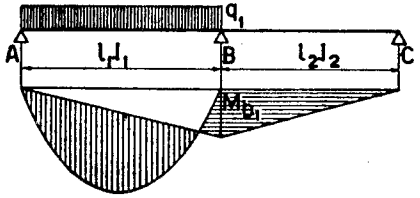
Gambar IV, 22

3. *Muatan-muatan $P_{11}, P_{12}, P_{13} \ldots\ldots P_{1n}$* di atas bentang AB masing-masing sejauh $a_{11}, a_{12}, a_{13} \ldots a_{1n}$ dari A dan $P_{21}, P_{22}, P_{23} \ldots P_{2n}$ di atas CB masing-masing sejauh $a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots a_{2n}$ dari C.

$$M_b = \sum^{l_1} P_1\gamma_1 + \sum^{l_2} P_2\gamma_2$$

b. Muatan terbagi rata, q (lihat § 10, d).

1. *Lapangan AB dimuati penuh dengan* q_1.



Gambar IV, 23

$$\tfrac{1}{3}M_{b1}(l_1/EI_1 + l_2/EI_2) = \tfrac{1}{24}q_1l_1^3/EI_1$$

$$M_{b1} = \frac{\frac{1}{8}q_1l_1^2}{1 + (l_2/l_1)(I_1/I_2)}$$

Juga terdapat dengan cara mengintegrasi hasil kejadian a, 1 diatas, dengan $dP_1 = q_1\,da_1$ (nilai a_1 menjadi variabel).

$$M_{b1} = q_1\int_o^{l_1}\gamma_1 da_1 = \frac{q_1}{2\{1 + (l_2/l_1)(I_1/I_2)\}l_1^2}\int_o^{l_1} a_1(l_1^2 - a_1^2)\,da_1 =$$

$$\frac{\frac{1}{8}\,q_1\,l_1^2}{1 + (l_2/l_1)(I_1/I_2)}$$

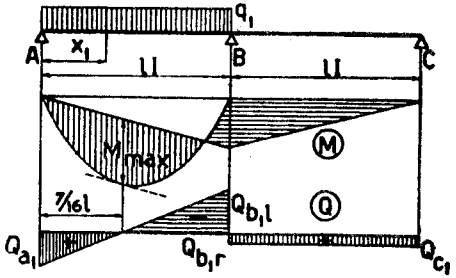
$A_1 = \tfrac{1}{2}q_1l_1 - M_{b1}/l_1$

$B_1 = \tfrac{1}{2}q_1l_1 + M_{b1}/l_1 + M_{b1}/l_2$

$C_1 = -M_{b1}/l_2$

Kejadian khusus :

$l_1 = l_2 = l$; $I_1 = I_2 = I$ (gambar IV, 24) $M_{b1} = \frac{1}{16}\,q_1l_2^2$



Gambar IV, 24

$A_1 = \frac{7}{16}ql$; $B_1 = \frac{5}{8}ql$; $C_1 = -\frac{1}{16}ql$

$Q_{a1} = \frac{7}{16}ql$; $(Q_{b1})_l = -\frac{9}{16}ql$; $(Q_{b1})_r = +\frac{1}{16}ql = \div R_{c1}$

$M_{x1} = M^o_{x1} - M_{b1}(x_1/l) = q(\frac{1}{2}lx_1 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{16}lx_1) = q(\frac{7}{16}l\,x_1 - \frac{1}{2}x_1^2)$

Berapakah x_1 supaya M_{x1} menjadi maksimum ?

$$dM_{x1}/dx_1 = 0;\ \tfrac{7}{16}l - x_1 = 0;\ x_1 = \tfrac{7}{16}l$$

$$M_{max} = q\{\tfrac{7}{16}l\cdot\tfrac{7}{16}l - \tfrac{1}{2}(\tfrac{7}{16})^2\} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{7}{16})^2ql^2 = \tfrac{49}{512}ql^2 = \tfrac{1}{2}qx_1^2$$

Juga terdapat di mana $Q_{x_1} = 0$.

$$Q_{x1} = A_1 - qx_1 = \tfrac{7}{16}ql - qx_1 = 0;\ x_1 = \tfrac{7}{16}l$$

2. *Muatan di lapangan BC,* q_2 .

$$\tfrac{1}{3}M_{b2}(l_1/EI_1 + l_2/RI_2) = \tfrac{1}{24}q_2l_2^3/EI_2$$

$$M_{b2} = \frac{\frac{1}{8}q_2l_2^2}{1 + (l_1/l_2)(I_2/I_1)}$$

3. *Kombinasi* q_1 *dan* q_2.

$$M_b = M_{b1} + M_{b2} = \frac{\frac{1}{8}q_1l_1^2}{1 + (l_2/l_1)(I_1/I_2)} + \frac{\frac{1}{8}q_2l_2^2}{1 + (l_1/l_2)(I_2/I_1)}$$

Atau juga secara langsung :

$$\tfrac{1}{3}M_b(l_1/EI_1 + l_2/EI_2) = \tfrac{1}{24}q_1l_1^3/EI_1 + \tfrac{1}{24}q_2l_2^3/EI_2$$

$$M_b = \frac{\frac{1}{8}q_1l_1^3/EI_1}{l_1/EI_1 + l_2/EI_2} + \frac{\frac{1}{8}q_2l_2^3/EI_2}{l_1/EI_1 + l_2/EI_2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{8}q_1l_1^2}{1 + (l_2/l_1)(I_1/I_2)} + \frac{\frac{1}{8}q_2^2l}{1 + (l_1/l_2)(I_2/I_1)}$$

Kejadian khusus : $l_1 = l_2 = l$; $I_1 = I_2 = I$; $q_1 = q_2 = q$ (Gb. IV,25).

$\frac{2}{3}M_bl/EI = 2\cdot\frac{1}{24}\cdot ql^3/EI$

$M_b = \frac{1}{8}ql^2$

$M_x = \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2 - M_b\cdot x/l =$

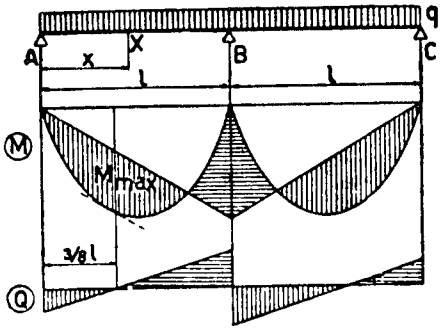
$= (\frac{3}{8}x - \frac{1}{2}x^2)q$

Supaya M_x menjadi extrem, $dM_x/dx = 0$.

$\frac{3}{8}l - x = 0;\ x = \frac{3}{8}l = x_o$

$M_{max} = \frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{8})^2ql^2 = \frac{9}{128}ql^2 = \frac{1}{2}qx_o^2$

$A = \frac{1}{2}ql - M_b/l = (\frac{1}{2} - \frac{1}{8})ql = \frac{3}{8}ql$



Gambar IV, 25

$$B = 2(\tfrac{1}{2}ql + M_b/l) = 2 \cdot \tfrac{5}{8}ql = \tfrac{5}{4}ql$$

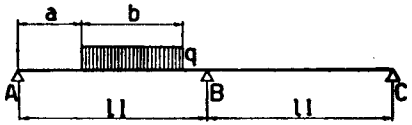
$$(Q_b)_l = (Q_b)_r = \tfrac{5}{8}ql$$

$$Q_x = A - qx = \tfrac{3}{8}ql - qx$$

Di mana $Q_x = 0$, di situ M_x menjadi extrem.

$$\tfrac{3}{8}ql - qx = 0; \quad x = \tfrac{3}{8}\,l \text{ (lihat atas)}$$

Muatan terbagi rata q, tak penuh (gambar IV, 26). Lihat juga § 10, **d** rumus φ_k^c.



Gambar IV, 26

$$\tfrac{2}{3}M_{b1}l/EI = \frac{q}{6EIl}\int_a^{a+b}(l^2x - x^3)dx =$$

$$= \frac{q}{6EIl}\left[\tfrac{1}{2}l^2\{(a+b)^2 - a^2\} - \tfrac{1}{4}\{(a+b)^4 - a^4\}\right]$$

$$M_{b1} = \tfrac{1}{4}\frac{q}{l^2}\left[\tfrac{1}{2}l^2\{(a+b)^2 - a^2\} - \tfrac{1}{4}\{(a+b)^4 - a^4\}\right]$$

Untuk: $a = 0$ dan $b = l$ terdapat: $M_{b1} = \frac{1}{16}ql^2$ (lihat **b** 1 kejadian khusus :

$a = 0$ dan $b = \frac{1}{2}l$ terdapat:

$$M_{b1} = \tfrac{1}{4}\frac{q}{l^2}\{\tfrac{1}{2}l^2 \cdot (\tfrac{1}{2}l)^2 - \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2})^4\} = \tfrac{7}{256}ql^2$$

$a = \frac{1}{2}l$ dan $b = l$ terdapat:

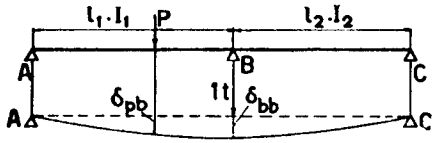
$$M_{b1} = \tfrac{1}{4}\frac{q}{l^2}\left[\tfrac{1}{2}l^2\{l^2 - (\tfrac{1}{2}l)^2\} - \tfrac{1}{4}\{(l^4 - (\tfrac{1}{2}l)^4\}\right] = \tfrac{9}{256}ql^2$$

Sebagai kontrol, jumlah dua pendapat terakhir ini harus sama dengan pendapat pertama.

Jika muatan itu terbagi akan tetapi tidak rata, kita dapat memakai pendapat φ_{kl}^o menurut § 10, c jika yang dimuat itu lapangan AB dari pendapat $\varphi_{(k-1)r}^o$ untuk muatan di lapangan BC.

§ 13. Reaksi perletakan sebagai gaya kelebihan.

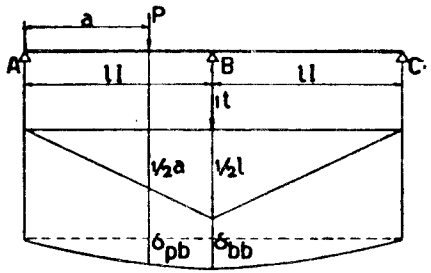
Kita memilih $B = X_b$ sebagai gaya statis kelebihan. Susunan statis tertentu ialah balok AC di atas dua titik perletakan dengan bentang $l = l_1 + l_2$ (gb. IV, 27). Setelah perletakan dihilangi, kita mengadakan kekuatan $1t$ ke bawah pada titik B ini. Titik B akan turun sejauh δ_{bb} dan titik di mana nanti muatan P berdiri, turun sejauh δ_{pb}. Sebagai akibat dari P ini, terdapat: $X_b = P\delta_{pb}/\delta_{bb}$.



Gambar IV, 27

Akan tetapi menghitung nilai-nilai δ_{bb} dan δ_{pb} ini tidak mudah, apalagi jika $I_1 \neq I_2$.

Perjalanan ini akan kita tunjukkan di dalam keadaan yang mudah, yaitu $l_1 = l_2 = l$ dan $I_1 = I_2 = I$. Muatan $1t$ di titik B pada balok AC menimbulkan bidang-momen berupa segitiga dengan ordinat-puncak $\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot (2l) = \frac{1}{2}l$.



Gambar IV, 28

δ_{bb} = turun titiknya B =
$= \frac{1}{48}(2l)^3/EI = \frac{1}{6}l^3/EI$.

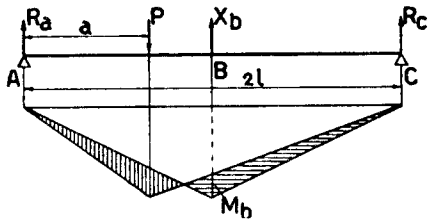
δ_{pb} dapat dihitung sebagai momen di titik sejauh a dari A jika $\frac{1}{EI}$ bidang momen ini dianggap sebagai muatan. Luas bidang momen ini ada $\frac{1}{2} \cdot (2l) \cdot \frac{1}{2}l = \frac{1}{2}l^2$

$$EI\delta_{pb} = \tfrac{1}{4}l^2a - \tfrac{1}{4}a^2 \cdot \tfrac{1}{3}a = \tfrac{1}{4}a(l^2 - \tfrac{1}{3}a^2)$$

$$\delta_{pb} = \frac{1}{4EI}a(l^2 - \tfrac{1}{3}a^2)$$

$$X_b = P\delta_{pb}/\delta_{bb} = \frac{\frac{1}{4}a(l^2 - \frac{1}{3}a^2)}{\frac{1}{6}l^3}P = \tfrac{1}{2}\frac{a(3l^2 - a^2)}{l^3}P$$ (bandingkan dengan hasil § 12, **a** 1 dengan $l_1 = l_2 = l$.).

Pada balok AC dengan bentang $2l$ bekerja sekarang muatan P (ke bawah) sejauh a dari A dan kekuatan $X_b = \frac{a(3l^3 - a^2)}{2l^3} P$ ke atas di tengah-tengah AC (di titik B), gambar IV, 29. Dengan begitu pembagian gaya-gaya di dalam bangunan sudah dapat diketahui :



Gambar IV, 29

$$A = \frac{(2l - a)}{2l} P - \tfrac{1}{2} X_b = \frac{(4l^3 - 5l^2 a + a^3)}{4l^3} P \text{ (lihat § 12, a 1 terakhir).}$$

$$B = X_b = \frac{a(3l^2 - a^2)}{2l^3} P$$

$$C = \frac{a}{2l} P - \tfrac{1}{2} X_b = - \frac{a(l^2 - a^2)}{4l^3} P, \quad \textit{ke bawah}$$

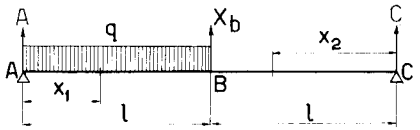
$$M_b = C \,.\, l = - \frac{a(l^2 - a^2)}{4l^2} P$$

Di sini terdapat tanda ÷ sebab M_b dianggap sebagai momen-lapangan sedang arah-kerjanya negatif (melengkung ke atas). Dan dahulu sudah dianggap bahwa momen-peralihan itu pada umumnya bekerja negatif, jadi dipandang sebagai momen-peralihan tak usah diberi tanda ÷.

M_b juga boleh dihitung sebagai selisih antara momen berasal dari P dan momen berasal dari X_b (di titik B).

$$M_b = \frac{al}{2l} P - \tfrac{1}{4} X_b (2l) = \left\{ \tfrac{1}{2} a - \frac{a(3l^2 - a^2)}{4l^2} \right\} P = \div \frac{a(l^2 - a^2)}{4l^2} P$$

Gaya-gaya lintang pada titik-titik perletakan :



Gambar IV, 30

$$Q_a = A$$

$$(Q_b)_l = A - P = - \frac{a(5l^2 - a^2)}{4l^3} P$$

$$(Q_b)_r = A - P + X_b = \frac{a(l^2 - a^2)}{4l^3} P$$

Atau juga $(Q_b)_r = - C = Q_c = \frac{a(l^2 - a^2)}{4l^3} P.$

Muatan terbagi rata, q.

Di dalam pendapat di atas, P diganti dengan $dP = qda$ dan a dijadikan variabel. Jika lapangan AB penuh dimuati, terdapat (gambar IV, 30).

$$X_b = \int_o^l \frac{a(3l^2 - a^2)}{2l^3} qda = \tfrac{5}{8} ql \quad \text{(lihat § 12b, 1 kejadian khusus)}$$

$$A = ql \,.\, \frac{\frac{3}{2}l}{2l} \div \tfrac{1}{2} X_b = \tfrac{3}{4} ql - \tfrac{5}{16} ql = \tfrac{7}{16} ql \quad \text{(lihat idem)}$$

$$B = X_b = \tfrac{5}{8} ql$$

$$C = ql \,.\, \frac{\frac{1}{2}l}{2l} \div \tfrac{1}{2} X_b = \tfrac{1}{4} ql - \tfrac{5}{16} ql = - \tfrac{1}{16} ql$$

$$Q_a = A_i = \tfrac{7}{16} ql$$

$$(Q_b)_l = A - ql = - \tfrac{9}{16} ql; \; (Q_b)_r = - C = + \tfrac{1}{16} ql = Q_c$$

$$Q_{x1} = A - qx_1 = \tfrac{7}{16} ql - qx_1$$

$$M_b = C \,.\, l = - \tfrac{1}{16} ql^2$$

Atau $M_b = A \,.\, l - \tfrac{1}{2} ql^2 = - \tfrac{1}{16} ql^2$

$$M_{x1} = A x_1 \div \tfrac{1}{2} q x_1^2 = \tfrac{7}{16} ql x_1 - \tfrac{1}{2} q x_1^2$$

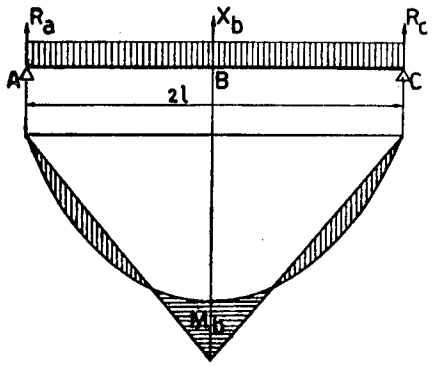
M_{max} terdapat jika $dM_{x1}/dx_1 = 0$, jadi $\frac{7}{16} ql - qx_1 = 0$ atau $x_1 = \frac{7}{16} l$.

$$M_{x2} = C \,.\, x_2 = - \tfrac{1}{16} ql x_2$$

Sekarang kedua-dua lapangan dimuati penuh, q (gambar 31).
Bandingkan § 12b, 3 serta gambar 25.

$$X_b = \int_o^{2l} \frac{a(3l^2 - a^2)}{2l^3} qda = \tfrac{5}{4} ql$$

Kita juga boleh menentukan, bahwa hasil M_b sekarang dua kali hasil di atas, oleh karena keadaan simetris. Juga secara langsung demikian.



Gambar IV, 31

Jika X_b dihapuskan, titik B akan turun sejauh $\delta_b^o = \frac{5}{384}q\frac{(2l)^4}{EI}$ sedang

$$\delta_{bb} = \tfrac{1}{48}\frac{(2l)^3}{EI}$$

$$X_b \cdot \delta_{bb} = \delta_b^o = \tfrac{5}{384}q\frac{(2l)^4}{EI}$$

$$X_b = \delta_b^o/\delta_{bb} = \tfrac{5}{384}q\frac{(2l)^4}{(2l)^3}\cdot 48q = \tfrac{5}{4}ql$$

$$A = \tfrac{1}{2}q(2l) - \tfrac{1}{2}X_b = \tfrac{3}{8}ql;\ C = A$$

$$M_b = A\,l - \tfrac{1}{2}ql^2 = -\tfrac{1}{8}ql^2$$

Juga boleh ditentukan dua kali hasil di atas.

Atau juga terdapat sebagai selisih antara momen berasal dari q dan berasal dari X_b.

$$\text{jadi } M_b = \tfrac{1}{8}q(2l)^2 - \tfrac{1}{4}X_b(2l) = \tfrac{1}{2}ql^2 - \tfrac{5}{8}ql^2 = -\tfrac{1}{8}ql^2$$

Dengan hukum Castigliano: $M_x = M_x^o - \tfrac{1}{2}X_b x =$

$$= \tfrac{1}{2}q(2l)x - \tfrac{1}{2}qx^2 - \tfrac{1}{2}X_b x = qlx - \tfrac{1}{2}qx^2 - \tfrac{1}{2}X_b x$$

$$Q_x = ql - qx - \tfrac{1}{2}X_b;\ dM_x/dX_b = -\tfrac{1}{2}x;\ dQ_x/dM_b = -\tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{2}U = \int_o^l M_x^2 ds/2EI + \int_o^l Q_x^2 ds/2GF';\ dU/dX_x \text{ atau } d\tfrac{1}{2}U/dX_b = 0$$

$$\frac{1}{EI}\int_o^l M_x\frac{dM_x}{dX_b}dx + \frac{1}{GF'}\int_o^l Q_x\frac{dQ_x}{dX_b}dx = 0.$$ Pengaruh geseran diabaikan (berasal dari Q).

$$\frac{1}{EI}\int_o^l (qlx \div \tfrac{1}{2}qx^2 \div \tfrac{1}{2}X_b x)\cdot(\div\tfrac{1}{2}x)dx = 0;\ \int_o^l (\tfrac{1}{2}qlx^2 - \tfrac{1}{4}qx^3 - \tfrac{1}{4}X_b x^2)dx = 0$$

$$\tfrac{1}{8}ql^4 - \tfrac{1}{16}ql^4 - \tfrac{1}{12}X_b l^3 = 0;\ \tfrac{1}{12}X_b = (\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16})ql = \tfrac{5}{48}ql;\ X_b = \tfrac{5}{4}ql$$

Dengan faktor pengaruh dalam. Mengadakan $-X_b = 1$ (ke bawah).

Untuk $x < l$:

$\alpha_m = \tfrac{1}{2}x;\ \alpha_q = \tfrac{1}{2};\ M_x^o = qlx - \tfrac{1}{2}qlx^2;\ Q_x^o = ql - qx$. Oleh karena keadaan simmetris, boleh mengintegrasi sampai l.

$$X_b\int_o^l \alpha_m^2\,dx/EI + \int_o^l \alpha_q^2 dx/GF' = \int_o^l M_x^o\alpha_m dx/EI + \int_o^l Q_x^o\alpha_q dx/GF'$$

Akibat geseran boleh diabaikan: $X_b\int(\tfrac{1}{2}x)^2dx = \int(qlx - \tfrac{1}{2}qx^2)\cdot\tfrac{1}{2}x dx$

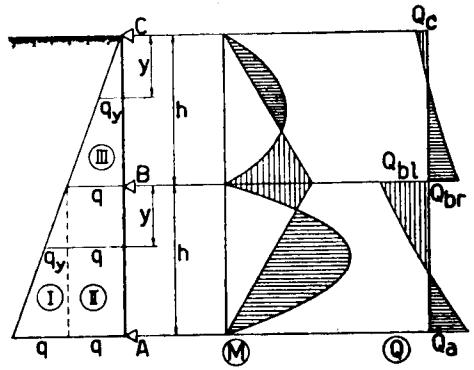
$$\tfrac{1}{12}X_b l^3 = \tfrac{1}{8}ql^4 - \tfrac{1}{16}ql^4 = \tfrac{5}{48}ql^4$$

$$X_b = \tfrac{5}{4}ql$$

Cara dengan memilih salah satu reaksi perletakan sebagai gaya statis kelebihan itu lebih sukar dari pada cara dengan hukum tiga momen, seperti ternyata dari yang terdapat di atas ini. Lagi pula cara itu tidak begitu "overzichtelijk" (surveyable, mudah kelihatan).

§ 14. Contoh (gambar IV, 32).

Dinding penahan tanah, disokong di tiga titik (garis) yang dianggap tak dapat beralih, sehingga terjadi dua lapangan yang sama tingginya, masing-masing h. Oleh karena EI tetap, besaran ini tak dimasukkan di dalam hitungan. Ordinat muatan bertanding lurus dengan dalamnya titik di bawah tanah, jadi bidang muatan berupa segitiga. Ordinat di tengah-tengah = q dan di ujung bawah = $2q$. Bidang muatan di bagi-bagi di dalam bagian I, II dan III. Selanjutnya mempergunakan hasil-hasil di dalam § 10, e (gb. IV, 13).



Gambar IV, 32

Persamaan tiga momen di titik B :

$$\tfrac{2}{3}M_b\,h = (\tfrac{7}{360} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{45})qh^3$$

$$M_b = (\tfrac{7}{240} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{30})qh^2 = \tfrac{1}{8}qh^2$$

$$A = \tfrac{1}{2}qh + \tfrac{1}{8}qh - M_b/h = \tfrac{17}{24}qh$$

$$B = \tfrac{1}{2}qh + \tfrac{1}{8}qh + \tfrac{1}{8}qh + 2M_b/h = \tfrac{5}{4}qh$$

$$C = \tfrac{1}{8}qh - M_b/h = \tfrac{1}{24}qh$$

$$Q_a = A = \tfrac{17}{24}qh;\ (Q_b)_l = A - 1\tfrac{1}{2}qh = -\tfrac{19}{24}qh$$

$$(Q_b)_r = \tfrac{1}{2}qh - C_c = \tfrac{11}{24}qh;\ Q_c = -C_c = -\tfrac{1}{24}qh$$

Titik sejauh $y < h$ dari C; $q_y = q.y/h$. jadi berarti lapangan atas, CB.

$$Q_y = \tfrac{1}{2}qy_y - C = \tfrac{1}{2}q_y.y - \tfrac{1}{24}qh = q(\tfrac{1}{2}y^2/h - \tfrac{1}{24}h)$$
$$M_y = M_y^o - M_b\,y/h = \tfrac{1}{6}qhy - \tfrac{1}{6}qy^3/h - \tfrac{1}{6}qhy = q(\tfrac{1}{24}hy - \tfrac{1}{6}y^3/h)$$
$$Q_y = 0, \quad \text{jika } \tfrac{1}{2}y^2/h - \tfrac{1}{24}h = 0;\ \tfrac{1}{2}y^2 = \tfrac{1}{24}h^2;\ y = \tfrac{1}{6}h\sqrt{3}$$

Di sini terdapat M_{max}.
Atau juga :

$$dM_y/dy = 0;\ \tfrac{1}{24}h - \tfrac{1}{2}y^2/h = 0;\ y = \tfrac{1}{6}h\sqrt{3} \approx 0{,}289\,h$$
$$M_y = 0;\ y(\tfrac{1}{24}h - \tfrac{1}{6}y^2/h) = 0;\ y = 0 \text{ dan } y = \tfrac{1}{2}h$$

Lapangan bawah, BA. Titik sejauh y di bawah B.

$$Q_y = -(Q_b)_l + qy + \tfrac{1}{2}q_y.y = q(-\tfrac{19}{24}h + y + \tfrac{1}{2}y^2/h)$$
$$M_y = M_y^o - M_b(1 - y/h) = (\tfrac{1}{6}qhy - \tfrac{1}{6}qy^3/h) + \tfrac{1}{2}qhy - \tfrac{1}{2}qy^2 - \tfrac{1}{8}qh^2 +$$
$$+ \tfrac{1}{8}qhy = q(-\tfrac{1}{8}h^2 + \tfrac{19}{24}hy - \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{6}y^3/h)$$

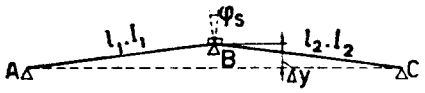
M_{max} terdapat di mana $Q_y = 0$ atau $dM_y/d_y = 0$.

$$-\tfrac{19}{24}h + y + \tfrac{1}{2}y^2/h = 0$$
$$y^2 + 2hy - \tfrac{19}{12}h^2 = 0;\ y = h(-1 + \sqrt{1 + \tfrac{19}{12}}) \approx 0{,}61h$$
$$M_{max} \approx qh^2(-\tfrac{1}{8} + \tfrac{19}{24}.0{,}61 - \tfrac{1}{2}.0{,}61^2 - \tfrac{1}{6}.0{,}61^3) = 0{,}130qh^2$$
$$M_y = o \text{ utk } y \approx 0{,}18h$$

Menghitung besaran q (menurut Poncelet).
Sudut serong-alam tanah $= \varphi$. Berat-jenis tanah $= \gamma$.
$q = \gamma.h\,\mathrm{tg}^2(45° - \tfrac{1}{2}\varphi)$. Dengan $\varphi = 30°$ dan $\gamma = 2$ umpamanya menjadi $q = 2h\,\mathrm{tg}^2 30° = \tfrac{2}{3}h$ (t/m²).

§ 15. Salah pelaksanaan.

Salah satu titik-perletakan tak sama tingginya (gambar IV, 33).



Gambar IV, 33

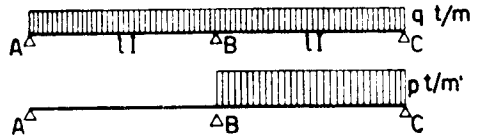
Titik B terlalu tinggi Δy terhadap garis AC.
$\varphi_s = \Delta y/l_1 + \Delta y/l_2$, *positif* jika B *lebih tinggi* dari pada garis AC.

$$\tfrac{1}{3}M_b(l_1/EI_1 + l_2/EI_2) = \varphi_s$$
$$M_b = \frac{3\varphi_s}{l_1/EI_1 + l_2/EI_2}$$

Sebagai contoh :

$$l_1 = l_2 = l = 8{,}00 \text{ m};\ EI_1 = EI_2 = 5000 \text{ tm}^2;\ y = 1 \text{ cm}$$
$$\varphi_s = 2.1/800 = 1/400 = 0{,}0025$$
$$M_b = \frac{3EI\varphi_s}{2l} = \frac{3.5000.0{,}0025}{2.8} \text{ tm} = 2{,}34 \text{ tm}$$

Seringkali letak titik B disengaja tidak sama tinggi dengan garis AC, ini dengan maksud supaya A dan B tidak akan bernilai negatif (titik-titik A dan C tak akan terangkat), gb. IV, 34.
Untuk ini, titik B harus diletakkan *lebih rendah* dari pada garis AC, yaitu sejauh Δy. Sebab dengan begitu mengurangi nilai M_b, sedang M_b ini berhasrat mengurangi A.



Gambar IV, 34

Sebelum ada muatan, tertimbullah momen-peralihan sebesar M_{bs} sebagai akibat dari Δy ini; $\varphi_s = -2\Delta y/l$.

$$\tfrac{2}{3}M_{bs}l/EI = \varphi_s = -2\Delta y/l;\ M_{bs} = -\frac{3\,EI}{l^2}.\,\Delta y \text{ (arah kerjanya positif).}$$
$$A_s = -M_s/l = \frac{3EI}{l^3}\Delta y$$

Akibat berat sendiri, g (bekerja penuh di kedua-dua lapangan).

$$M_{bg} = \tfrac{1}{8}gl^2,\ A_g = \tfrac{1}{2}gl - M_{bg}/l = \tfrac{3}{8}gl.$$

Akibat muatan-bergerak, p di atas lapangan BC.

$$M_{bp} = \tfrac{1}{16}ql^2;\ A_p = -M_{bp}/l = -\tfrac{1}{16}pl$$

Supaya $A \geqslant 0$, maka $\frac{3EI}{l^3}.\,\Delta y + \tfrac{3}{8}gl - \tfrac{1}{16}pl \geqslant 0$.

$$\Delta y \geq \frac{l^4}{3EI}(\tfrac{1}{16}p - \tfrac{3}{8}g)$$

Jika $\frac{1}{16}\ p \leq \frac{3}{8}g$ atau $p \leq 6g$, titik B tak usah direndahkan.

Sekarang diusahakan supaya $M^+_{max} = M^-_{max}$ (M_b), nilai-nilai mutlaknya. Perletakan B dibuat lebih rendah sejauh y terhadap garis penghubung AC. Tulislah $M_b = \alpha\ gl^2$.

$$A = ½\ gl - M_b/l = gl\ (½ - \alpha).$$

$$Q_x = A - gx;\ M_x = Ax - ½gx^2$$

Pada $x = x_o$ terdapat $Q_x = dM_x/dx = 0$ dan $M_x = M^+_{max}$.

$A - gx_o = 0;\ x_o = A/g = l\ (½ - \alpha)$ atau $A = gx_o$, jadi $M_x = gx_o x - ½gx^2$.

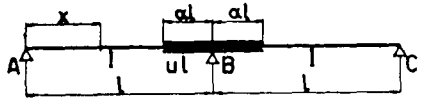
dan $M^+_{max} = ½\ gx_o^2 = ½\ gl^2\ (½ - \alpha)^2 = \alpha\ gl^2$

Terdapat $\alpha = 1{,}5 - \sqrt{2}$.

Di dalam contoh hitungan di atas, terdapat $M_b = \frac{1}{8}\ gl^2 - 3EI\ y/l^2 = y = (-1{,}375 + \sqrt{2})\ gl\ \frac{4}{3}\ EI$.

§ 16. EI tak tetap.

Balok diperkuat pada titik perletakan tengah, yaitu sepanjang αl di masing-masing lapangan. Selanjutnya $l_1 = l_2 = l$ dan keadaan simetris. Bagian-bagian yang tak diperkuat mempunyai I yang tetap dan yang diperkuat juga mempunyai momen-inersia tetap, yaitu uI. Muatan terbagi rata q penuh di atas ABC.



Gambar IV, 35

Kita menggunakan hukum Castigliano.

$$M_x = M_x^o - M_b x/l = \tfrac{1}{2}qlx - \tfrac{1}{2}qx^2 - M_b x/l;\ dM_x/dM_b = -x/l$$

$$\tfrac{1}{2}U = \tfrac{1}{2}\int_o^l M_x^2 dx/EI = \tfrac{1}{2}\int_o^{(1-\alpha)l} M_x^2 dx/EI + \tfrac{1}{2}\int_{(1-\alpha)l}^{l} M_x^2 dx/EI$$

$$dU/dM_b = 0 \text{ atau } EId\tfrac{1}{2}U/dM_b = 0$$

$$\int_o^{(1-\alpha)l} M_x \frac{dM_x}{dM_b}\,dx + \frac{1}{u}\int_{(1-\alpha)l}^{l} M_x \frac{dM_x}{dM_b}\,dx = 0$$

$$\int_o^{(1-\alpha)l} \{\tfrac{1}{2}q(lx - x^2) - M_b(x/l)\}(x/l)dx + \frac{1}{u}\int_{(1-\alpha)l}^{l} \{\tfrac{1}{2}q(lx - x^2) - M_b(x/l)\}(x/l)dx = 0$$

$$\frac{1}{l^2}M_b\left(\int_o^{(1-\alpha)l} x^2dx + \frac{1}{u}\int_{(1-\alpha)l}^{l} x^2dx\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}q\left\{\int_o^{(1-\alpha)l}\left(x^2 - \frac{x^3}{l}\right)dx + \frac{1}{u}\int_{(1-\alpha)l}^{l}\left(x^2 - \frac{x^3}{l}\right)dx\right\}$$

Untuk memudahkan pekerjaan, dianggap $(1 - \alpha) = \beta$.

$$\tfrac{1}{3}M_b l\left\{\beta^3 + \frac{1}{u}(1 - \beta^3)\right\} = \tfrac{1}{2}ql^3\left(\tfrac{1}{8}\beta^3 - \tfrac{1}{4}\beta^4 + \frac{1}{3u} - \frac{1}{3u}\beta^3 - \frac{1}{4u} + \frac{1}{4u}\beta^4\right)$$

$$\tfrac{1}{3}M_b\left\{\left(1 - \frac{1}{u}\right)\beta^3 + \frac{1}{u}\right\} = \tfrac{1}{2}q\left\{\tfrac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{u}\right)\beta^3 - \tfrac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{u}\right)\beta^4 + \frac{1}{u}\cdot\tfrac{1}{12}\right\}$$

$$M_b\{(u - 1)\beta^3 + 1\} = \tfrac{1}{8}ql^2\{1 + 4(u - 1)\beta^3 - 3(u - 1)\beta^4\} =$$

$$= \tfrac{1}{8}ql^2\{1 + (u - 1)(4 - 3\beta)\beta^3\}$$

$$M_b = \frac{1 + (u - 1)(4 - 3\beta)\beta^3}{1 + (u - 1)\beta^3}\cdot\tfrac{1}{8}ql^2 = \frac{m}{n}\cdot\tfrac{1}{8}ql^2$$

Besaran-besaran m dan n itu tergantung pada α dan u. Di bawah ini ada daftar yang memperlihatkan nilai-nilai m dan n sebagai fungsi dari α dengan $u = 2$ dan $u = ½$.

α	β	β^3	$u = 2$			$u = \frac{1}{2}$		
			m	n	m/n	m	n	m/n
0,1	0,9	0,729	1,947	1,12	1,729	0,573	0,635	0,85
0,2	0,8	0,512	1,820	1,512	1,20	0,590	0,749	0,795
0,3	0,7	0,343	1,652	1,343	1,23	0,674	0,828	0,795
0,4	0,6	0,216	1,475	1,216	1,21	0,763	0,892	0,855
0,5	0,5	0,125	1,312	1,125	1,17	0,844	0,937	0,871
1,0	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Angka-angka m/n di daftar ini menunjukkan, bahwa jika sesuatu bagian itu diperkuat, momen yang ditahan olehnya bertambah.

Kita juga dapat memakai persamaan tiga momen.

$$M_b \cdot \frac{2}{l}\left\{\int_o^{\beta_l} \frac{x^2}{l}\,dx/EI + \int_{\beta_l}^{l} \frac{x^2}{l}\,dx/uEI\right\} = \frac{2}{l}\left\{\int_o^{\beta_l} M_x^o x\,dx/EI + \int_{\beta_l}^{l} M_x^o x\,dx/uEI\right\}$$

$$\frac{1}{l^2} M_b\left(\int_l^{\beta_l} x^2\,dx + \frac{1}{u}\int_{\beta_l}^{l} x^2\,dx\right) = \frac{q}{2l}\left\{\int_o^{\beta_l} (lx^2 - x^3)\,dx + \frac{1}{u}\int_{\beta_l}^{l} (lx^2 - x^3)\,dx\right\}$$

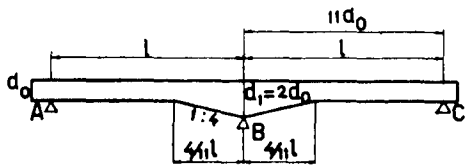
d.s.t.

§ 17. **Pertinggian-serong atau voute** (gambar, IV, 36).

Tampang balok berupa persegi dengan lebar b yang tetap. Tinggi bagian yang tak diperkuat, $d_o = 1/11\,l$. Tinggi maximum di bagian perkuatan (voute), $d_1 = 2d_o$ sedang serong voute diambil 1 : 4.

Jadi panjang voute ada $4(d_1 - d_o) = 4d_o = 4/11\,l$.

Tinggi voute di sesuatu tampang $= d$ (variabel antara d_o dan d_1).



Gambar IV, 36

$$I_o/I = (d_o/d)^3$$

$$\varphi_{bb} = 2\int_o^{l}\left(\frac{x}{l}\right)^2 dx/EI = \frac{2}{EI_o}\int_o^{l} (x/l)^2\,(I_o/I)\,dx \quad \text{(lihat § 4. tentang } \varphi_{kk,l})$$

$$\varphi'_{bb} = \varphi_{bb} \cdot EI_o = 2\int_o^{l} (x/l)^2\,(d_o/d)^3 dx \infty 2 \cdot \Delta x \sum_o^{l} (x/l)^2\,(d_o/d)^3$$

Kita ambil muatan penuh terbagi rata 2l.q. Pada sesuatu tampang sejauh x dari A (jadi lapangan AB) terdapat :

$$M_x^o = \tfrac{1}{2}qlx - \tfrac{1}{2}qx^2 = 4\,\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot \tfrac{1}{8}ql^2$$

$$\varphi^o = \frac{2}{l}\int_o^{l} M_x^o x\,dx/EI = \frac{2}{EI_o} \cdot \tfrac{1}{8}ql^2 \int_o^{l} 4\,\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\frac{I_o}{I} \cdot \frac{x}{l} \cdot dx$$

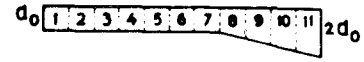
$$(\varphi^o)' = \varphi^o EI_o = \tfrac{1}{8}ql^2 \cdot 2\int_o^{l} 4(x/l)^2\,(1 - x/l)\,(d_o/d)^3 dx \infty$$

$$\infty \tfrac{1}{8}ql^2\,2\Delta x \sum 4(x/l)^2\,(1 - x/l)\,(d_o/d)^3$$

$$M_b = (\varphi^o)'/\varphi'_{bb} = \tfrac{1}{8}ql^2\,\frac{\Sigma 4(x/l)^2\,(1 - x/l)\,(d_o/d)^3}{\Sigma\,(x/l)^2\,(d_o/d)^3} =$$

$$= \tfrac{1}{8}ql^2\,\frac{\Sigma (x/l)^2\,(d_o/d)^3 \cdot 4(1 - x/l)}{\Sigma\,(x/l)^2\,(d_o/d)^3}$$

Untuk menghitung ini maka saban lapangan kita bagi-bagi di dalam 11. bagian, jadi $\Delta x = 1/11\,l$ (gambar IV, 36a). Kemudian menghitung besar an-besaran x dan (d_o/d) pada tengah-tengah bagian. Hitungan ini kita selenggarakan secara daftar.



Gambar IV, 36*a*

Bagian	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x/l	1/22	3/22	5/22	7/22	9/22	11/22	13/22	15/22	17/22	19/22	21/22
d_o/d	1	1	1	1	1	1	1	8/9	8/11	8/13	8/15
$(d_o/d)^3$	1	1	1	1	1	1	1	0,690	0,390	0,235	0,152
$(x/l)^2(d_o/d)^3$	0,002	0,019	0,062	0,102	0,167	0,250	0,350	0,322	0,234	0,175	0,138
$4(1-x/l)$	3,81	3,46	3,10	2,74	2,37	2,01	1,64	1,27	0,91	0,55	0,18
$(x/l)^2(d_o/d)^3\,4(1-x/l)$	0,008	0,064	0,160	0,279	0,396	0,503	0,573	0,410	0,213	0,096	0,025

$$\Sigma\,(x/l)^2(d_o/d)^3\,4(1 - x/l) = (0{,}008 + 0{,}064 + \ldots + 0{,}025) = 2{,}727$$

$$\Sigma\,(x/l)^2\,(d_o/d)^3 = (0{,}002 + 0{,}019 + \ldots + 0{,}138 = 1{,}821$$

$M_b = \tfrac{1}{8}ql^2 \cdot \dfrac{2{,}727}{1{,}821} = \tfrac{1}{8}ql^2 \cdot 1{,}52 = 0{,}190ql^2$. Jika tak ada voute, $M_b = \tfrac{1}{8}ql^2$

$$M_x = \tfrac{1}{2}qlx - \tfrac{1}{2}qx^2 - M_b x/l = 0{,}310qlx - \tfrac{1}{2}qx^2$$

$$dM_x/dx = 0;\ 0{,}310ql - qx = 0;\ x = 0{,}310l$$

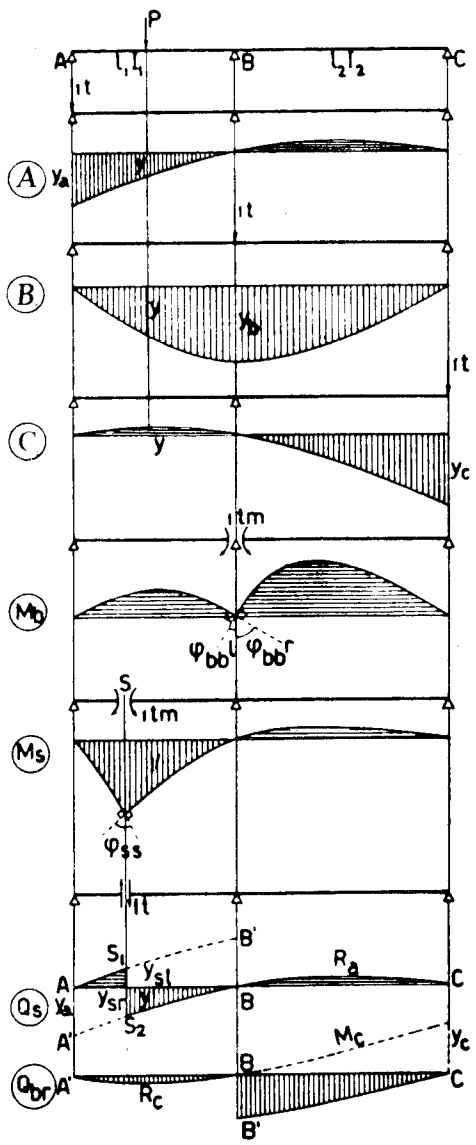
$M_{max} = \tfrac{1}{2}(0{,}310)^2ql^2 \infty 0{,}05ql^2$. Jika tak ada (mengabaikan) voute terdapat $\frac{9}{128}ql^2 \infty 0{,}07ql^2$. Jadi beda $\frac{2}{7}$ atau ∞ 30%.

Voute itu sering diadakan pada bangunan beton-bertulang. Balok beton itu biasanya membentuk satuan dengan lantai-beton dan dengan begitu dihitung sebagai

balok –T, apabila flensnya menahan tekanan (masuk di dalam bagian tertekan), jadi jika momennya positif. Akan tetapi di bagian momen-negatif, flens tak boleh turut dihitung (sebab tertarik). Lingkungan momen-negatif ini kira-kira meliputi bagian voute;
jadi di luar voute, flens ikut membentuk besaran I sedang di bagian voute tidak ikut membentuk I, dan dengan begitu $I_o/I > (d_o/d)^3$.

Ini berarti, bahwa M_b akan terdapat lebih kecil dari pada pendapat di atas yang berdasaran atas $I_o/I = (d_o/d)^3$ dan tak akan begitu jauh menyimpang dari nilai $\frac{1}{8}\,ql^2$

Pendapat di atas ini membuktikan lagi, bahwa bagian yang diperkuat itu akan menerima tambahan beban dan meringankan beban bagian-bagian lainnya (lihat juga IV, § 47).



Gambar IV, 37

§ 18. **Garis-garis pengaruh** (gambar IV, 37).
Kita dapat melukiskan perjalanan garis-pengaruh sesuatu gaya (kekuatan atau momen) secara kwalitatif dengan memperguna-kan hukum :

Garis-pengaruh sesuatu gaya dilukiskan oleh garis-lentur bangunan yang ditimbulkan oleh suatu gaya yang tertentu (misalnya = 1) yang bekerja di titik-pegangannya, sesudah kemungkinan bekerjanya dihapuskan.

1. Garis-pengaruh perletakan A. Perletakan A kita hilangkan (jadi menghapuskan kemungkinan bekerjanya A), kemudian mengadakan muatan $P' = 1$ di atas ujung A ini dan menggambar garis-elastis balok ABC yang diletakkan atas B dan C. Titik A turun sejauh :

$$y_a = P'\delta_{aa} = \delta_{aa}$$

Titik pegangan muatan P di sesuatu tempat akan turun sejauh $y = P'\delta_{pa} = \delta_{pa}$. Sebaliknya muatan P ini akan menurunkan titik A sejauh $P\delta_{ap}$. Supaya A tak turun (tak beralih), maka di sini harus diadakan kekuatan R_a ke atas sehingga $R_a\delta_{aa} = P\delta_{ap} = P\delta_{pa}$. Jadi $A = P.\delta_{pa}/\delta_{aa} = Py/y_a$ atau R_a berbanding lurus dengan y = ordinat garis-lentur tersebut di tempat P berdiri.

2. Garis-pengaruh B. Perletakan B dihapuskan dan mengadakan muatan = 1 di atas B. Garis-elastis pada muatan ini melukiskan garis-pengaruh B.

3. Garis-pengaruh perletakan C. Setelah melenyapkan perletakan C, memuati titik ini dengan muatan = 1 dan menggambar garis-lenturnya yang melukiskan garis-pengaruh C.

4. Garis-pengaruh momen-peralihan, M_b. Balok dipotong di atas B, berarti melenyapkan kemungkinan bekerjanya M_b. Kemudian mengadakan momen = 1 pada ujung ujung-potongan ini, dan melukiskan garis-lenturnya. Ujung-ujung ini berputar sudut terhadap satu sama lain sebesar $1.\varphi_{bb} = \varphi_{bbl} + \varphi_{bbr}$.

Titik-pegangan P naik sejauh $y = 1.\delta'_{pb} = \delta'_{pb}$. Sebaliknya, muatan P menimbulkan putaran-sudut pada ujung B sebesar $P\varphi_{bp} = P.\delta'_{pb}$ (sebab menurut MAXWELL $\varphi'_{bp} = \delta'_{pb}$). Supaya sebagai akibat dari P ujung balok di B tak berputar terhadap satu sama lain (balok tinggal utuh di situ), harus ada momen M_b sehingga $M_b\varphi_{bb} = P\delta'_{pb} = P.y$.

$M_b = P.y/\varphi_{bb}$, jadi berbanding lurus dengan y yang berarti ordinat pada garis-lentur tersebut di tempat berdirinya P.

$$\varphi_{bb} = \tfrac{1}{3}(l_1 + l_2)/EI$$

Di sini momen = 1 tm yang bekerja pada potongan di atas B dipilih negatif (jadi tidak berlawanan dengan arah kerja M_b) supaya mencapai garis-lentur yang melengkung ke atas. Sebab pada hakekatnya, M_b itu bekerja negatif dan ordinat-ordinat garis-pengaruhnya selayaknya digambar ke atas (ordinat ke bawah pada umumnya berarti positif).

5. Garis-pengaruh momen di titik S, M_s. Kita mengadakan sendi di titik S ini, yang berarti pula menghilangi kemungkinan bekerjanya momen, di tampang S ini. Kemudian mengerjakan momen = 1 pada ujung-ujung potongan di S itu dan melukiskan garis-lenturnya. Ujung-ujung ini berputar sudut terhadap satu sama lain sebanyak $1 . \varphi_{ss}$ tempat berdirinya P turun sejauh $y = 1 . \delta'_{ps}$; $M_s = P . y/\varphi_{ss}$.

6. Garis-pengaruh gaya-lintang di tampang S, yaitu Q_s. Di sini balok kita potong pula supaya kemungkinan bekerjanya gaya-geser lenyap, dan mengadakan kekuatan-geser = 1 sehingga ujung kiri tergeser ke atas dan ujung kanan ke bawah (akan tetapi tak berputar terhadap satu sama lain). Garis-lentur yang terjadi demikian melukiskan garis-pengaruh Q_s.

Selama muatan P berdiri di kanan S maka Q_s = A, jadi perjalanan garis-pengaruh Q_s di sebelah kanan S identik dengan garis-pengaruh A. Jika P berdiri di kiri S, $Q_s = A - P$ atau ordinat Q_s = ordinat $A - y_a$. Jadi jika ordinat Q_s langsung di kanan S itu disebut y_{sr}, maka ordinat Q_s langsung di kiri S menjadi $y_{sl} = y_{sr} - y_a$ (negatif). Setelah mempelajari hal ini dengan saksama, kita dapat menarik kesimpulan bahwa garis $AS_1B' // A'S_2B$ atau // garis pengaruh A.

7. Garis-pengaruh kekuatan melintang di titik B sebelah kanan, Q_{br}. Selama P berdiri di sebelah kiri B, maka $Q_{br} = C$, jadi cabang garis-pengaruh Q_{br} di lapangan AB serupa dengan garis-pengaruh C. Oleh karena C itu negatif selama P ada di lapangan AB, atau bekerja ke arah bawah, maka ini berarti bahwa Q_{br} bernilai positif. Jika P berdiri di kanan B, terdapat $Q_{br} = P - C$ yang > 0 pula. Atau ordinat $Q_{br} = y_c$ – ordinat R_c = – (ordinat $R_c - y_c$), dan garis $B'C //$ garis pengaruh C. Garis-pengaruh kekuatan melintang di B sebelah kiri, Q_{bl} itu garis $AS_1B'BC$ pada garis-pengaruh Q_s.

§ 19. Hubungan antara garis-garis pengaruh (gambar IV, 38).

Sebagai dasar kita ambil garis-pengaruh reaksi perletakan B yaitu garis $AXBUCA$ dan sebagai susunan-dasar, balok AC.

1. Garis-pengaruh A. Momen di titik $C = 0$. Muatan P berdiri sejauh $x > l_2$ dari C.

$$M_c = A\,(l_1 + l_2) + Bl_2 - Px = 0$$

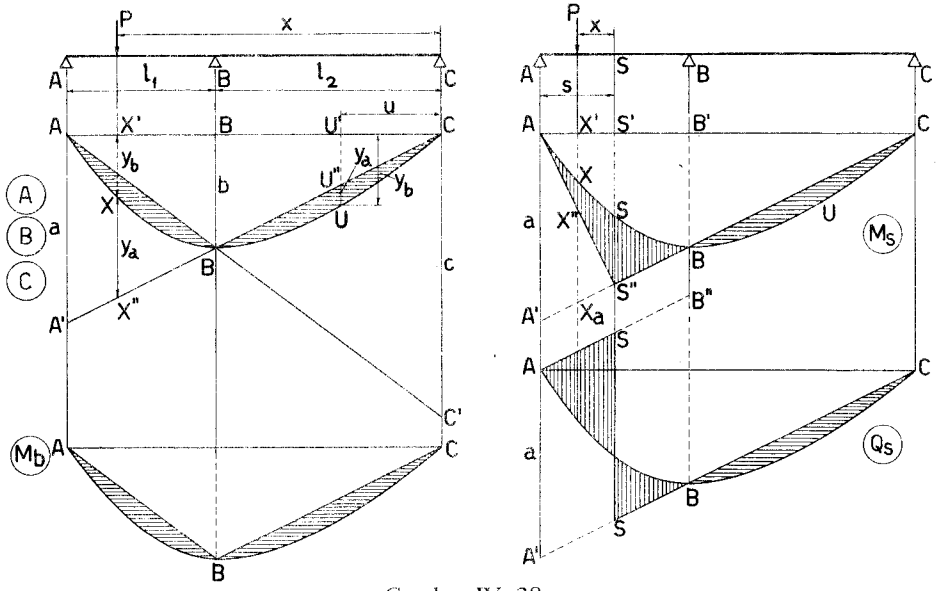
$$A = \frac{x}{l_1 + l_2} P - \frac{l_2}{l_1 + l_2} B = \frac{x}{l_1 + l_2} P - \frac{l_2}{(l_1 + l_2)} \cdot \frac{y_b}{b} P =$$

$$= \frac{(x/l_2)b - y_b}{(l_1 + l_2)b/l_2} P = \frac{X'X'' - X'X}{AA'} P = \frac{XX''}{AA'} P = \frac{y_a}{a} P$$

Ini dapat dibandingkan dengan hasil $A = (\delta_{pa}/\delta_{aa})P$. Sekarang muatan P berdiri sejauh $u < l_2$ dari C (jadi di lapangan CB).

Di sini $y_b = U'U$ dan $(u/l_2)b = U'U''$. Analog dengan pendapat di atas :

$$A = \frac{(U'U'' - U'U)}{a} P = \frac{-UU''}{a} P = \frac{y_a}{a} P$$ dengan pengertian, bahwa y_a negatif. Jadi garis-pengaruh A adalah garis lengkung $AXBUC$ dengan garis lurus CBA' *sebagai* garis-penutup.



Gambar IV, 38

2. Garis-pengaruh C. Seperti garis A akan tetapi dengan garis ABC' sebagai garis-penutup.

3. Garis-pengaruh M_b. Selama P ada di kiri B, maka $M_b = C.l_2$, jadi garis-pengaruh C nya serupa dengan garis-pengaruh di bagian AB, yaitu garis-lengkung AB dengan garis lurus AB sebagai garis penutup. Jika P berdiri di kanan B, terdapat $M_b = A.l_1$, jadi garis-pengaruhnya sepanjang bentang BC sebangun dengan garis-pengaruh A, di mana garis-lurus CB menjadi garis-penutupnya. Jadi garis-pengaruh M_b boleh dilukiskan dengan garis-lengkung ABC yang ditutup oleh garis-garis lurus AB dan CB.

4. Garis-pengaruh M_s, yaitu momen-pada tampang S yang letaknya sejauh $s < l_1$ dari A. Selama P bekerja di kanan S, $M_s = A.s$, sedang A bernilai negatif (bekerja ke bawah) di daerah CB. Jadi garis-pengaruh M_s dari C sampai di S serupa dengan garis A dan tanda ordinatnya mengikuti tanda ordinat A. (Sebab jika A itu negatif, $M_s = A.s$ juga negatif).

Sekarang P berdiri di kiri S sejauh x dari padanya.

$$M_s = A.s - Px = \frac{y_a}{a} P.s - Px, \text{ sedang } y_a = XX_a$$

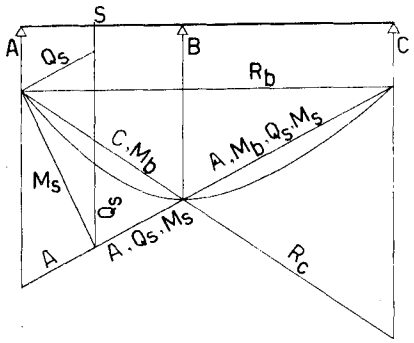
$$x : s = S''X'' : S''A = X''X_a : a; \quad x = \frac{X''X_a}{a}.s$$

$$M_s = \frac{(XX_a - X''X_a)}{a}.Ps = \frac{XX''}{a} Ps.$$ Jadi ordinat M_s terletak antara garis-lengkung AXS dan garis lurus AS''. Ini berarti bahwa bidang pengaruh M_s adalah $ASBUCS''A$.

5. Garis-pengaruh kekuatan-melintang pada tampang S, Q_s.

Jika P ada di kanan S, $Q_s = A$, jadi garis-pengaruhnya mulai dari C sampai S serupa dengan A. Ordinat Q_s di sebelah kiri S terdapat sebagai ordinat A, dikurangi dengan panjang garis a yang melukiskan ordinat $P = 1$. Jadi garis-penutup menjadi $ASSBC$ sedang $AS \,//\, BC$.

Untuk Q_{bl} garis-penutup menjadi $AB''BC$. Di bawah ini dilukiskan sekali lagi garis-garis pengaruh B dan gaya-gaya lainnya.



Gambar IV, 39

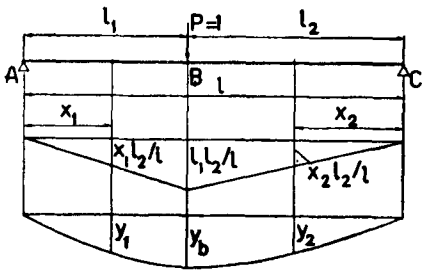
Perhatian tentang dimensi garis-pengaruh y_k = ordinat-pengaruh gaya-kekuatan X_k.

$X_k = P.y_k$. Oleh karena X_k dan P itu kedua-duanya berdimensi kekuatan, jadi y_k tak berdimensi y_m = ordinat-pengaruh gaya-momen $X_m = P.y_m$. Di sini y_m berdimensi ukuran panjang, atau tertulis $[y_m] = [l]$ atau $[m']$.

§ 20. Analisis.

Di bawah ini kita menghitung ordinat-ordinat garis-pengaruh secara analisis pada balok dengan EI tetap.

1. Garis-pengaruh B. Ini dilukiskan oleh garis lentur yang ditimbulkan oleh muatan $P = 1$ di titik B pada balok AC. Bidang momen yang disebabkan oleh muatan dianggap sebagai "muatan", dan ordinat "momen" pada "muatan" ini berarti EI kali ordinat-garis-lentur.



Gambar IV, 40

"Reaksi-perletakan" di A pada "muatan" ini ada $\frac{1}{l}$ statis momennya bidang-momen tersebut terhadap titik C yaitu $= \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{6} l_2(l^2 - l_2^2)$ atau

$$\frac{1}{l} \cdot \frac{1}{6} l_1 l_2 (l + l_2)$$

"Reaksi-perletakan" di titik C ada

$$\frac{1}{l} \cdot \tfrac{1}{6} l_1(l^2 - l_1^2) \text{ atau } \frac{1}{l} \cdot \tfrac{1}{6} l_1 l_2(l + l_1)$$

"Momen" di titik sejauh $x_1 < l_1$ dari A ada :

$$y_1 = \frac{1}{6l} l_1 l_2 (l + l_2) x_1 - \tfrac{1}{6} x_1^3 l_2)l = \frac{1}{6l} \{l_1 l_2 (l + l_2) x_1 - l_2 x_1^3\}$$

Persamaan ini melukiskan perjalanan garis-lentur bagian AB. Untuk titik sejauh $x_2 < l_2$ dari C terdapat : $y_2 = \frac{1}{6l} \{(l_1 l_2 (l + l_1) x_2 - l_2 x_2^3\}$ yaitu perjalanan garis-lentur bagian CB.

Jika $x_1 = l_1$ atau $x_2 = l_2$ terdapat : $y_b = \frac{1}{6l} \{l_1 l_2 (l + l_2) - l_2 l_1^3\} =$

$$= \frac{l_1^2 l_2}{6l} \{l + l_2 - l_1\} = \frac{l_1^2 l_2^2}{3l}.$$

Apabila $l_2 > l_1$ ordinat-maximum terdapat di bagian CB, di mana :

$$dy_2/dx_2 = 0, \quad \text{jadi } l_1 l_2 (l + l_1) - 3 l_1 x_2^2 = 0$$

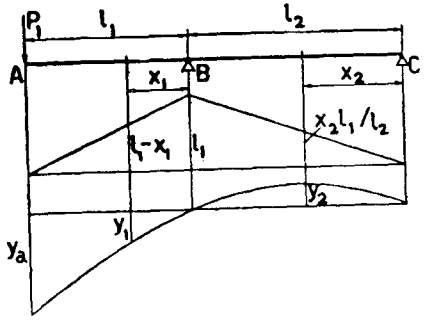
$$x_2 = \sqrt{\tfrac{1}{3} l_2 (l + l_1)} = \sqrt{\tfrac{1}{3}(l - l_1)(l + l_1)} = \sqrt{\tfrac{1}{3}(l^2 - l_1^2)}$$

Perlu diingatkan, bahwa $B = P$ jika P berdiri di B, jadi $B > P$ pada kedudukan muatan di sebelah kanan B.

Untuk $l_1 = l_2 = \frac{1}{2}l$ terdapat $x_2 = \frac{1}{2}l$ (di mana y_2 menjadi maximum).
Pada $l_1 = 0{,}4l$ terdapat $x_2 = l\sqrt{0{,}28} \approx 0{,}53l$ atau $0{,}07l$ di kanan B.

2. Garis-pengaruh A. Kita menggunakan hukum: $d^2y/dx^2 = -M_x/EI$. Selanjutnya, oleh karena EI itu nilai yang tetap, besaran ini tak dimasukkan dalam hitungan-hitungan di bawah ini.

Bagian CB. Absis x_2 diukur dari C ke kiri.



Gambar IV, 41

$M_{x2} = -x_2 l_1/l_2$; $d^2y_2/dx_2^2 = +x_2 l_1/l_2$

$dy_2/dx_2 = \frac{1}{2}(l_1/l_2)x_2^2 + C_1$

$y_2 = \frac{1}{6}(l_1/l_2)x_2^3 + C_1 x_2 + C_2$

$x_2 = 0$; $y_2 = 0$ jadi $C_2 = 0$

$x_2 = l_2$; $y_2 = 0$ jadi $\frac{1}{6}(l_1/l_2)l_2^3 + C_1 l_2 = 0$, $C_1 = -\frac{1}{6}l_1 l_2$

$y_2 = \frac{1}{6}\{(l_1/l_2)x_2^3 - l_1 l_2 x_2\}$

dy_2/dx_2 untuk $x_2 = l_2$ ada $\frac{1}{2}(l_1/l_2)l_2^2 - \frac{1}{6}l_1 l_2 = \frac{1}{3}l_1 l_2$

Bagian BA: $M_{x1} = -(l_1 - x_1)$.

$d^2y_1/dx_1^2 = l_1 - x_1$

$dy_1/dx_1 = l_1 x_1 - \frac{1}{2}x_1^2 + C_1$ dan untuk $x_1 = 0$

$dy_1/dx_1 = C_1 = dy_2/dx_2$ untuk $x_2 = l_2$ yaitu $\frac{1}{3}l_1 l_2$

Jadi $C_1 = \frac{1}{3}l_1 l_2$.

$dy_1/dx_1 = l_1 x_1 - \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{3}l_1 l_2$

$y_1 = \frac{1}{2}l_1 x_1^2 - \frac{1}{6}x_1^3 + \frac{1}{3}l_1 l_2 x_1 + C_2$ dan pada $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ jadi

$y_1 = -\frac{1}{6}x_1^3 + \frac{1}{2}l_1 x_1^2 + \frac{1}{3}l_1 l_2 x_1$

$x_1 = l_1$; $y_1 = y_a = \frac{1}{3}l_1^3 + \frac{1}{3}l_1^2 l_2 = \frac{1}{3}l^2 l_1$

Jika muatan P berdiri di atas A, maka $A = P$. Dan apabila $l_2 = 0$, maka $y_a = \frac{1}{3}l_1^3$ yang berarti, bahwa perletakan B menjadi jepitan.

3. Garis-pengaruh C. Persamaan-persamaan terdapat dengan cara tukar menukar di dalam hasil pada A. Jadi bagian AB:

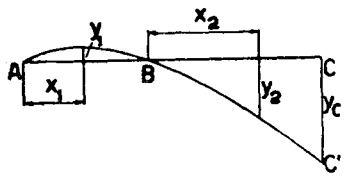
$y_1 = \frac{1}{6}\{(l_2/l_1)x_1^3 - l_1 l_2 x_2\}$

Bagian BC:

$y_2 = -\frac{1}{6}x_2^3 + \frac{1}{2}l_2 x_2^2 + \frac{1}{3}l_1 l_2 x_2$

$y_c = \frac{1}{3}l_2^3 + \frac{1}{3}l_1 l_2^2 = \frac{1}{3}l l_2^2$

Juga di sini terdapat $C = P$ jika P berdiri di atas C.

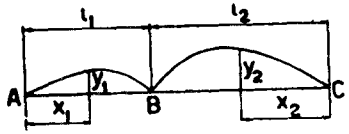


Gambar IV, 42

4. Garis-pengaruh M_b. Kita mempergunakan pendapat-pendapat di dalam § 12, a, 1 dan 2 dengan $EI_1 = EI_2 = EI$ dan huruf a diganti dengan huruf x, serta $P = 1$.

$y_1 = \frac{1}{2}\frac{x_1(l_1^2 - x_1^2)}{l_1^2 + l_1 l_2} = \frac{1}{2}\frac{x_1(l_1^2 - x_1^2)}{l l_1}$

$y_2 = \frac{1}{2}\frac{x_2(l_2^2 - x_2^2)}{l_2^2 + l_1 l_2} = \frac{1}{2}\frac{x_2(l_2^2 - x_2^2)}{l l_2}$



Gambar IV, 43

Max. y_1 terdapat pada $dy_1/dx_1 = 0$;

$l_1^2 - \frac{1}{3}x_1^2 = 0$; $x_1 = l_1\sqrt{\frac{1}{3}}$. Dan max. y_2 terdapat pada $x_2 = l_2\sqrt{\frac{1}{3}}$.

5. Garis-pengaruh gaya-gaya-tampang (Q_{x1}, M_{x1}, Q_{x2}, M_{x2}) dapat dihitung berdasarkan atas pendapat-pendapat di atas ini. Misalnya:
$M_{x1} = M_{x1}^o - M_b x_1/l_1$ atau $M_{x1} = Ax_1$ selama muatan ada di kanan tampang ini, d.s.t.

§ 21. Satu ujung balok terjepit (gb. IV, 44)

$AB = BC = l$; $CD = a = \frac{1}{4}l$; A jepit.

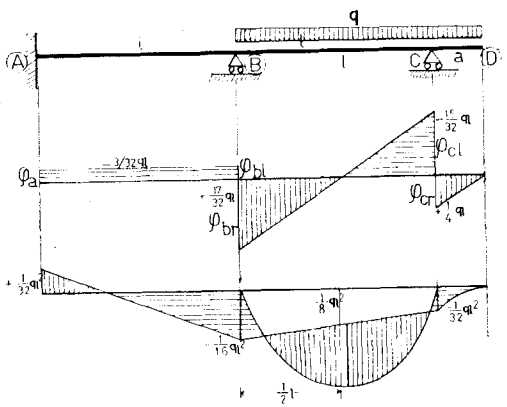
$M_c = \frac{1}{2}qa^2 = \frac{1}{32}ql^2$ (bekerja negatif).

Perletakan B: $\frac{1}{6}M_a + \frac{2}{3}M_b + \frac{1}{6}M_c = \frac{1}{24}ql^2$.

$\frac{7}{12}M_b + \frac{1}{192}ql^2 = \frac{1}{24}ql^2$.

$M_b = \frac{12}{7} \circ \frac{7}{192}ql^2 = \frac{1}{16}ql^2$

$M_a = -\frac{1}{32}ql^2$ (bekerja positif).



Gambar IV, 44

$A = (M_a - M_b)/l = -\frac{3}{32}ql. = Q_a = Q_{bl}$.

$Q_{br} = \frac{1}{2}ql + (M_b - M_c)/l = \frac{17}{32}ql$; $B = Q_{br} - Q_{bl} = \frac{5}{8}ql$.

$Q_{cl} = -(1 - \frac{17}{32})ql = -\frac{15}{32}ql$; $Q_{cr} = qa = \frac{1}{4}ql$, $C = Q_{cr} - Q_{cl} = \frac{23}{32}ql$.

Bentang BC : $Q_x = Q_{br} - qx = \frac{17}{32}ql - qx$. Pada $x = x_o$, $Q_x = 0$, $x_o = \frac{17}{32}l$,

$Q_{br} = qx_o$

$M_x = Q_{br}.x - \frac{1}{2}qx^2 - M_b = \frac{1}{2}qx_o x - \frac{1}{2}qx^2 - M_b$.

$M^+_{max} = x = x_o = \frac{1}{2}qx_o^2 - M_b = (\frac{1}{2} \cdot \frac{289}{1024} - \frac{1}{16})ql^2 = \frac{161}{2048}ql^2$.

$M_x = 0$ jika $qx_o x - \frac{1}{2}qx^2 - M_b = 0$

$x = x_o \pm \sqrt{(x_o^2 - 2M_b/q)} = x_o \pm u$.

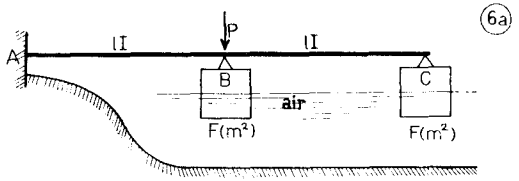
$x_1 = x_o - u$; $x_2 = x_o + u$; $l_o = x_2 - x_1 = 2u$; $M^+_{max} = \frac{1}{2}qu^2 = \frac{1}{8}ql_o^2$,

seolah-olah balok BC direduksi menjadi balok statis-tertentu dengan bentang $l_o < l$.

§ 22. **Perletakan-perletakan terapung (ponton)**, (gb. IV, 45)

A jepit, B dan C diletakkan di atas ponton masing-masing.
Berat jenis cairan (air) = γ(t/m^3)
Luas penampang-ponton = F(m^2), tetap.

a) Ponton B dibebani dengan P; sehingga B turun sejauh y_b (m) dan C sejauh y_c (m).



Gambar IV, 45

$M_a l/3EI + M_b l/6EI = y_b/l$ ..... (1)

$M_a l/6EI + 2M_b l/3EI = -y_b/l - (y_b - y_c)/l$. ..... (2)

$B = P + \gamma F y_b = (M_b - M_a)/l + M_b/l$ ..... (3)

$C = \gamma F y_c = -M_b/l$ ..... (4)

Empat persamaan dengan empat anu, yaitu: M_a, M_b, y_b dan y_c.

b) Tanpa adanya beban, titik-titik A, B dan C membentuk garis lurus mendatar. Kemudian permukaan air *naik* sejauh z (m). Berapakah naiknya ponton B (y_b) dan ponton C (y_c) ?

$B = \gamma F(z - y_b)$; $C = \gamma F(z - y_c)$

$M_a l/3EI + M_b l/6EI = -y_b/l$ ..... (1)

$M_a l/6EI + 2M_b l/3EI = y_b/l + (y_b - y_c)/l$ ..... (2)

$B = (M_b - M_a)/l = \gamma F(z - y_b)$ ..... (3)

$C = (M_c - M_b)/l = \gamma F(z - y_c)$ ..... (4)

C. BALOK DI ATAS EMPAT PERLETAKAN

§ 23. **Muatan berpusat.**

Kita anggap, bahwa EI di masing-masing lapangan bernilai tetap (balok prismatis).

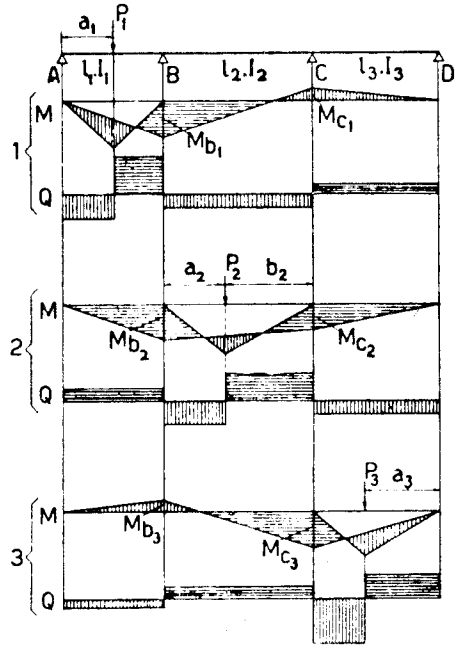
1. Muatan P_1 di lapangan AB sejauh $a_1 < l_1$ dari A.

Persamaan-persamaan tiga-momen :

$$\tfrac{1}{3}M_{b1}(l_1/EI_1 + l_2/EI_2) + \tfrac{1}{6}M_{c1}l_2/EI_2 = P_1a_1(l_1^2 - a_1^2)/6EI_1l_1 \ldots\ldots (1)$$

$$\tfrac{1}{6}M_{b1}l_2/EI_2 + \tfrac{1}{3}M_{c1}(l_2/EI_2 + l_3/EI_3) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Menurut persamaan (2) terdapat, bahwa M_{b1} dan M_{c1} berlawanan tandanya. Ini berarti, bahwa sebagai hasil akan terdapat nilai negatif untuk M_{c1} yang arah-kerjanya positif (melengkungkan balok ke bawah).



Gambar IV, 46

Reaksi-reaksi perletakan :

$$A_1 = \frac{(l_1 - a_1)}{l_1}P_1 - \frac{M_{b1}}{l_1}$$

$$B_1 = \frac{1}{l_1}(a_1P_1 + M_{b1}) + \frac{1}{l_2}(M_{b1} - M_{c1})$$

$$C_1 = \frac{1}{l_2}(M_{c1} - M_{b1}) + M_{c1}/l_3;\quad D_1 = -M_{c1}/l_3 \text{ (positif)}$$

Kejadian khusus : $l_1 = l_2 = l_3 = l$; $I_1 = I_2 = I_3 = I$

$$\tfrac{2}{3}M_{b1} + \tfrac{1}{6}M_{c1} = \tfrac{1}{6}P_1a_1(l^2 - a_1^2)/l^2 \quad (1)$$

$$\tfrac{1}{6}M_{b1} + \tfrac{2}{3}M_{c1} = 0 \quad (2)$$

$$M_{c1} = -\tfrac{1}{4}M_{b1}$$

$$M_{b1} = -\tfrac{8}{5}\cdot\tfrac{1}{6}P_1a_1(l^2 - a_1^2)/l^2 = -\frac{4}{15l^2}a_1(l^2 - a_1^2)P_1$$

$$M_{c1} = -\frac{1}{15l^2}a_1(l^2 - a_1^2)P_1$$

Dengan $a_1 = \frac{1}{2}l$, menjadi: $M_{b1} = \frac{1}{10}P_1l$ dan $M_{c1} = -\frac{1}{40}P_1l$.

$A_1 = \frac{1}{2}P_1 - \frac{1}{10}P_1 = \frac{2}{5}P_1$; $B_1 = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{10}P_1 + \frac{1}{10}P_1 + \frac{1}{40}P_1 = \frac{29}{40}P_1$;

$C_1 = -(\frac{1}{10} + 2.\frac{1}{40})P_1 = -\frac{3}{20}P_1$; $D_1 = \frac{1}{40}P_1$; sebagai kontrol: $\Sigma R = P_1$.

2. Muatan P_2 di lapangan BC berdiri sejauh $a_2 < l_2$ dari B.

$$\tfrac{1}{3}M_{b2}(l_1/EI_2 + l_2/EI_2) + \tfrac{1}{6}M_{c2}l_2/EI_2 = P_2b_2(l_2^2 - b_2^2)/6EI_2l_2 \ldots\ldots (1)$$

$$\tfrac{1}{6}M_{b2}l_2/EI_2 + \tfrac{1}{3}M_{c2}(l_2/EI_2 + l_3/EI_3) = P_2a_2(l_2^2 - a_2^2)/6EI_2l_2 \ldots\ldots (2)$$

Kejadian khusus: $l_1 = l_2 = l_3 = l$; $I_1 = I_2 = I_3 = I$.

$$\tfrac{2}{3}M_{b2} + \tfrac{1}{6}M_{c2} = P_2.a_2b_2(l + b_2)/6l^2 \ldots\ldots (1)$$

$$\tfrac{1}{3}M_{b2} + \tfrac{2}{3}M_{c2} = P_2.a_2b_2(l + a_2)/6l^2 \ldots\ldots (2)$$

$$16M_{b2} + 4M_{c2} = 4P_2a_2b_2(l + b_2)/l^2 \ldots\ldots (1)$$

$$M_{b2} + 4M_{c2} = P_2a_2b_2(l + a_2)/l^2 \ldots\ldots (2)$$

$$15M_{b2} = \frac{1}{l^2}P_2a_2b_2(4l + 4b_2 - l - a_2) = \frac{1}{l^2}P_2a_2b_2(7l - 5a_2)$$

$$M_{b2} = \frac{1}{15l^2}.P_2a_2b_2(7l - 5a_2)$$

$$M_{c2} = \frac{1}{15l^2}.P_2a_2b_2(7l - 5b_2)$$

Jika pula $a_2 = b_2 = \frac{1}{2}l$, $M_{b2} = M_{c2} = \frac{8}{40}Pl$.

$A = -\frac{3}{40}P_2$; $B = C = \frac{1}{2}P_2 + M_{b2}/l = \frac{23}{40}P_2$; $D = A = -\frac{3}{40}P_2$

3. P_3 di atas lapangan sejauh a_3 dari D.

$$\tfrac{1}{3}M_{b3}(l_1/EI_1 + l_2/EI_2) + \tfrac{1}{6}M_{c3}l_2/EI_2 = 0 \ldots\ldots (1)$$

$$\tfrac{1}{6}M_{b3}l_2/EI_2 + \tfrac{1}{3}M_{c3}(l_2/EI_2 + l_3/EI_3) = \tfrac{1}{6}P_3a_3(l_3^2 - a_3^2)/EIl_3 \ldots. (2)$$

Selanjutnya analog dengan keadaan 1.

§ 24. Muatan terbagi rata, q (penuh).

1. q_1 di lapangan AB.

$\frac{1}{3}M_{b1}(l_1/EI_1 + l_2/EI_2) +$
$\frac{1}{6}M_{c1}l_2/EI_2 = \frac{1}{24}q_1l_1^3/EI_1$ .. (1)

$\frac{1}{6}M_{b1}l_2/EI_2 + \frac{1}{3}M_{c1}(l_2/EI_2 +$
$l_3/EI_3) = 0$ ..... (2)

Kejadian khusus: $l_1 = l_2 =$
$l_3 = l$; $I_1 = I_2 = I_3 = I$.

$\frac{2}{3}M_{b1} + \frac{1}{6}M_{c1} = \frac{1}{24}q_1l^2$ .. (1)

$\frac{1}{6}M_{b1} + \frac{2}{3}M_{c1} = 0$ ..... (2)

$M_{c1} = -\frac{1}{4}M_{b1}$ ..... (2)

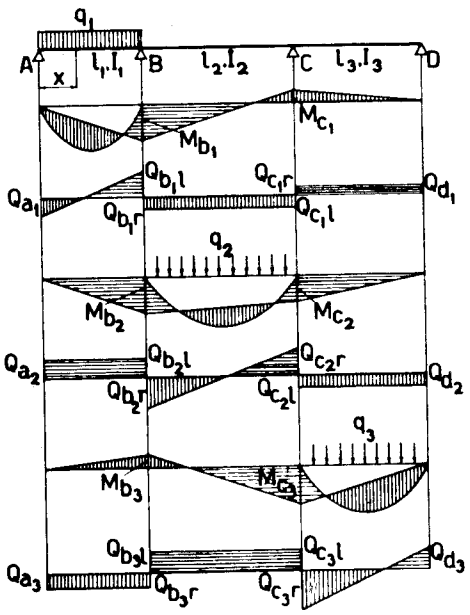
$\frac{5}{8}M_{b1} = \frac{1}{24}q_1l^2$ ..... (1)

$M_{b1} = \frac{1}{15}q_1l^2$; $M_{c1} = -\frac{1}{60}q_1l^2$
(bekerja positif)

$A_1 = \frac{1}{2}q_1l - M_{b1}/l = \frac{13}{30}q_1l$

$B_1 = \frac{1}{2}q_1l + (2M_{b1} - M_{c1})/l = \frac{13}{20}q_1l$

$C_1 = (2M_{c1} - M_{b1}/l = -\frac{1}{10}q_1l$



Gambar IV, 47

$D_1 = -M_{c1}/l = +\frac{1}{60}q_1l$; $Q_{a1} = A_1 = \frac{13}{30}q_1l$ $Q_{b1l} = A_1 - q_1l = -\frac{17}{30}q_1l$
$Q_{b1r} = B_1 + Q_{b1l} = +\frac{1}{12}q_1l$; $Q_{c1l} = Q_{b1r} = \frac{1}{12}q_1l$ $Q_{d1} = -A_1 = \div\frac{1}{60}q_1l$
$Q_{x1} = A_1 - q_1x_1 = \frac{13}{30}q_1l - q_1x_1$; $Q_{x1} = 0$ untuk $x_1 = \frac{13}{30}l$
Max. $M_{x1} = \frac{1}{2}(\frac{13}{30})^2q_1l^2 = 0{,}0722q_1l^2$

2. Muatan q_2 di lapangan BG.

$\frac{1}{3}M_{b2}(l_1/EI_1 + l_2/EI_2) + \frac{1}{6}M_{c2}l_2/EI_2 = \frac{1}{24}q_2l_2^3/EI_2$ ..... (1)

$\frac{1}{6}M_{b2}l_2/EI_2 + \frac{1}{3}M_{c2}(l_2/EI_2 + l_3/EI_3) = \frac{1}{24}q_2l_2^3/EI_2$ ..... (2)

Khusus: $l_1 = l_2 = l_3 = l$; $I_1 = I_2 = I_3 = I$; oleh karena keadaan simetris, $M_{b2} = M_{c2}$.

$\frac{2}{3}M_{b2} + \frac{1}{6}M_{b2} = \frac{1}{24}q_2l^2$; $\frac{5}{6}M_{b2} = \frac{1}{24}q_2l^2$; $M_{b2} = M_{c2} = \frac{1}{20}q_2l^2$

$A_2 = -\frac{1}{20}q_2l$; $B_2 = C_2 = \frac{1}{2}q_2l + M_{b2}/l = \frac{11}{20}q_2l$; $D_2 = A_2$

$Q_{a2} = A_2 = -\frac{1}{20}q_2l = Q_{b2l}$; $Q_{b2r} = \frac{1}{2}q_2l$

$M_{max} = \frac{1}{8}q_2l^2 - M_{b2} = (\frac{1}{8} - \frac{1}{20})q_2l^2 = \frac{3}{40}q_2l^2$; $M_{x1} = -(x_1/l) \cdot \frac{1}{20}q_2l^2$

3. q_3 di atas bentang CD.

$\frac{1}{3}M_{b3}(l_1/EI_1 + l_2/EI_2) + \frac{1}{6}M_{c3}l_2/EI_2 = 0$

$\frac{1}{6}M_{b3}l_2/EI_2 + \frac{1}{3}M_{c3}(l_2/EI_2 + l_3/EI_3) = \frac{1}{24}q_3l_3^3/EI_3$

Khususnya: $l_1 = l_2 = l_3 = l$; $I_1 = I_2 = I_3 = I$. Tukar-menukar dengan hasil-hasil di ayat 1.

$M_{b3} = -\frac{1}{60}q_3l^2$; $M_{c3} = \frac{1}{15}q_3l^2$

$A_3 = \frac{1}{60}q_3l$; $B_3 = -\frac{1}{10}q_3l$; $C_3 = \frac{13}{20}q_3l$; $D_3 = \frac{13}{30}q_3l$

$M_{max} = 0{,}0722q_3l^2$

§ 25. Kombinasi muatan-muatan-lapangan.

Muatan q_1 menimbulkan momen-positif di sebagian lapangan satu dan di seluruh lapangan tiga (di sini hanya ditentukan oleh M_{c1} yang bernilai negatif, tetapi bekerja positif). Begitu juga q_3 menimbulkan momen-positif di bagian lapangan tiga dan seluruh lapangan satu. Jadi untuk mencapai max. M_{x1} dan max. M_{x3}, lapangan-lapangan satu dan tiga harus dimuati penuh (kombinasi q_1 dan q_3).

Selanjutnya muatan q_1 menimbulkan M_{b1} positif (yang bekerja negatif) dan M_{c1} negatif yang kecil nilainya dibandingkan dengan nilai M_{b1} (nilai mutlak). Begitu pula, q_3 menyebabkan M_{c3} positif dan M_{b3} negatif yang nilai mutlaknya kecil. Jadi kombinasi q_1 dan q_3 akan mengakibatkan M_{b13} dan M_{c13} yang kedua-duanya positif nilainya (tetapi negatif arah kerjanya), sedang lapangan tengah (BC) tak dimuati. Jadi seluruh lapangan BC akan menahan momen negatif. Ini berarti, bahwa untuk mencapai M_{x2} minimum, lapangan-lapangan satu dan tiga harus dimuati sepenuh-penuhnya. Kombinasi q_1 dan q_3 ini juga menghasilkan max. A dan min. A. Muatan di lapangan tengah saja (q_2) menyebabkan max. M_{x2} min. A serta min. D dan min. M_{x1} serta min. M_{x3}.

Kombinasi $q_1 + q_2$ menimbulkan *nilai mutlak* maximum untuk: M_b, R_b dan Q_{bl}. Untuk mencegah salah-faham di sini disebut "nilai-mutlak", sebab dipandang dari sudut ilmu-gaya, arah-kerjanya M_b dan Q_{bl} itu negatif. Dilihat dari sudut ilmu-aljabar lebih tepat dikatakan: minimum M_b dan minimum Q_{bl} (extrem negatif).

Pada akhirnya, kombinasi $q_2 + q_3$ itu analog dengan kombinasi $q_1 + q_2$, jadi menimbulkan max. M_c, max. C dan max. Q_{cr} (juga nilai-mutlak di sini).

Pada keadaan khusus dengan $l_1 = l_2 = l_3 = l$; $I_1 = I_2 = I_3 = I$ dan $q_1 = q_2 = q_3 = q$.

1. Kombinasi q_1 dan q_3. $M_{b13} = M_{c13} = (\frac{1}{15} - \frac{1}{60})ql^2 = \frac{1}{20}ql^2$

$$M_{x1} = M^o_{x1} - M_{b13} \cdot x_1/l = \tfrac{1}{2}ql \cdot x_1 - \tfrac{1}{2}qx_1^2 - \tfrac{1}{20}qxl = \tfrac{9}{20}qlx_1 - \tfrac{1}{2}qx_1^2$$

$$dM_{x1}/dx_1 = 0;\ \tfrac{9}{20}l - x_1 = 0 \text{ atau } x_1 = \tfrac{9}{20}l$$

$$\text{Max. } M_{x1} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{9}{20})^2ql^2 = \tfrac{81}{800}ql^2 = 0{,}101ql^2$$

$$A_{1,3} = D_{1,3} = \text{max. } A = \text{max. } D = (\tfrac{13}{30} + \tfrac{1}{60})ql = \tfrac{9}{20}ql$$

$$M_{x1} = 0 \text{ pada } \tfrac{9}{20}qlx_1 - \tfrac{1}{2}qx_1^2 = 0, \text{ atau } x_1 = 2.\tfrac{9}{20}l = \tfrac{9}{10}l$$

$$\text{Min. } M_{x2} = -M_{b13} = -\tfrac{1}{20}ql^2$$

2. Kombinasi q_1 dan q_2. $M_{b12} = (\frac{1}{15} + \frac{1}{20})ql^2 = \frac{7}{60}ql^2$ (maximum nilai mutlaknya).

$$B_{1,2} = \text{max. } B = (\tfrac{13}{20} + \tfrac{11}{20})ql = \tfrac{6}{5}ql$$

$$Q_{b12,l} = -(\tfrac{17}{30} + \tfrac{1}{12})ql = -\tfrac{37}{60}ql \text{ (minimum)}$$

3. Kombinasi q_1, q_2, dan q_3, misalnya berat sendiri. Lebih tepat sekarang huruf q diganti dengan huruf g.

$$M_{bg} = M_{cg} = (\tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{20} - \tfrac{1}{60})gl^2 = \tfrac{1}{10}gl^2$$

$$\text{Max. } M_{x2} = \tfrac{1}{8}gl^2 - M_{bg} = \tfrac{1}{40}gl^2$$

$$M_{x2} = \tfrac{1}{2}glx_2 - \tfrac{1}{2}gx_2^2 - \tfrac{1}{10}gl^2 = \tfrac{1}{2}g(-x_2^2 + lx_2 - \tfrac{1}{10}l^2);\ M_{x2} = 0$$

jika $x_2^2 - lx_2 + \frac{1}{10}l^2 = 0$, atau $x_2 = (\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{20}})l$

$$A_g = \tfrac{1}{2}gl - \frac{1}{l}M_{bg} = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{10})gl = \tfrac{2}{5}gl, \text{ atau juga dengan secara men-}$$

jumlah pendapatan-pendapatan dari q_1, q_2 dan q_3 menjadi:

$$A_g = A_1 + A_2 + A_3 = (\tfrac{13}{30} - \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{60})gl = \tfrac{2}{5}gl = D_g$$

$$B_g = gl + \frac{1}{l}M_{bg} = 1{,}10gl \text{ atau } B_g = B_1 + B_2 + B_3 =$$

$$= (\tfrac{13}{20} + \tfrac{11}{20} - \tfrac{1}{10})gl = 1{,}10gl = C_g$$

$$Q_{ag} = A_g = \tfrac{2}{5}gl = -Q_{dg};\ Q_{bgl} = Q_{ag} - gl = -\tfrac{3}{5}gl$$

$$Q_{bgr} = \tfrac{1}{2}gl = -Q_{cg}$$

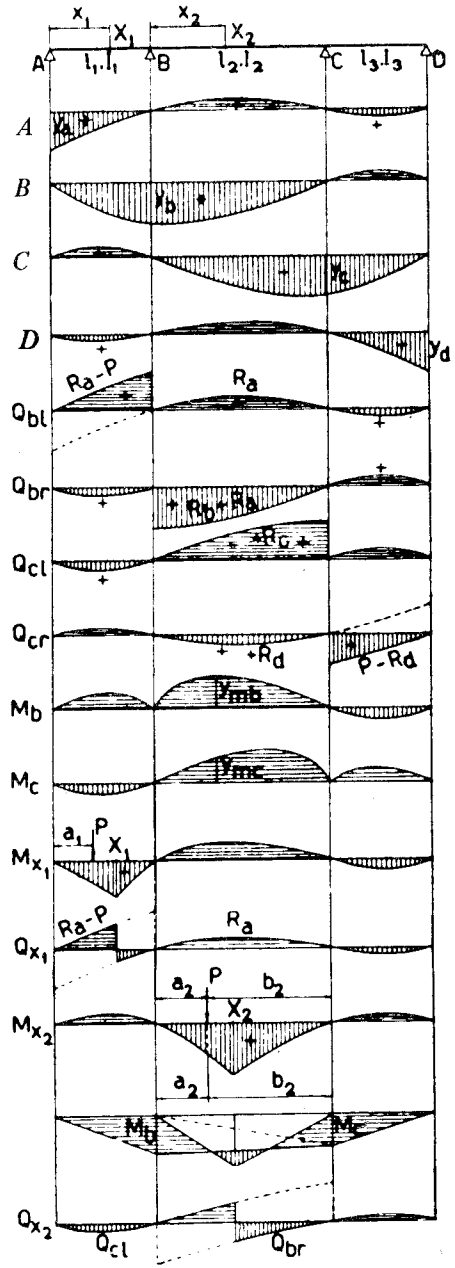
$$Q_{x1} = A_g - gx_1 = (\tfrac{2}{5}l - x_1)g;\ Q_{x1} = 0 \text{ untuk } x_1 = \tfrac{2}{5}l$$

$$\text{Max. } M_{x1} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{5})^2gl^2 = \tfrac{2}{25}gl^2$$

$$M_{x1} = A_g x_1 - \tfrac{1}{2}gx_1^2 = (\tfrac{2}{5}l - \tfrac{1}{2}x_1)x_1g \text{ dan menjadi 0 pada } x_1 = \tfrac{4}{5}l$$

§ 26. Garis-pengaruh (gamb. IV, 48).

Seperti pada balok di atas tiga perletakan, garis-garis pengaruh ini dilukiskan dengan garis-elastis yang diakibatkan oleh gaya = 1 yang bekerja pada titik-pegangan gaya yang bersangkutan setelah kemungkinan bekerjanya dilenyapkan. Faedah lukisan garis pengaruh itu ialah untuk mengetahui kedudukan muatan yang menimbulkan nilai extrem pada suatu gaya yang kita akan hitung. Nilai extrem positif terdapat jika bagian garis-pengaruhnya positif dimuati sepenuhnya, dst.



Gambar IV. 48

Bandingkanlah kombinasi-kombinasi di atas yang menghasilkan nilai-nilai extrem.

Tentang garis-garis pengaruh gaya statis kelebihan tak usah diterangkan lagi, gambar-gambar sudah terang. Kita akan membicarakan garis-pengaruh gaya-gaya pada tampang-tampang X_1 dan X_2.

1. Garis-pengaruh M_{x1}. Selama muatan ada di luar lapangan AB, $M_{x1} = M_b x_1/l_1$, jadi garis-pengaruhnya di bagian DCB serupa dengan garis-pengaruh M_b. Atau juga serupa dengan A sebab:

$M_{x1} = A.x_1$.

Jika P berdiri di lapangan AB,

$$M_{x1} = M^o_{x1} - M_b.x_1/l_1 =$$

$$\frac{P}{l_1}a_1(l_1 - x_1) - M_b \cdot x_1/l_1$$

$M_b = M_{b1}$ di dalam § 21 bagian 1.

2. Q_{x1}. Selama P ada di kanan X_1 maka $Q_{x1} = A$. Jadi garis-pengaruhnya serupa dengan garis-pengaruh A mulai dari D sampai X_1. Jika P ada di kiri X_1 menjadi:

$$Q_{x1} = A \div P$$

atau ordinat Q_{x1} = ordinat $A - y_a$ yang berarti bahwa cabang garis pengaruh Q_{x1} dari A sampai X_1 berjalan // garis A.

3. M_{x2}. Selama muatan berdiri di luar lapangan BC, terdapat:

$M_{x2} = M_b(l_2 - x_2)/l_2 + M_c x_2/l_2$ dan tandanya negatif sebab M_b atau M_c yang positif itu bekerja negatif.

Dan apabila P bekerja di lapangan BC, $M_{x2} = M^{\circ}_{x2} - M_b(l_2 - x_2)/l_2 - M_c x_2/l_2$.

$M^{\circ}_{x2} = Pa_2(l_2 - x_2)/l_2$, dan untuk mendapat M_b dan M_c kita ambil ordinat-ordinatnya masing-masing di bawah P pada garis-garis-pengaruhnya (garis-garis y_{mb} dan y_{mc}).

4. Gaya-lintang Q_{x2}. Selama P berada di kiri X_2, $Q_{x2} = Q_{cl}$ dan selama P ada di kanan X_2, $Q_{x2} = Q_{br}$. Jadi dari A hingga X_2 garis-pengaruh Q_{x2} ini serupa dengan garis Q_{cl} dan dari X_2 sampai D serupa dengan garis-pengaruh Q_{br}.

§ 27. Susunan dasar diambil balok AD (gamb. 49).

Sebagai gaya-statis-kelebihan kita pilih R_b dan R_c. Di titik B kita mengadakan muatan = 1 dan melukiskan garis-elastisnya yaitu garis b.

$$y_b = 1.\ \delta_{bb} = \delta_{bb};\ y_c = \delta_{cb};\ y_p = \delta_{pb}$$

Kemudian memindahkan muatan = 1 tadi di titik C dan menggambar pula garis-elastisnya, yaitu garis c.

$$y_b = \delta_{bc} = \delta_{cb};\ y_c = \delta_{cc};\ y_p = \delta_{pc}$$

Akibat dari muatan P:

$$y^{\circ}_b = P\delta_{bp} = P\delta_{pb} \text{ dan } y^{\circ}_c = P\delta_{cp} = P\delta_{pc}$$

Nilai-nilai δ_{pb} dan δ_{pc} sudah diketahui di atas.

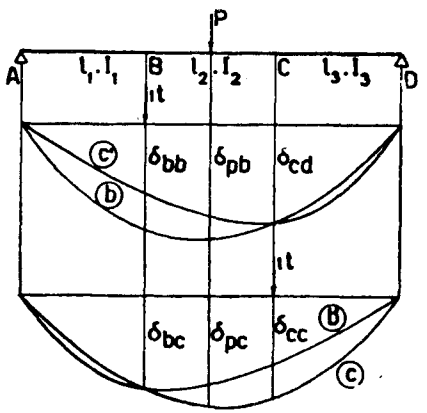
Supaya B dan C tidak turun, harus dipenuhi pada syarat-syarat:

$$B\delta_{bb} + C\delta_{bc} = P\delta_{bp} = P\delta_{pb}$$
$$B\delta_{cb} + C\delta_{cc} = P\delta_{cp} = P\delta_{pc}$$

$$B = \frac{(\delta_{pb}\delta_{cc} - \delta_{pc}\delta_{bc})}{\delta_{bb}\delta_{cc} - \delta_{bc}\delta_{cb}} P =$$

$$= \frac{\delta_{pb} - \delta_{pc}.\delta_{bc}/\delta_{cc}}{\delta_{bb} - \delta^2_{bc}/\delta_{cc}} P$$

δ_{pb} = ordinat garis b.



Gambar IV, 49

$\delta_{pc} \cdot \delta_{bc}/\delta_{cc}$ = ordinat garis $c \times \delta_{bc}/\delta_{cc}$ = ordinat garis c'. Jadi $\delta_{pb} - \delta_{pc}\delta_{bc}/\delta_{cc}$ = ordinat antara garis b dan garis c' dan garis c' ini terdapat jika ordinat-ordinat garis c dilipatkan dengan δ_{bc}/δ_{cc} yang tetap nilainya.

Oleh karena $\delta_{bb} - \delta^2_{bc}/\delta_{cc}$ itu besaran tetap, garis-pengaruh B boleh dilukiskan oleh ordinat-ordinat antara garis b dan garis c' tadi. Dan B bernilai positif, di mana $y_b > y_{c'}$.

$C = \dfrac{\delta_{pc} - \delta_{pb}\delta_{bc}/\delta_{bb}}{\delta_{cc} - \delta^2_{bc}/\delta_{bb}}$ sedang δ_{bc}/δ_{bb} dan $(\delta_{cc} - \delta^2_{bc}/\delta_{bb})$ itu besaran-besaran tetap pula.

Kita menggambar garis b' yang ordinatnya = $(\delta_{bc}/\delta_{bb}) \times$ ordinat garis b, pada garis c. Akan terdapat bahwa ordinat C = ordinat antara garis-garis c dan b' ini, dan dianggap positif jika $y_c > y_b$.

Jika $I_1 = I_2 = I_3 = I$, maka menurut § 20, 1 terdapat:

$$EI\delta_{bb} = \frac{l_1^2(l_2 + l_3)^2}{3(l_1 + l_2 + l_3)};\ EI\delta_{cc} = \frac{l_3^2(l_1 + l_2)^2}{3(l_1 + l_2 + l_3)}$$

$$EI\delta_{bc} = EI\delta_{cb} = \frac{l_1 l_3\{(l_1 + l_2 + l_3)^2 - l_1^2 - l_3^2\}}{6(l_1 + l_2 + l_3)}$$

D. BALOK TERJEPIT PADA UJUNG-UJUNGNYA

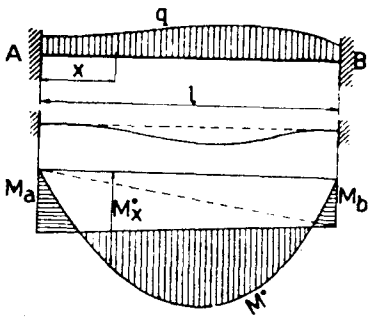
§ 28. Pandangan umum.

Setelah ada muatan, garis-garis singgung pada garis-lentur di tempat ujung-ujung balok tetap bersatu padu dengan sumbu-balok semula, jadi di jepitan ini tak ada putaran sudut atau

$$\varphi_a = \varphi_b = 0;\ \varphi_a + \varphi_b = 0$$

Oleh karena ini, luas bidang $\dfrac{M_a + M_b}{EI_x}$ = luas bidang $\dfrac{M^{\circ}}{EI_x}$

$$M_a\int_o^l \left(\frac{l - x)}{l}\right) dx/EI_x + M_b\int_o^l \frac{x}{l}.\, dx/EI_x = \int_o^l M^{\circ}_x dx/EI_x$$



Gambar IV, 50

Jika EI_x itu tetap, menjadi $\frac{1}{l}M_a$

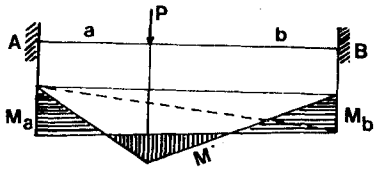
$$\int_o^l (l-x)dx + \frac{1}{l}M_b\int_o^l xdx = \int_o^l M_x^o dx$$

$$\tfrac{1}{2}M_a l + \tfrac{1}{2}M_b l = \int_o^l M_x^o dx$$

Dan selanjutnya apabila muatan itu simetris, $M_a = M_b = \frac{1}{l}\int_o^l M_x^o dx$

§ 29. Beberapa hitungan-hitungan.

Balok kita ambil prismatis atau dengan EI yang tetap.



Gambar IV, 51

1. Muatan terpusat P sejauh a dari perletakan A.

Persamaan tiga-momen:

$$\tfrac{1}{6}M_a l/EI + \tfrac{1}{3}M_b l/EI = \tfrac{1}{6}Pab(l+b)/EIl \quad | \quad 4M_a + 2M_b = 2Pab(l+b)/l^2$$
$$\tfrac{1}{6}M_a l/EI + \tfrac{1}{3}M_b l/EI = \tfrac{1}{6}Pab(l+a)/EIl \quad | \quad M_a + 2M_b = Pab(l+a)/l^2$$

$$3M_a = P\frac{ab}{l^2}\{2(l+b) - (l+a)\} = 3Pab^2/l^2$$

$$M_a = Pab^2/l^2;\ M_b = Pa^2b/l^2$$

Sebagai kontrol: luas bidang $M_o = P\frac{ab}{l}\cdot\frac{1}{2}l = \frac{1}{2}Pab.$

luas bidang momen-jepitan =

$$\tfrac{1}{2}(M_a + M_b)l = \tfrac{1}{2}P\frac{ab}{l}(b+a) = \tfrac{1}{2}Pab$$

$$M_{max} = P\frac{ab}{l} - \frac{b}{l}M_a - \frac{a}{l}M_b = P\frac{ab}{l^3}(l^2 - b^2 - a^2) =$$

$$= 2P\frac{a^2b^2}{l^3} = 2\left(\frac{ab}{l^2}\right)^2 . Pl$$

$$A = P\frac{b}{l} + M_a/l - M_b/l = P\frac{b}{l^3}(l^2 + ab - a^2) = P\frac{b^2(3a+b)}{l^3}$$

$$B = P\frac{a}{l} + \frac{M_a - M_b}{l} = P\frac{a}{l^3}(l^2 - b^2 + ab) = P\frac{a^2(a+3b)}{l^3}$$

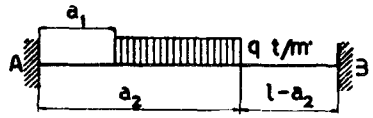
$$A + B = P$$

Dengan $a = b = \frac{1}{2}l$ terdapat: $M_a = M_b = \frac{1}{8}Pl.$

$M_{max} = \frac{1}{4}Pl - \frac{1}{8}Pl = \frac{1}{8}Pl$ atau dengan pendapat di atas tadi,

$$M_{max} = 2\left(\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1^2}\right)^2 Pl = \tfrac{1}{8}Pl$$

2. Muatan terbagi rata q t/m, mulai dari titik sejauh a_1 dari A hingga titik sejauh a_2 dari A. Pendapat-pendapat di atas kita integrasi dengan $dP = qda$ serta $b = l - a$.



Gambar IV, 52

$$M_a = \frac{1}{l^2}\int_{a_1}^{a_2} q\,a(l-a)^2\,da = \frac{q}{l^2}\{\tfrac{1}{2}l^2(a_2^2 - a_1^2) - \tfrac{2}{3}l(a_2^3 - a_1^3) + \tfrac{1}{4}(a_2^4 - a_1^4)\}$$

$$M_b = \frac{1}{l^2}q\int_{a_1}^{a_2} a^2(l-a)da = \frac{q}{l^2}\{\tfrac{1}{3}l(a_2^3 - a_1^3) - \tfrac{1}{4}(a_2^4 - a_1^4)\}$$

$$A^\circ = \frac{1}{l}(a_2 - a_1)q\{l - a_2 + \tfrac{1}{2}(a_2 - a_1)\} = (a_2 - a_1)\{l - \tfrac{1}{2}(a_1 + a_2)\}q/l$$

$$B^\circ = \frac{1}{l}(a_2 - a_1)q\{a_1 + \tfrac{1}{2}(a_2 - a_1)\} = \tfrac{1}{2}(a_2^2 - a_1^2)q/l$$

Untuk titik sejauh $a_1 < x < a_2$ dari A terdapat:

$$M_x^o = A^\circ x - \tfrac{1}{2}q(x - a_1)^2$$

$$M_x = M_x^o - \frac{(l-x)}{l}M_a - \frac{x}{l}M_b$$

Untuk mendapat M_{max}, harus dipenuhi kepada syarat $dM_x/dx = 0$ dan kemudian menghitung x dari persamaan terakhir ini.

Kejadian khusus: $a_1 = 0$ dan $a_2 = l$, atau muatan q penuh.

$$M_a = \frac{q}{l^2}\int_o^l a(l-a)^2 da = \frac{q}{l^2}\int_o^l (l^2a - 2la^2 + a^3)da = \tfrac{1}{12}ql^2$$

$$M_b = \frac{q}{l^2}\int_o^l a^2(l-a)da = \tfrac{1}{12}ql^2 = M_a$$

Juga secara langsung dengan persamaan tiga-momen, dengan pengertian bahwa $M_a = M_b$ oleh karena keadaan simetris.

$$(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6})\, M_a l/EI = \tfrac{1}{24}ql^3/EI;\ M_a = \tfrac{1}{12}ql^2$$

Atau juga berdasarkan atas ketentuan, bahwa luas bidang momen-jepitan = luas bidang M°.

$$M_a l = \tfrac{1}{8}q \cdot l^2 \cdot \tfrac{2}{3}l = \tfrac{1}{12}ql^3;\ M_a = \tfrac{1}{12}ql^2$$

3. Muatan berbentuk segi-tiga serta penuh dengan max. ordinat = q. $q_x = \frac{x}{l}q$. Huruf a di dalam kejadian 2 diganti dengan x, $a_1 = 0$ dan $a_2 = l$.

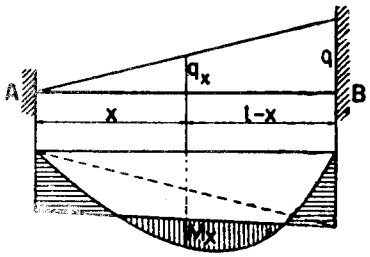
$$M_a = \frac{1}{l^2}\int_o^l x(l-x)^2 q_x dx = \frac{q}{l^3}\int_o^l (l^2x^2 - 2lx^3 + x^4)dx = \tfrac{1}{30}\, ql^2$$

$$M_b = \frac{1}{l^2}\int_o^l x^2(l-x)q_x dx = \frac{q}{l^3}\int_o^l (lx^3 - x^4)dx = \tfrac{1}{20}\, ql^2$$

$$M_x^o = \tfrac{1}{6}qlx - \tfrac{1}{6}q_x x^2 = \tfrac{1}{6}q\left(lx - \frac{x^3}{l}\right)$$

Luas-bidang $M^\circ = \tfrac{1}{6}q\int_o^l \left(lx - \frac{x^3}{l}\right)dx = \tfrac{1}{24}ql^3$

Luas bidang momen-jepit = $\tfrac{1}{2}(M_a + M_b)l = \tfrac{1}{24}ql^3$



Gambar IV, 53

$$A = \tfrac{1}{6}ql + \frac{1}{l}(M_a - M_b) = (\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{60})ql = \tfrac{3}{20}ql$$

$$B = \tfrac{1}{3}ql + \frac{1}{l}(M_b - M_a) = (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{60})ql = \tfrac{7}{20}ql$$

$Q_x = A - \tfrac{1}{2}q_x x = \left(\tfrac{3}{20}l - \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{l}\right)ql$; $Q_x = 0$ untuk $x^2 = \tfrac{3}{10}l^2$ atau $x = l\sqrt{0{,}3} \infty 0{,}547l$

$$M_x = M_x^o - \frac{(l-x)}{l}M_a - \frac{x}{l}M_b$$

$$= q\left(\tfrac{1}{6}lx - \tfrac{1}{6}\frac{x^3}{l} - \tfrac{1}{30}l^2 + \tfrac{1}{30}lx - \tfrac{1}{20}lx\right) = \left(-\tfrac{1}{30}l^2 + \tfrac{3}{20}lx - \tfrac{1}{6}\frac{x^3}{l}\right)q$$

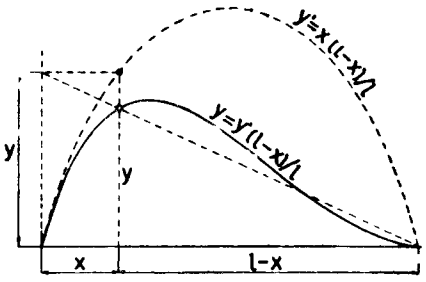
$dM_x/dx = 0$; $\tfrac{3}{20}l - \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{l} = 0$ atau $x^2 = \tfrac{3}{10}l^2$ dan $x = l\sqrt{0{,}3}$ (lihat atas di mana $Q_x = 0$).

$M_{max} \infty (-\tfrac{1}{30} + \tfrac{3}{20}\cdot 0{,}547 - \tfrac{1}{6}\cdot 0{,}547^3)ql^2 = 0{,}0214ql^2$

§ 30. Garis-pengaruh.

Oleh karena bangunan itu simetris, bentuk garis-pengaruh M_a simetris terhadap bentuk garis-pengaruh M_b dan cukup dengan mempelajari M_a.

a. Garis-pengaruh M_a.



Gambar IV, 54

1. Dengan rumus

$$M_a = \frac{1}{l^2}Px(l-x)^2$$

(§ 29, **1** jika a diganti dengan x). Jadi persamaan garis-pengaruh M_a berbunyi :

$$y = \frac{1}{l^2}x(l-x)^2 = \frac{1}{l^2}(l^2x - 2lx^2 - x^3),$$

berarti kurva berpangkat tiga.

Kurva ini dapat dilukiskan demikian:

$$y = \frac{1}{l^2}\,x(l-x)^2 = \frac{1}{l}\,x(l-x)\,.\,\frac{(l-x)}{l} = y'\frac{(l-x)}{l}$$

Kurva $y' = \frac{1}{l}\,x(l-x)$ itu berupa parabol biasa. Dengan perantaraan kurva y' ini kita dapat menggambar y secara melipatkan ordinat y' dengan faktor $(l - x)/l$ (gambar IV, 54).

$$dy/dx = \frac{1}{l^2}\,(l^2 - 4lx + 3x^2)$$

y_{max} terdapat di mana $dy/dx = 0$ atau $3x^2 - 4lx + l^2 = 0$.

$$x^2 - \tfrac{4}{3}lx + \tfrac{1}{3}l^2 = 0;\; x = (\tfrac{2}{3} + \sqrt{\tfrac{4}{9} - \tfrac{1}{3}})\,l = \tfrac{1}{3}\,l$$

dan $y_{max} = \frac{4}{27}l$

$d^2y/dx^2 = \frac{1}{l^2}\,(-4l + 6x) = 0$ di mana terdapat titik-belok, yaitu $x = \frac{2}{3}l$.

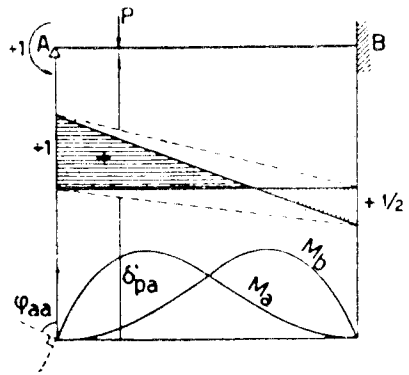
2. Dengan perantaraan garis-lentur. Perletakan A diganti dengan skarnir (melenyapkan kemungkinan bekerjanya M_a), mengerjakan di situ gaya-momen $= -1$ dan kemudian menggambar garis-lenturnya. Momen -1 ini menimbulkan M'_b di ujung B yang dapat dihitung berdasarkan atas putaran sudut pada ujung B itu tetap $= 0$.

$\frac{1}{3}M'_b l/EI + \frac{1}{6}M_a l/EI = 0$, di mana $M_a = -1$, jadi $M'_b = +\frac{1}{2}$ atau $-\frac{1}{2}M_a$.

Jumlah bidang-momen ini nanti dianggap sebagai muatan untuk menggambar garis-lentur tersebut.

Titik di mana nanti P berdiri, naik sejauh $1.\delta'_{pa} = \delta'_{pa}$ (ordinat garis-lentur). Muatan P akan berhasrat memutar sudut pada ujung A sebanyak $P.\varphi'_{ap} = P.\delta'_{pa}$.

Supaya ujung A tak berputar sudut, maka di situ harus ada momen M_a sehingga $M_a.\varphi_{aa} = P.\delta'_{pa}$, jadi $M_a = P.\delta'_{pa}/\varphi_{aa}$. Nilai δ'_{pa}



Gambar IV, 55

dapat diukur pada garis-lentur tersebut di atas,

$$EI\,\delta'_{pa} = \tfrac{1}{4}lx - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}x^3/l = x\,(l-x)^2/4\,l$$

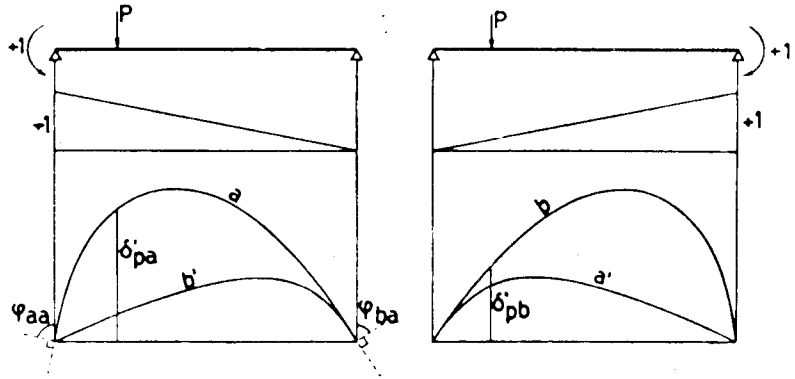
$\varphi_{aa} = \frac{1}{EIl}$ statis momennya bidang momen terhadap titik B

$$= \frac{1}{EIl}\,(\tfrac{1}{2}l.\,\frac{2}{3}\,l - \frac{1}{4}l.\,\frac{1}{3}\,l) = l/4\,E\,I \quad \text{(penting)}$$

Berhubung dengan keadaan simetris, $\varphi_{bb} = \varphi_{aa}$

3. Perletakan-perletakan A dan B diganti dengan perletakan-bebas. Kita mengadakan momen sebesar $\div 1$ pada ujung A. Garis-lentur yang ditimbulkan adalah garis a.

Kemudian mengerjakan momen $\div 1$ pada ujung B (momen di A dihilangi), dan garis-lenturnya adalah garis b. Sebagai akibat dari $M_a = -1$ titik pegangan muatan P naik setinggi $1.\delta'_{pa} = \delta'_{pa} = \varphi'_{ap}$ (ordinat garis a di tempat P)



Gambar IV, 56

Terdapat pula naiknya titik-pegangan P sebagai akibat dari $M_b = -1$ ada $\delta'_{pb} = \varphi'_{bp}$. Muatan P tak boleh memutar sudut pada kedua-dua ujung balok:

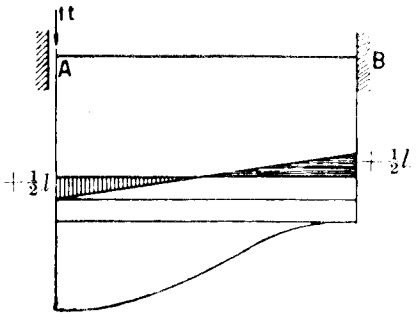
$$M_a.\varphi_{aa} + M_b\varphi_{ab} = P\varphi'_{ap} = P\delta'_{pa} \qquad M_a = \frac{\delta'_{pa}\varphi_{bb} - \delta'_{pb}\varphi_{ab}}{\varphi_{aa}\varphi_{bb} - \varphi^2_{ab}}P = \frac{\delta'_{pa} - \delta'_{pb}(\varphi_{ab}/\varphi_{bb})}{\varphi_{aa} - \varphi^2_{ab}/\varphi_{bb}}P$$

$$M_a.\varphi_{ba} + M_b\varphi_{bb} = P\varphi'_{bp} = P\delta'_{pb} \qquad M_b = \frac{\delta'_{pb} - \delta'_{pa}(\varphi_{ba}/\varphi_{aa})}{\varphi_{bb} - \varphi^2_{ab}/\varphi_{aa}}P$$

$\varphi_{aa} = \varphi_{bb} = l/3EI$; $\varphi_{ab} = \varphi_{ba} = \frac{1}{2}\varphi_{aa} = l/6EI$ (lihat § 1)

Pada garis a kita menggambar garis b' yang ordinat-ordinatnya = $(\varphi_{ab}/\varphi_{bb})$ ordinat-ordinat garis b atau $\frac{1}{2}$ ordinat-ordinat garis b. Besaran $(\varphi_{aa} - \varphi^2_{ab}/\varphi_{bb})$ itu tetap nilainya, yaitu di sini terdapat dengan mudah $= (1 - \frac{1}{4})\varphi_{aa} = l/4EI$ (akan tetapi pendapat ini tak begitu penting di sini). Jadi ordinat garis-pengaruh M_a dapat dilukiskan dengan ordinat antara garis a dan garis b' (bandingkan § 27).

Kemudian menggambar garis a' pada garis b yang ordinat-lenturnya $(\varphi_{ba}/\varphi_{aa})$ atau $\frac{1}{2}$ kali ordinat garis a. Dan ordinat M_b = ordinat garis b minus ordinat garis a'.



Gambar IV, 57

b. Garis-pengaruh reaksi-perletakan di A.

1. Dengan garis-lentur. Ujung A dipotong dan mengerjakan kekuatan = 1 di sini.

Akan tetapi kita berusaha supaya ujung A tidak berputar sudut, jadi hanya boleh naik atau turun (Gambar IV, 57).

Usaha ini menimbulkan momen M'_a di ujung A dan yang bekerja di seluruh balok. Muatan = 1 di ujung A itu menimbulkan $M^o_x = -1.x = -x$, jadi bidang M^o_x ini berupa segi-tiga dengan ordinat-puncak $\div l$ di B. Jumlah luas bidang-momen yang tertimbul oleh muatan = 1 di A dan oleh M'_a harus = 0. Bidang M'_a berupa segipanjang dengan ordinat tetap $= M'_a$.

Jadi $-\frac{1}{2}l^2 + M'_a l = 0$ atau $M'_a = +\frac{1}{2}l$.

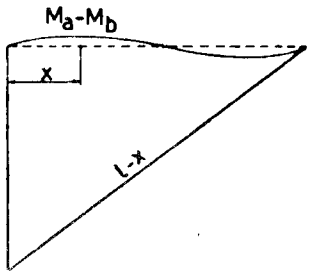
$M_x = M^o_x + M'_a = -x + \frac{1}{2}l$. Kemudian bidang M_x ini dianggap sebagai "muatan" untuk menggambar garis-lentur yang akan melukiskan garis-pengaruh A. Perlu diingatkan di sini, bahwa balok yang "dimuati" demikian ini adalah balok AB yang *dijepit sebelah di A* (dan menggantung di B).

$$E I \delta_{pa} = \frac{1}{12}l^3 - \tfrac{1}{4}lx^2 + \frac{1}{6}x^3 \; ; E I \delta_{aa} = (E I \delta_{pa})_{x=0} = \frac{1}{12}l^3$$

$$A = P\,(1 - 3x^2/l^2 + 2x^3/l^3)$$

2. Dengan rumus A yang terdapat di § 29, 1 setelah huruf a diganti dengan x dan b menjadi $(l - x)$;

$$A = \frac{P}{l^3}(l-x)^2(l+2x) = \frac{P}{l^3}.(l^3 - 3lx^2 + 2x^3)$$



Gambar IV, 58

3. $$A = A^o_a + \frac{1}{l}(M_a - M_b)$$

$$= \frac{(l-x)}{l}P + \frac{1}{l}(M_a - M_b)$$

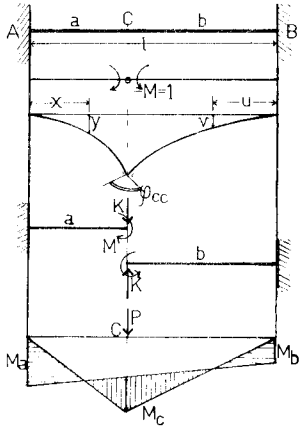
$$= \frac{1}{l}\{(l-x)P + (M_a - M_b)\}$$

Jadi ordinat garis-pengaruh $A = \frac{1}{l}$ ordinat antara garis $(l - x)$ dan garis $(M_b - M_a)$; gambar 58.

Sekarang garis-pengaruh M_c, yaitu momen di C sejauh a dari A atau b dari B (gb. IV, 59).

Kita mengadakan sendi di C (menghapuskan kemungkinan bekerjanya M_c) dan mengerjakan $M = -1$ di situ. Ini menimbulkan garis-lentur dengan ordinat y pada titik X sejauh $x \leqq a$ dari A dan ordinat v pada titik U sejauh $u \leqq b$ dari B. Putaran sudut antara ujung-ujung CA dan CB terhadap satu sama lain terhadap $\varphi_c = M\varphi_{cc} = \varphi_{cc}$

$= \varphi_{ca} + \varphi_{cb}$



Gambar IV, 59

Ordinat garis-lentur di mana beban $P = 1$ berdiri berarti besaran δ'_{pc} yaitu faktor-pengaruh terhadap peralihan titik-pegangan P berasal dari M_c.

$M_c = P\varphi'_{cp}/\varphi_{cc} = P\delta'_{pc}/\varphi_{cc}$ sedang φ_{cc} itu tetap. Berarti lagi, bahwa garis-lentur termaksud ini melukiskan garis-pengaruh M_c, yang ordinatnya menjadi $\eta = y/\varphi_{cc}$ atau v/φ_{cc}.

Hitungan selanjutnya :

Supaya ujung-ujung CA dan CB tidak terpisah dari satu sama lainnya, kita masih memerlukan gaya lintang K yang dapat dihitung demikian.

$y_c = v_c$ (kedua-dua cabang garis-lentur bertunggalan ordinat di C)

$a^2/2EI + Ka^3/3EI = b^2/2EI - Kb^3/3EI.$

$K = 3(b^2 - a^2)/2(a^3 + b^3) = 3(b - a)/2(a^2 - ab + b^2).$

$$M_x = -1 \cdot K(a - x) = -\left(1 + \frac{3(b-a)(a-x)}{2(a^2 - ab + b^2)}\right) = -EI\, d^2y/dx^2.$$

$$EIy = \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{3(b-a)}{2(a^2 - ab + b^2)}\left(\tfrac{1}{2}ax^2 - \tfrac{1}{6}x^3\right)$$

$$EIv = \tfrac{1}{2}u^2 - \frac{3(b-a)}{2(a^2 - ab + b^2)}\left(\tfrac{1}{2}bu^2 - \tfrac{1}{6}u^3\right)$$

$EI\varphi_{cc}$ = luas bidang-momen $= a + b + \tfrac{1}{2}K(a^2 - b^2)$

$$= a + b + \frac{3(b-a)(a^2+b^2)}{4(a^2 - ab + b^2)} = \frac{l^3}{4(a^2 - ab + b^2)}$$

$$EI_{y_c} = EI_{y_{x=a}} = a^2b^2/2(a^2 - ab + b^2).$$

Berarti, pada kedudukan P di C terdapat

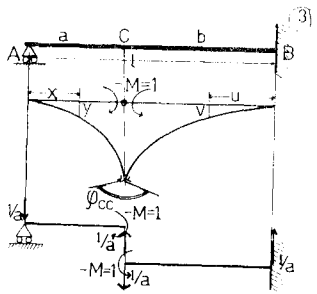
$M_c = P.\, y_c/\varphi_{cc} = P.\, 2a^2b^2/l^3$

Hasil ini kita cocokkan berdasarkan $M_a = -Pab^2/l^2$ dan $M_b = -Pa^2b/l^2$ serta $M_c^\circ = Pab/l.$

$$M_c = M_c^\circ + M_a.b/l + M_b.a/l = P\frac{(abl^2 - ab^3 - a^3b)}{l^3} = P.\,2a^2b^2/l^3.$$

§ 30a. Perletakan A dijadikan sendi (gb. IV, 60).

Seperti di atas, mengadakan sendi di C, dan seterusnya.



Gambar IV, 60

Cabang AC:

$M_x = -x/a = -EId^2y/dx^2.$

$EI_y = (\tfrac{1}{6}x^3 + Cx + C')/a$

$x = 0,\ y = 0,\ C' = 0.$

Cabang BC:

$M_u = 1 - (b - u)/a = -EI\, d^2v/du^2$

$EI\, dv/du = u + bu/a - u^2/2a$

$EI_v = u^2/2 + bu^2/2a - u^3/6a$

$y_c = v_c;\ a^2/6 + C = b^2/2 + b^3/3a$

$C = \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{3}\frac{b^3}{a} - \tfrac{1}{6}a^2$

$EI_y = x^3/6a + (b^2/2a + b^3/3a^2 - a/6)x = \frac{1}{a^2}\frac{1}{6}ax^3 + (\tfrac{1}{2}ab^2 + \tfrac{1}{3}b^3 - \tfrac{1}{6}a^3)x$

$EI\, dy/dx = \frac{1}{a}\frac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{3}\frac{b^3}{a} - \tfrac{1}{6}a^2$

$$EIQ_{cc} = EI(dy/dx)_c + EI(dv/du)_c = \tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{2}\frac{b^2}{a} + \tfrac{1}{3}\frac{b^3}{a^2} + b + \tfrac{1}{2}\frac{b^2}{a} =$$

$$= \frac{1}{3a^2}(a^2 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = l^3/3a^2.$$

Cabang AC: $\eta = y/Q_{cc} = \frac{3}{l^2}(\frac{1}{6}ax^2 + \frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{6}a^3)$

Cabang BC: $\eta = v/Q_{cc} = \frac{3a^2}{l^2}(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{6}u)\,u^2$

$$\eta_c = \frac{3}{l^3}ab^2(\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{3}b) = \frac{ab^2}{2l^3}(3a + 2b);\qquad M_c = P\,\frac{ab^2}{2l^3}(3a + 2b)$$

$$M_c^\circ = Pab/l;\qquad M_b = -P\,\frac{a(l^2 - a^2)}{2l^2} = -P\,\frac{ab(l+a)}{2l^2}$$

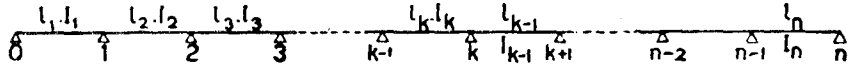
$$M_c = M_c^\circ + M_b\,a/l = P\,\frac{ab}{l^2}\left(1 - \frac{a(l+a)}{2l}\right) = P\,\frac{ab^2}{2l^3}(3a + 2b).$$

E. BALOK DI ATAS BANYAK PERLETAKAN

§ 31. Dengan EI tetap.

Balok mempunyai EI tetap di masing-masing lapangan.

Persamaan tiga momen di titik k kita tulis lagi (lihat § 4).



Gambar IV, 61

$$\tfrac{1}{6}M_{k-1}l_k/EI_k + \tfrac{1}{3}M_k(l_k/EI_k + l_{k+1}/EI_{k+1}) + \tfrac{1}{6}M_{k+1}l_{k+1}/EIk_{+1}$$
$$= \varphi_{kl}^\circ + \varphi_{kr}^\circ = \varphi_k^\circ$$

$EI_k\varphi_{kl}^\circ = S_{k(k-1)}^\circ$ = statis momennya bidang M° dilapangan l_k terhadap titik $(k-1)$

$EI_{k+1}\varphi_{kr}^\circ = S_{(k+1)\,(k-1)}^\circ$ statis momen bidang M° di lapangan l_{k+1} terhadap titik $(k+1)$

Jadi statis-momen terhadap titik k sendiri *tidak* terpakai. Jika perletakan no O itu bebas, maka $M_0 = 0$ dan persamaan di titik 1 adalah :

$$\tfrac{1}{3}M_1(l_1/EI_1 + l_2/EI_2) + \tfrac{1}{6}M_2 l_2/EI_2 = \varphi^o_{1l} + \varphi^o_{1r} = \varphi^o_1$$

Jika lapangan-lapangan 1 dan 2 tidak dimuati, terdapat $\varphi^o_1 = 0$

$$\tfrac{1}{3}M_1(l_1/EI_1 + l_2/EI_2) + \tfrac{1}{6}M_2 l_2/EI_2 = 0$$

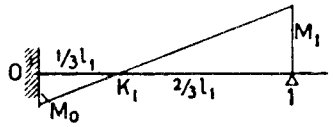
$2\,M_1 : M_2 = -\,l_2/EI_2 : (l_1/EI_1 + l_2/EI_2)$; dapat ditulis:

$$M_1 = \alpha_1 M_2 \text{ di mana } \alpha_1 = \frac{-\,l_2/EI_2}{2(l_1/EI_1 + l_2/EI_2)} = \text{tetap.}$$

Jika perletakan pertama (no 0) itu jepitan-penuh, sedang lapangan no 1 *tidak* dimuati, kita mendapat persamaan pada titik 0 ini:

$$\tfrac{1}{3}M_o l_1/EI_1 + \tfrac{1}{6}M_1 l_1/EI_1 = 0;\ M_o = -\,\tfrac{1}{2}M_1$$

$\varphi_{11l} = \tfrac{1}{3}l_1/EI_1 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{6}l_1/EI_1 = \tfrac{1}{4}l_1/EI_1$ (bandingkan φ_{aa} di dalam § 30, 2).



Gambar IV, 61a

Sedang, jika perletakan 0 itu bebas,

$$\varphi_{11l} = \tfrac{1}{3}l_1/EI_1$$

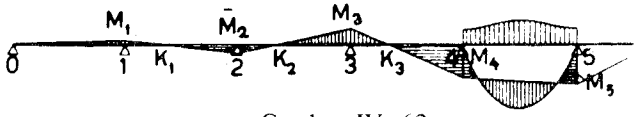
Jadi jika lapangan ke satu tidak dimuati, kita dapat memulai dengan persamaan pada titik 1:

$$\tfrac{1}{4}M_1 l_1/EI + \tfrac{1}{3}M_1 l_2/EI_2 + \tfrac{1}{6}M_2 l_2/EI_2 = \varphi^o_{1r}$$

Pada akhirnya terdapat $M_o = \div\,\tfrac{1}{2}M_1$. Di titik K_1 sejauh $\tfrac{1}{3}l_1$ dari titik 0, momen = 0, dan di situ garis-elastis menunjukkan titik-belok.

§ 32. Beberapa lapangan berturut-turut bebas beban.

Kita mempelajari kejadian, bahwa mulai dari perletakan pertama, beberapa



Gambar IV, 62

lapangan tak dimuati. Persamaan-persamaan tiga momen :

$$\tfrac{1}{3}M_1(l_1/EI_1 + l_2/EI_2) + \tfrac{1}{6}M_2 l_2/EI_2 = 0$$

$$M_1 = \div\frac{l_2/EI_2}{2(l_1/EI_1 + l_2/EI_2)}M_2 = \alpha_1 M_2$$

$$\tfrac{1}{6}M_1 l_1/EI_1 + \tfrac{1}{3}M_2(l_2/EI_2 + l_3/EI_3) + \tfrac{1}{6}M_3 l_3/EI_3 = 0$$

$$M_2 = \alpha_2 M_3; a_2 = -\frac{l_3/EI_3}{\alpha_1 l_2/EI_2 + 2(l_2/EI_2 + l_3/EI_3)}$$

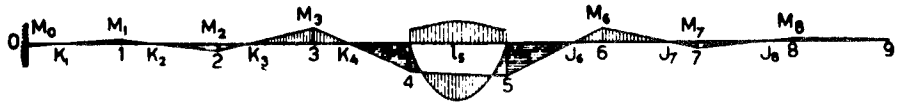
$$\tfrac{1}{6}\alpha_2 M_3 l_3/EI_3 + \tfrac{1}{3}M_3(l_3/EI_3 + l_4/EI_4) + \tfrac{1}{6}M_4 l_4/EI_4 = 0$$

$$M_3 = \alpha_3 M_4; \alpha_3 = \div\frac{l_4/EI_4}{(\alpha_2 + 2)l_3/EI_3 + 2(l_4/EI_4)}$$

Besaran-besaran $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ itu tetap nilainya,dan karena itu letak titik-titik $K_1, K_2, K_3 \ldots$ itu tetap atau tertentu juga. Dan oleh karena $[\alpha] < \frac{1}{2}$, maka titik-titik K ini letaknya mendekati perletakan-perletakan yang kiri.

Menurut contoh di gambar itu, lapangan pertama yang dimuati adalah lapangan ke–5. Nilai M_4 positif (sebagai momen peralihan), dan oleh karena garis-momen di lapangan 4 memotong garis-penutup di titik K_3 yang terletak di lapangan ini juga, maka nilai M_3 berlawanan tandanya dengan tanda nilai M_4, jadi negatif. Mengikuti perjalanan garis-garis-momen pada lapangan-lapangan 3, 2 dan 1, kita mendapat bahwa M_1 bernilai negatif (sebagai momen-peralihan). Apabila lapangan pertama yang dimuati itu lapangan 4 atau 6, maka tanda M_1 menjadi positif. Jadi kesimpulan: M_1 bertanda negatif, apabila lapangan-pertama yang dimuati ini lapangan nomer ganjil dan positif jika nomer genap.

Perlu diingatkan lagi, bahwa momen-peralihan bernilai *positif* ini berkehendak melengkungkan balik ke atas atau *bekerja negatif* sebagai momen.



Gambar IV, 63

Di dalam contoh di atas tadi, perletakan pertama adalah perletakan bebas.

Apabila perletakan 0 itu jepitan, di sini ada momen $M_o = -\,\tfrac{1}{2}M_1$ =

$= \alpha_o M_1$ dengan $\alpha_o = -\frac{1}{2}$ dan letak K_1 ada $\frac{1}{3} l_1$, dari titik 0. Lihat gambar bagian kiri titik 4.

Selanjutnya, gambar IV, 63 bagian kanan perletakan 5 memperlihatkan perjalanan momen di lapangan sebelah kanan dari titik 5 ini. Titik perletakan akhir (9) itu bebas.

$$\tfrac{1}{3}M_8(l_9/EI_9 + l_8/EI_8) + \tfrac{1}{6}M_7 l_8/EI_8 = 0;\ M_8 = -\frac{l_8/EI_8}{2(l_9/EI_9 + l_8/EI_8)} M_7 = \beta_8 M_7$$

$$\tfrac{1}{6}\beta_8 M_7 l_8/EI_8 + \tfrac{1}{3}M_7(l_8/EI_8 + l_7/EI_7) + \tfrac{1}{6}M_6 l_7/EI_7 = 0$$

$$M_7 = \beta_7 M_6, \text{ dst.}$$

Garis-garis momen melalui titik-titik J yang letaknya mendekati titik perletakan kanan, oleh karena $[\beta] < \frac{1}{2}$. Jika perletakan 9 itu jepitan, maka $M_9 = -\frac{1}{2}M_8$ dan garis-momenterakhir melalui titik J_9 sejauh $\frac{1}{3} l_9$ dari titik 9.

Jadi garis-garis-momen di lapangan-lapangan kosong di sebelah kiri lapangan yang dimuati melalui titik-titik K yang tetap letaknya, dan garis-garis momen pada lapangan-lapangan kosong di sebelah kanan lapangan yang dimuati melalui titik-titik J yang letaknya tetap juga.

Tiap lapangan mempunyai dua titik-tetap K dan J. Garis momen pada suatu lapangan yang kosong melalui titik K apabila lapangan di sebelah kanan dimuati, dan melalui titik J apabila ada muatan pada lapangan di sebelah kirinya.

Kejadian khusus: $l_1 = l_2 = l_k = l$; $I_1 = I_2 = I_k = I$.

Perletakan pertama bebas: $M_0 : M_1 : M_2 : M_3 : M_4 \ldots = 0 : -1 : 4 : -15 : 56$.

Idem jepitan-penuh: $M_0 : M_1 : M_2 : M_3 : M_4 \ldots = 1 : -2 : 7 : -26 : 97$.

F. PERLETAKAN KENYAL

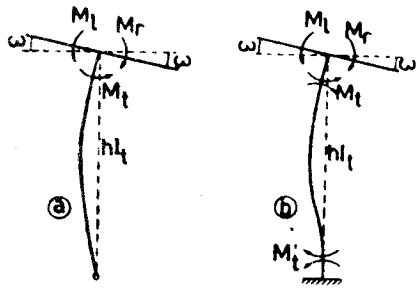
§ 33. Arti.

Yang dimaksud ialah perletakan yang memungkinkan ujung balok berputar. Ini umpamanya terdapat pada balok yang bersatu dengan tihang, di mana kepala-tihang dapat berputar dan juga pada jepitan yang tak sempurna.

Di sini kita akan mempelajari akibat putaran kepala-tihang.

a. Kaki-tihang diletakkan dengan sendi (gambar IV, 64).

Garis singgung kepada sumbu-balok di tempat kepala-tihang tidak lagi mendatar, melainkan membentuk sudut dengan garis-mendatar. Ini disebabkan oleh karena $M_l \neq M_r$.



Gambar IV, 64

Untuk mengikuti putaran sudut ω ini, di kepala tihang bekerja momen : $M_t = M_r - M_l$. $\omega = M_t \varphi_{tt} = M_t \cdot \frac{1}{3} h/EI_t$

b. Kaki-tihang terjepit (gambar IV, 61). Di kaki-tihang ada momen M_t' yang dapat dihitung dengan persamaan tiga momen pada kaki-tihang ini, demikian:

$$\tfrac{1}{3}M_t' h/EI_t + \tfrac{1}{6}M_t h/EI_t = 0;\ M_t' = -\tfrac{1}{2}M_t$$

Putaran sudut di kepala:

$$\omega = \tfrac{1}{3}M_t h/EI_t + \tfrac{1}{6}M_t' h/EI_t = \tfrac{1}{4}M_t h/EI_t = M_t \varphi_{tt}$$

Jadi sekarang $\varphi_{tt} = \frac{1}{4}h/EI_t$. Bandingkanlah dengan lapangan pertama kosong pada balok terusan jika perletakan-pertama itu jepitan.

Pada jepitan tak sempurna atau jepitan sebagian, ujung balok dapat berputar sebanyak $\omega = M\varphi_{oo}$ (gambar IV, 64).

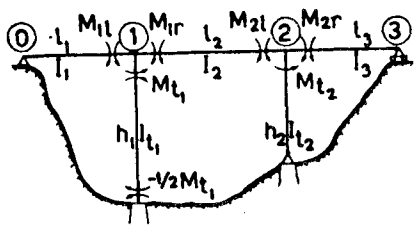
§ 34. Kepala-tihang tak beralih (mendatar) (gamb. IV, 65).

Persamaan-persamaan putaran sudut:

$$\omega_{1l} = \varphi_{1l}^o - \tfrac{1}{3}M_{1l} l_1/EI_1 = -\tfrac{1}{4}M_{t1} h_1/EI_{t1} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\omega_{1r} = \varphi_{1r}^o - \tfrac{1}{3}M_{1r} l_2/EI_2 - \tfrac{1}{6}M_{2l} l_2/EI_2 = \tfrac{1}{4}M_{t1} h_1/EI_{t1} \ldots\ldots (2)$$

$$\omega_{2l} = \varphi_{2l}^o - \tfrac{1}{6}M_{1r} l_2/EI_2 - \tfrac{1}{3}M_{2l} l_2/EI_2 = -\tfrac{1}{3}M_{t2} h_2/EI_{t2} \ldots\ldots (3)$$



Gambar IV, 65

$$\omega_{2r} = \varphi^o_{2r} - \tfrac{1}{3}M_{2r}l_3/EI_3 =$$
$$= \tfrac{1}{3}M_{t2}h_2/EI_{t2} \ldots\ldots (4)$$
$$M_{t1} = M_{1r} - M_{1l} \ldots. (5)$$
$$M_{t2} = M_{2r} - M_{2l} \ldots. (6)$$

Jadi terdapat 6 buahpersamaan dengan 6 anu.

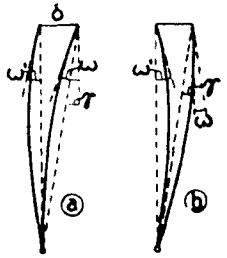
§ 35. Kepala-tihang dapat beralih.

1. Skarnir pada kaki-tihang. Peralihan terjadi ke arah sebelah konkaf tihang, sejauh δ. (gambar IV, 66*a*).

$$\omega = \omega' + \gamma = \tfrac{1}{3}M_t h/EI_t + \delta/h$$

Peralihan δ ke arah sebelah konvex tihang (gambar IV, 63*ab*).

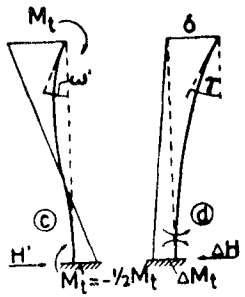
$$\omega = \omega' - \gamma = \tfrac{1}{3}M_t h/EI_t - \delta/h$$



Gambar IV, 66 a

2. Kaki-tihang terjepit. Jika tak ada geseran, di kepala tihang terjadi momen M_t dan di kakinya ada momen $M'_t = -\frac{1}{2}M_t$ pada kaki-tihang bekerja reaksi mendatar :

$$H' = (M_t - M'_t)/h = 1\tfrac{1}{2}M_t/h$$
$$\omega' = \tfrac{1}{4}M_t h/EI_t$$



Gambar IV, 66 b

Sekarang ujung-tihang bergeser sejauh δ. Ini menimbulkan momen sebesar $\Delta M'_t$ pada kaki-tihang, sehingga $\frac{1}{EI_t}$ statis momennya bidang-momen ini terhadap kepala-tihang sama dengan δ

$$\tfrac{1}{3}\Delta M'_t h^2/EI_t = \delta;\ \Delta M'_t = 3EI_t\delta/h^2$$

γ = putaran kepala tihang = $\frac{1}{EI_t}$ luas bidang momen tadi.

$$\gamma = \frac{1}{EI_t}\tfrac{1}{2}\Delta M'_t.h = \tfrac{3}{2}\delta/h$$
$$\Delta H = -\Delta M'_t/h = -3EI_t\delta/h^3$$

Jika geseran kepala tihang terjadi ke arah sebelah konkaf tihang, maka $\omega = \omega' + \gamma = \frac{1}{4}M_t h/EI_t + \frac{3}{2}\delta/h$ dan sebaliknya, jika geseran terjadi ke arah sebelah konvex tihang.

$$\omega = \omega' - \gamma = \tfrac{1}{4}M_t h/EI_t - \tfrac{3}{2}\delta/h$$

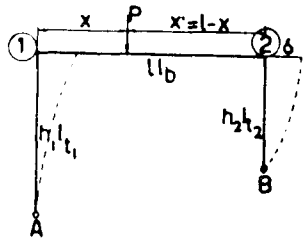
Selanjutnya nilai $\Delta M'_t$ ditambahkan kepada M'_t dengan mengingat tentang tandanya (+ atau ÷)

Kemudian: $H = H' + \Delta H = \frac{3}{2}M_t/h - 3EI_t\delta/h^3$, jika geseran berarah ke sebelah konkaf.

§ 36. Beberapa contoh.

a. Balok di atas dua tihang atau portal.

1. *Kaki-kaki tihang diletakkan dengan sendi* (gambar IV, 67). Muatan terpusat *P* sejauh *x* dari tihang kiri. Kita anggap geseran δ terjadi ke kanan. Terhadap tihang kiri, peralihan ini ke sebelah konkaf, dan terhadap tihang kanan ke sebelah konvex.



Gambar IV, 67

$$\frac{P.xx'(l + x')}{6EI_b l} - \tfrac{1}{3}M_1 l/EI_b - \tfrac{1}{6}M_2 l/EI_b = \tfrac{1}{3}M_{t1}h_1/EI_{t1} + \delta/h_1 \ldots\ldots (1)$$
$$\frac{P.xx'(l + x)}{6EI_b l} - \tfrac{1}{6}M_1 l/EI_b - \tfrac{1}{3}M_2 l/EI_b = \tfrac{1}{3}M_{t2}h_2/EI_{t2} - \delta/h_2 \ldots\ldots (2)$$
$$M_{t1} = M_1 \ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$M_{t2} = M_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$M_1 : M_2 = h_1 : h_2$ — (5) sebab $M_1/h_1 = M_2/h_2 = H$

Kejadian khusus: $h_1 = h_2 = h$; $I_{t1} = I_{t2} = I_t$; $(I_b/I_t)(h/l) = k$.

Persamaan-persamaan (1) dan (2) dilipatkan dengan $6EI_b/l$

$$\frac{P}{l^2}.xx'(l + x') - 2M_1 - M_2 = 2kM_1 + 6EI_b\delta/hl \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{P}{l^2}.xx'(l+x) - M_1 - 2M_2 = 2kM_1 - 6EI_b\delta/hl \quad \ldots\ldots (2)$$

Oleh karena $h_1 = h_2$ maka $M_1 = M_2 = M$.

$$\frac{P}{l^2}.xx'(l+x') - (2k+3)M = 6EI_b\delta/hl \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{P}{l}.xx'(l+x) - (2k+3)M = -6EI_b\delta/hl \quad \ldots\ldots (2)$$

Kedua-dua persamaan ini dijumlahkan, menjadi

$$3\frac{P}{l}xx' - 2(2k+3)M = 0$$

$$M = \frac{3P.x(l-x)/l}{2(2k+3)} = \frac{3}{2(2k+3)l}P.(lx - x^2) \text{ atau } \frac{3}{2(2k+3)l}.P.xx'$$

$$M^o_{max} = \frac{Px(l-x)}{l}, \text{ jadi } M = \frac{3M^o_{max}}{2(2k+3)} = \frac{M^o_{max}}{(4/3k+2)}$$

Sekarang menghitung δ, dengan menggunakan hasil M tadi dipersamaan (1).

$$\frac{P}{l^2}.xx'(l+x') - \tfrac{2}{3}\frac{P}{l}.xx' = 6EI_b\delta/hl$$

$$6EI_b\delta/hl = \frac{P}{l^2}.xx'(l+x'-\tfrac{2}{3}l) = \frac{P}{2l^2}.xx'(x'-x)$$

$$\delta = \frac{Ph}{12EI_bl}.xx'(x'-x)$$

Anggapan ke kanan tadi betul, jika pendapat di atas ini positif, atau $x' > x$.

Muatan penuh terbagi rata, q. Oleh karena simetris $\delta = 0$.

$$\tfrac{1}{3}Mh/EI_t + \tfrac{1}{3}Ml/EI_b + \tfrac{1}{8}Ml/EI_b = \tfrac{1}{24}ql^3/EI_b$$

$$(\tfrac{1}{3}k + \tfrac{1}{2})M = \tfrac{1}{24}ql^2$$

$$M = \frac{ql^2}{4(2k+3)} \text{ atau dengan } M^o_{max} = \tfrac{1}{8}ql^2,\ M = \frac{M^o_{max}}{(k+1{,}5)}$$

Juga dapat secara mengintegrasi pendapat di atas pada muatan terpusat, dengan $dP = q\,dx$.

$$M = \frac{3}{2(2k+3)}q\int_o^l (lx - x^2)dx = \frac{ql^2}{4(2k+3)}$$

Untuk mengontrol, apakah betul $\delta = 0$, maka $\int_o^l xx'(x'-x)dx$ harus $= 0$

$$xx'(x'-x) = x(l-x)(l-2x) = l^2x - 3lx^2 + 2x^3$$

$$\int_o^l xx'(x'-x)dx = \int(l^2x - 3lx^2 + 2x^3)dx = (\tfrac{1}{2} - 1 + \tfrac{1}{2})l^4 = 0$$

2. *Kaki-kaki tihang terjepit.* Besaran-besaran $= \frac{1}{3}M_th/EI_t$ di atas diganti dengan $\frac{1}{4}M_th/EI_t$.

Kita menghitung kejadian khusus dengan $h_1 = h_2 = h$; $I_{t1} = I_{t2} = I_t$; juga $M_1 = M_{t1}$; $M_2 = M_{t2}$.

$$\frac{Pxx'(l+x')}{6EI_bl} - (\tfrac{1}{8}M_1l/EI_b + \tfrac{1}{8}M_2l/EI_b) = \tfrac{1}{4}M_1h/EI_t + \tfrac{3}{2}\delta/h \ldots (1)$$

$$\frac{Pxx'(l+x)}{6EI_bl} - (\tfrac{1}{8}M_1l/EI_b + \tfrac{1}{8}M_2l/EI_b) = \tfrac{1}{4}M_2h/EI_t - \tfrac{3}{2}\delta/h \ldots (2)$$

$$\tfrac{3}{2}M_1/h - 3EI_t\delta/h^3 = \tfrac{3}{2}M_2/h + 3EI_t\delta/h^3 \quad \ldots\ldots (3)$$

$$(3k+4)M_1 + 2M_2 = 2Pxx'(l+x')/l^2 - 18EI_b\delta/hl \quad \ldots\ldots (1)$$

$$2M_1 + (3k+4)M_2 = 2Pxx'(l+x)/l^2 + 18EI_b\delta/hl \quad \ldots\ldots (2)$$

$$3(k+2)(M_1 + M_2) = 6Pxx'/l \ldots\ldots (1)+(2)$$

$$M_1 + M_2 = 2Pxx'/(k+2)l$$

$$M_2 = P2xx'/(k+2)l - M_1$$

$$6EI_t\delta/h^3 = \tfrac{3}{2}(M_1 - M_2)/h \ldots\ldots (3)$$

$$\delta/h = \tfrac{1}{4}(M_1 - M_2)h/EI_t = \frac{h}{4EI_t}\left\{M_1 - \left(\frac{2Pxx'}{(k+2)l} - M_1\right)\right\} =$$

$$= \frac{h}{2EI_t}\left\{M_1 - \frac{Pxx'}{(k+2)l}\right\}$$

$$(3k+4)M_1 + 2\left(\frac{2Pxx'}{(k+2)l} - M_1\right) = 2Pxx'(l+x')/l^2 - 9k\left(M_1 - \frac{Pxx'}{(k+2)l}\right) \ldots (1)$$

$$(12k+2)M_1 = \frac{Pxx'}{l}\left\{\frac{9k-4}{k+2} + \frac{2(l+x')}{l}\right\} =$$

$$= \frac{Pxx'}{(k+2)l^2}\{9kl - 4l + 2(k+2)(l+x')\}$$

$$2(6k+1)M_1 = \frac{Pxx'}{(k+2)l^2}\{2(6k+1)l + (k+2)(x'-x)\}$$

$$M_1 = \left\{\frac{1}{k+2} + \frac{x'-x}{2(6k+1)l}\right\}\frac{P\,xx'}{l} \text{ (bekerja } \textit{negatif)}$$

$$M_2 = 2\frac{Pxx'}{(k+2)l} - M_1 = \left\{\frac{1}{k+2} - \frac{x'-x}{2(6k+1)l}\right\}\frac{Pxx'}{l} \text{ } (\textit{idem})$$

$$\Delta H_a = -3EI_t\delta/h^3 = -\frac{3}{4h}(M_1 - M_2) = -\frac{3}{4}\frac{(x-x')xx'}{(6k+1)l^3h}P$$

$$\Delta M_a = -\Delta H_a \,.h = \frac{3(x-x')}{4(6k+1)l}P\frac{xx'}{l}$$

$$M_a = -\tfrac{1}{2}M_1 + \Delta M_a = -\left(\frac{1}{2(k+2)} - \frac{x'-x}{2(6k+1)l}\right)P\frac{xx'}{l}$$

(bekerja *positif*)

$$M_b = -\tfrac{1}{2}M_2 + \Delta M_b = -\left(\frac{1}{2(k+2)} + \frac{x'-x}{2(6k+1)l}\right)P\frac{xx'}{l} \text{ } (\textit{idem})$$

$$\delta = \frac{(x'-x)xx'h^2}{4(6k+1)l^2EI_t}P, \text{ ke kanan jika } x' > x.$$

Lihat juga bab VI*E*, § 57.

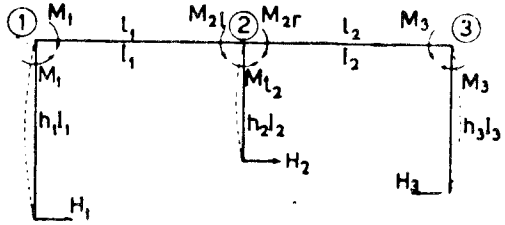
Muatan penuh terbagi rata, q. Keadaan simetris, jadi $\delta = 0$.

$$M_1 = M_2 = M$$

$$M(\tfrac{1}{2}h/EI_t + \tfrac{1}{2}l/EI_b) = \tfrac{1}{24}ql^3/EI_b$$

$$(6k+12)M = ql^2 : M = \frac{ql^2}{6(k+2)}$$

b. Balok di atas tiga batang tihang. Pada kepala tihang luar selalu terdapat $M_{balok} = M_{tihang}$, dan pada kepala tihang antara, $M_t = M_l - M_r$ atau $M_t = M_r - M_l$



Di dalam contoh ini, dianggap bahwa $M_{2r} > M_{2l}$, jadi $M_{t2} = M_{2r} - M_{2l}$ dan tihang tengah melengkung ke kiri (bagian konkaf di sebelah kanan). Begitu juga adanya tentang tihang kesatu, sedang tihang ketiga melengkung ke kanan.

Selanjutnya, peralihan kepala-kepala- tihang dianggap ke kanan.

$$\omega_1 = \varphi^o_{1r} - \tfrac{1}{3}M_1l_1/EI_1 - \tfrac{1}{6}M_{2l}l_1/EI_1 = M_1\varphi_{11} + \gamma_1 \ldots\ldots (1)$$

$$\omega_{2l} = \varphi^o_{2l} - \tfrac{1}{6}M_1l_1/EI_1 - \tfrac{1}{3}M_{2l}l_1/EI_1 = -(M_{t2}\varphi_{22} + \gamma_2) \ldots (2)$$

$$\omega_{2r} = \varphi^o_{2r} - \tfrac{1}{3}M_{2r}l_2/EI_2 - \tfrac{1}{6}M_3l_2/EI_2 = M_{t2}\varphi_{22} + \gamma_2 \ldots\ldots (3)$$

$$\omega_3 = \varphi^o_{3r} - \tfrac{1}{6}M_{2r}l_2/EI_2 - \tfrac{1}{3}M_3l_2/EI_2 = M_3\varphi_{33} - \gamma_3 \ldots\ldots (4)$$

$$M_{t2} = M_{2r} - M_{2l} \ldots\ldots (5)$$

$$\Sigma H = 0 \ldots\ldots (6)$$

Pada kaki tihang bersendi harus diisi : $\varphi_{..} = \tfrac{1}{3}M_th/EI_t$ dan $\gamma = \delta/h$

Pada kaki tihang terjepit harus diisi : $\varphi_{..} = \tfrac{1}{4}M_th/EI_t$ dan $\gamma = \tfrac{3}{2}\delta/h$

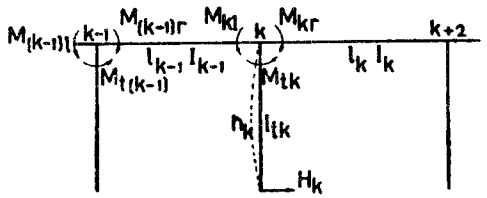
Pada tihang-sendi, persamaan (6) menjadi :

$$M_1/h_1 + M_{t2}/h_2 - M_3/h_3 = 0$$

Pada tihang-terjepit:

$$(\tfrac{3}{2}M_1/h_1 - 3EI_{t1}\delta/h_1^3) + (\tfrac{3}{2}M_{t2}/h_2 - 3EI_{t2}\delta/h_2^3) - (\tfrac{3}{2}M_3/h_3 + 3EI_{t3}\delta/h_3^3) = 0$$

c. Balok di atas beberapa tihang (tihang no 1 s/d no n). Banyaknya lapangan ada $(n-1)$ dan banyaknya tihang ada n. Kita mempelajari sesuatu tihang-antara, yaitu tihang k; δ dianggap ke arah konkaf.



Gambar IV, 69

$$\omega_{kl} = \varphi^{\circ}_{kl} - \tfrac{1}{6}M_{(k-1)r}l_{k-1}/EI_{(k-1)} - \tfrac{1}{3}M_{kl}l_{k-1}/EI_{k-1} = -(M_{tk}\varphi_{kk} + \gamma_k)$$

$$\omega_{kr} = \varphi^{\circ}_{kr} - \tfrac{1}{3}M_{kr}l_k/EI_k - \tfrac{1}{6}M_{(k+1)}l_k/EI_k = M_{tk}\varphi_{kk} + \gamma_k$$

$$M_{tk} = M_{kr} - M_{kl}$$

Untuk kaki-sendi: $H_k = M_{tk}/h_k$ dan untuk jepitan:

$$H_k = \tfrac{3}{2}M_{tk}/h_k \mp 3EI_{tk}\delta/h_k^3$$

Untuk kaki-sendi: $\varphi_{kk} = \tfrac{1}{3}h_k/EI_{tk}$ dan untuk jepitan:

$$\varphi_{kk} = \tfrac{1}{4}h_k/EI_{tk}$$

Untuk kaki-sendi: $\gamma = \delta/h_k$ dan untuk jepitan:

$$\gamma = \tfrac{3}{2}\delta/h_k$$

Banyaknya tihang-akhir ada 2 batang, dan tihang-antara ada $(n-2)$. Banyaknya momen tak terketahui $2 + 2(n-2) = 2n-2$ dan oleh karena besaran δ juga tak terketahui, jumlah banyaknya anu ada $2n-2+1 = 2n-1$.

Saban tihang-akhir menghasilkan satu persamaan, dan tiap tihang-antara dua persamaan. Jadi-persamaan-persamaan momen ada $2+2(n-2) = 2n-2$. Ini ditambah dengan persamaan $\Sigma H = 0$, menjadi ada $(2n-1)$ persamaan.

Apabila konstruksi diadakan sedemikian, hingga $\delta = 0$, maka persamaan $\Sigma H = 0$ tak diperlukan (lihat gambar IV, 62).

§ 36a. **Cara lain.** Momen dianggap positif apabila menimbulkan **tarik** pada **tepi-dalam** balok atau tihang.

Kita ambil tihang k di dalam § di atas, yang untuk lengkapnya kita bebani ke **kanan** sedang kakinya **terjepit.**

I). Kwadran antara balok l_{k-1} dan tihang k.

Tepi-kanan tihang berarti tepi-luar. Supaya mencapai balok-terusan, tihang kita putar ke luar sehingga impit dengan perpanjangannya balok l_{k-1}. Dengan demikian beban-tihang yang bekerja ke kanan itu, bekerja **ke atas** sehingga menimbulkan putaran-putaran sudut φ°_{ka} (ujung-atas tihang) dan φ°_{kb} (ujung bawah) yang **negatif.**

Kepala tihang dianggap tergoyang **ke kanan** sejauh δ, ini berarti seolah-olah titik k naik sejauh δ terhadap ujung-bawahnya tihang, setelah tihang diputar ke luar seperti termaksud di atas.

Selanjutnya kita anggap $M_{kl} > M_{kr}$, jadi $M_{tk} = M_{kl} - M_{kr}$ (sebab di sini balok l_{k-1} yang pegang peranan; M_{bk} = momen *ujung-bawah* tihang k.

Persamaan-persamaan putaran sudut menjadi:

$$M_{bk}h_k/3EI_{tk} + M_{tk}h_k/6EI_{tk} = -\varphi^{\circ}_{kb} - \delta/h_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$M_{bk} = -\tfrac{1}{2}M_{tk} - 3EI_{tk}\delta/h_{tk}^2 - 3EI_{tk}\varphi_{kb}/h_k.$$

$$M_{bk}h_k/6EI_{tk} + M_{tk}h_k/3EI_{tk} + M_{kl}l_{k-1}/3EI_{k-1} + M_{(k-1)r}l_{k-1}/6EI_{k-1}$$

$$= \varphi_{kl} - \varphi_{ka} + \delta/h_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Setelah mensubstitusikan besaran M_{bk} seperti di atas, menjadi :

$$M_{(k-1)r}\,l_{k-1}/6EI_{k-1} + M_{kl}\,l_{k-1}/3EI_{k-1} + M_{tk}\,h_k/4EI_{tk}$$

$$= \varphi^{\circ}_{kl} - (\varphi^{\circ}_{ka} - \tfrac{1}{2}\varphi^{\circ}_{kb}) + \tfrac{3}{2}\,\delta/h_k.$$

Ditulis menurut § di atas :

$$\omega_{kl} = \varphi^{\circ}_{kl} - M_{(k-1)r}\,l_{k-1}/6EI_{k-1} - M_{kr}\,l_{k-1}/3EI_{k-1} =$$

$$= M_{tk}h_k/4EI_{tk} - \tfrac{3}{2}\delta/h_k + (\varphi^{\circ}_{ka} - \tfrac{1}{2}\varphi^{\circ}_{kb}).$$

Di sini $M_{tk} = M_{kl} - M_{kr}$ sedang menurut cara di atas dianggap $M_{tk} = M_{kr} - M_{kl}$ (lihat gambar), jadi $-M_{tk} = M_{kl} - M_{kr}$.

Pada anggapan $M_{kl} > M_{kr}$, tihang melentur ke kanan (berlawanan dengan yang tergambar).

Tambahan besaran $(\varphi^{\circ}_{ka} - \tfrac{1}{2}\varphi^{\circ}_{kb})$ juga cocok, sebab beban tihang yang dianggap ke kanan atau ke luar itu, menambah ω_{kl}.

II). Kwadrat di antara tihang k dan balok l_k; tepi kiri tihang berarti tepi luar. Supaya tihang membentuk garis lurus dengan baloknya, kita putar keluar sehingga jatuh di sebelah kirinya balok. Oleh karena δ tetap ke kanan, seolah-olah ujung k *turun* sejauh δ, sedang beban bekerja *ke bawah* sehingga φ°_{ka} dan φ°_{kb} sekarang menjadi *positif.*
Sekarang sebagai konsekwensinya kita tentukan, $M_{kr} > M_{kl}$ atau $M_{tk} = M_{kr} - M_{kl}$ (cocok dengan anggapan di dalam gambar).
Secara analog kita mendapat :
$M_{bk} = -\frac{1}{2} M_{tk} + 3EI_{tk}\,\delta/h_k^2 + 3EI_{tk}\,\varphi^\circ_{kb}/h_k$.

$M_{(k+1)l}\, l_k/6EI_k + M_{kr} l_k/3EI_k + M_{tk} h_k/4EI_{tk} = \varphi^\circ_{kr} - \frac{3}{2}\delta/h_{hk} + (\varphi^\circ_{ka} - \frac{1}{2}\varphi^\circ_{kb})$.

Tertulis menurut cara di atas :

$\omega_{kr} = \varphi^\circ_{kr} - M_{(k+1)l}\, l_k / 6EI_k = M_{tk} h_k/4EI_{tk} + \frac{3}{2}/h_k - (\varphi^\circ_{ka} - \frac{1}{2}\varphi^\circ_{kb})$.

Beban ke kanan (ke dalam) pada tihang berhasrat mengurangi melengkungnya tihang ke kiri atau ke luar (suku $\varphi^\circ_{ka} - \frac{1}{2}\varphi^\circ_{kb}$).
Di dalam penggarapan hitungan lebih lanjut untuk memudahkan pekerjaan kita melipatkan besaran-besaran dengan EI_{k-1}/l_{k-1} untuk ω_{kl} dan dengan EI_k/l_k untuk ω_{kr} dan nanti mendapatkan bilangan-bilangan *tak berdimensi* (konstanta) :
$\alpha_{kl} = (h_k/l_{k-1})(I_{k-1}/I_{tk})$ dan $\alpha_{kr} = (h_k/l_k)(I_k/I_{tk})$.
Gaya H_k pada kaki-tihang bekerja *ke arah konkafnya* tihang atau berlawanan dengan arah-putarannya M_{tk} terhadap titik kumpul k.

Jika ada beban langsung pada tihang, maka kita memperhitungkan juga H°_k, yaitu reaksi-perletakan mendatar pada kaki-tihang sebagai akibatnya, di dalam susunan statis-tertentu ($M_{bk} = M_{tk} = 0$) yang arahnya berlawanan dengan arah resultanta-mendatarnya beban itu. Terdapat :

$H_k = H^\circ_k + \frac{3}{2} M_{tk}/h_k \pm 3EI_{tk}\,\delta/h^3_{tk}$.

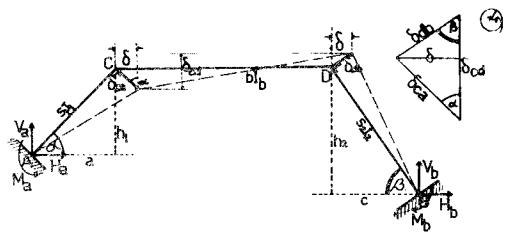
Jika $\Sigma P_h =$ resultanta seluruh beban-luar (pada balok-balok + tihang-tihang), maka sebagai persamaan-hasil kita mendapat :

$\Sigma H_k + \Sigma P_h = 0$.

Gaya mendatar *ke kanan* diberi tanda-aljabar *positif*, yang ke kiri *negatif.*
Menurut anggapan $M_{kr} > M_{kl}$, secara otomatis $M_{tk} = M_{kr} - M_{kl} > 0$ dan tihang melengkung secara *konkaf* pada tepi *kanannya.*

Tinggal tanda ± di muka $3EI_{tk}\,\delta/h^3_k$, ini tergantung kepada anggapan tentang *arahnya* δ saja : jika δ itu ke arah bagian konkafnya tihang, kita pilih tanda – dan + jika sebaliknya (δ ke arah konvexnya tihang).

§ 37. Portal dengan tihang-tihang serong (gb. IV, 70).
Balok dan tihang-tihang dibebani, masing-masing ke arah dalam (positif). V_1 dan V_2 berarti resultanta-vertikalnya beban tihang masing-masing dan H_1 dan H_2 resultanta-mendatarnya.
V°_c dan V°_d adalah reaksi-reaksi perletakan pada balok CD di dalam susunan statis-tertentu ($M_c = M_d = 0$).



Gambar IV, 70.

Momen-momen ujung M_a, M_b, M_c dan M_d sebagai gaya-kelebihan dianggap bekerja secara *negatif.*

$V_c = V^\circ_c + (M_c - M_d)/b$; $V_d = V^\circ_d + (M_d - M_c)/b = V^\circ_d - (M_c - M_d)/b$.

$V_a = V_c + V_1$; $V_b = V_d + V_2$.

Kepala-kepala tihang dianggap bergoyang ke kanan sejauh δ, diukur mendatar.
Pada diagram – WILLIOT goyangan, terbaca :
$\delta_{ca} = \delta/\sin\alpha$; $\delta_{cd} = \delta(\cot g\,\alpha + \cot g\,\beta)$; $\delta_{db} = \delta/\sin\beta$.
Pada batang CA, titik C seolah-olah turun sejauh δ_{ca} terhadap titik A, atau A naik sejauh δ_{ca} terhadap C; pada batang CD, titik C turun δ_{cd} terhadap D; pada batang DB, titik D naik δ_{db} terhadap B.
Persamaan-persamaan putaran sudut :

Titik A : $M_a s_1/3EI_1 + M_c s_1/6EI_1 = \varphi^\circ_{ac} + \delta_{ca}/s_1$

$M_a = -\frac{1}{2} M_c + 3EI_1\,\delta_{ca}/s_1^2 + 3\,EI_1\,\varphi^\circ_{ac}/s_1$

Titik C : $M_a s_1/6EI_1 + M_c(s_1/3EI_1 + b/3EI_b) + M_d b/6EI_b) =$

$\varphi^\circ_{ca} + \varphi^\circ_{cd} - \delta_{ca}/s_1 - \delta_{cd}/b$;

$M_c(s_1/4EI_1 + b/3EI_b) + M_d b/6EI_b = \varphi^\circ_{ca} + \varphi^\circ_{cd} - \frac{1}{2}\varphi^\circ_{ac} -$

$- \frac{3}{2}\delta_{ca}/s_1 - \delta_{cd}/b$ . . . . . (1).

Titik B menghasilkan $M_b = -\frac{1}{2}M_c - 3EI_2\delta_{db}/s_2^2 + 3EI_2\varphi^\circ_{bd}/s_2$.

Titik D secara analog :

$M_c b/6EI_b + M_d(s_2/4EI_2 + b/3EI_b) = \varphi^\circ_{dc} + \varphi^\circ_{db} - \frac{1}{2}\varphi^\circ_{bd} + \frac{3}{2}\delta_{db}/s_2 +$

$+ \delta_{cd}/b$ . . . . . (2).

Besaran-besaran δ dapat dinyatakan dalam δ sehingga dapat dieliminasikan dan kita memperoleh persamaan (a) yang mengandung M_c dan M_d sebagai anu. Untuk mudahnya, kita melipatkan besaran-besaran dengan EI_b/b yang menghasilkan bilangan-bilangan tak berdimensi serta tetap : $k_1 = (s_1/b)(I_b/I_1)$ dan $k_2 = (s_2/b)(I_b/I_2)$.

Persamaan satu lagi yang diperlukan ialah :

$H_a + H_b + \Sigma P_h = 0$.

H_a dihitung secara mempelajari "free-body" AC berdasarkan ΣM terhadap $C = 0$.

$-H_a.h_1 + V_a.a + \Sigma(M_p)_c - M_a + M_c = 0$ (b), jika $\Sigma(M_p)_c$ berarti jumlah aljabar momen-momen beban luar pada tihang AC terhadap C (positif ke kanan), sedang M_a dapat dinyatakan dalam M_c.

Dikombinasikan dengan persamaan (1) menghasilkan $H_a = f(M_c, M_d)$, sebab besaran-besaran yang mengandung dapat dieliminasi.

Secara analog kita menghitung H_b pada "free-body" BD dengan momen terhadap $D = o$. Dikombinasikan dengan (2) mendapatkan $H_b = f(M_c, M_d)$.

Setelah itu, kembali ke persamaan (a) yang hanya memuat M_c dan M_d.

Contoh: seperti pada gambar IV, 70.

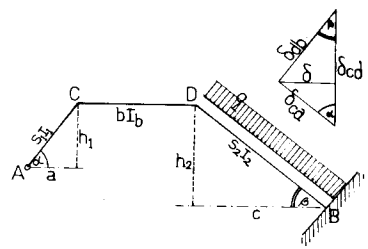
$b = s_2 = 2s_1$; $I_b = I_2 = 1{,}5\, I_1$;

$tg\,\alpha = \frac{4}{3}$, jadi $h_1 = \frac{4}{5}s_1$; $a = \frac{3}{5}s_1$;

$tg\,\beta = \frac{3}{4}$, $h_2 = \frac{3}{5}s_2$, $c = \frac{4}{5}s_2$

a) Beban penuh merata $q \perp$ pada tihang BD (ke dalam).

Goyangan dianggap ke kiri.



Gambar IV, 70.

$k_1 = (s_1/b)(I_b/I_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

$k_2 = (s_2/b)(I_b/I_2) = 1$.

$\delta_{ca} = \frac{5}{4}$; $\delta_{cd} = \frac{25}{12}$; $\delta_{db} = \frac{5}{3}$.

$\varphi^\circ_{db} = \varphi^\circ_{bd} = qs_2^3/24EI_2$; $\varphi^\circ_{db} - \varphi^\circ_{bd} = ql_2^3/48EI_2$.

$P = qs_2$; $V_2 = V = P\cos\beta = \frac{4}{5}P$.

$M_c(s_2/3EI_1 + b/3EI_b) + M_d b/6EI_b = \delta_{ca}/s_2 + \delta_{cd}/b$ . . . . . (1).

$M_c b/6EI_b + M_d(s_2/4EI_2 + b/3EI_b) = qs_2^3/48EI_2 - 1{,}5\,\delta_{db}/s_2 - \delta_{cd}/b$ (2).

Dikalikan dengan EI_b/b :

$(\frac{1}{3}k_1 + \frac{1}{3})M_c + \frac{1}{6}M_d = (\frac{5}{2} + \frac{25}{12})EI_b\delta/b^2$ . . . . . (1).

$\frac{1}{6}M_c + (\frac{1}{4}k_2 + \frac{1}{3})M_d = \frac{1}{48}qs_2^2 - (\frac{5}{2} + \frac{25}{12})EI_b\delta/b^2$ . . . (2); $k_1 = \frac{3}{4}$, $k_2 = 1$.

$\frac{7}{12}M_c + \frac{1}{6}M_d =$ . . . . . $\frac{55}{12}EI_b\delta/b^2$ . . . . . (1).

$\frac{1}{6}M_c + \frac{7}{12}M_d = \frac{1}{48}qs_2^2 - \frac{55}{12}EI_b\delta/b^2$ . . . . . (2).

$\frac{3}{4}M_c + \frac{3}{4}M_d = \frac{1}{48}qs_2^2$ atau $M_c + M_d = \frac{1}{36}qs_2^2$ . . . . . (a).

$V_a = V_c = (M_c - M_d)/b$; $V_b = V_d + V_2 = (M_d - M_c)/b + \frac{4}{5}P$.

$H_a = M_c/h_1 + V_a cotg\,\alpha = M_c/h_1 + \frac{3}{4}(M_c - M_d)/b$.

$H_b = (-M_d + M_b)/h_2 - V_b\, cotg\,\beta - P.\frac{1}{2}s_2/h_2$

$= \frac{3}{2}M_d/h_2 - \frac{4}{3}(M_d - V_c)/b - \frac{16}{15}P + \frac{5}{6}P + 3EI_2\delta_{db}/h_2 s_2^2 + \frac{5}{24}P$.

$H_a + H_b - \frac{3}{5}P = 0$. . . . . (b). dikalikan dengan b menjadi :

$(\frac{5}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{3})M_c - (\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3} + \frac{4}{3}) = (\frac{16}{15} - \frac{5}{6} + \frac{3}{5} - \frac{5}{24})Pb - 3.\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{3}EI_2\delta/b^2$.

$\frac{55}{12}M_c - \frac{55}{12}M_d = \frac{5}{6}Pb - \frac{25}{3}EI_b\delta/b^2$.

$\frac{11}{10}M_c - \frac{11}{10}M_d = \frac{3}{40}qs_2^2 - EI_b\delta/b^2$ . . . . . (b).

$\frac{7}{55}M_c + \frac{2}{55}M_d =$ . . . . . $EI_b\delta/b^2$ . . . . . (1).

$\frac{149}{220} M_c - \frac{113}{220} M_d = \frac{3}{40} q s_2^2$

$149 M_c - 113 M_d = \frac{33}{2} q s_2^2$ . . . . . (c).

$149 M_c + 149 M_d = \frac{149}{36} q s_2^2$ . . . . . (a).

$M_c = 0{,}075\, q s_2^2$ (bekerja negatif); $M_d = -0{,}048\, q l_2^2$ (bekerja positif).

$EI_b \delta / b^2 = \frac{7}{55} M_c + \frac{2}{55} M_d = 0{,}0078\, q l_2^2$; $EI_2 \delta_{db} / s_2^2 = \frac{5}{3}.0{,}0078 q s_2^2 = 0{,}013\, q s_2^2$

$M_b = -\frac{1}{2} M_d + 3EI_2 \delta_{db} / s_2^2 + 3EI_2 \delta_{bd} / s_2 = 0{,}188\, q s_2^2$.

$V_a = (M_c - M_d)/b = 0{,}123\, q s_2$.

$V_b = -V_a + V_2 = (-0{,}123 + 0{,}800) q s_2 = 0{,}677\, q s_2$.

$H_a = M_c/h_1 + V_a \operatorname{cotg} \alpha = (\frac{5}{2}.0{,}075 + \frac{3}{4}.0{,}123) q s_2 = 0{,}280\, q s_2$.

$H_b = (-M_d + M_b)/h_2 - V_b \operatorname{cotg} \beta - \frac{1}{2} P s_2 / h_2 = 0{,}320\, q s_2$.

$H_a + H_b = 0{,}60\, q s_2 = q s_2 \sin \beta = P_q$.

V_a dan H_a juga dapat dihitung demikian :

$\Sigma M_B = 0$ pada seluruh bangunan.

$\Sigma M_D = 0$ pada free-body ICD atau $\Sigma M_C = 0$ (free-body AC).

V_b dan H_b terdapat :

$\Sigma M_A = 0$ pada keseluruhannya.

$\Sigma M_C = 0$ (free-body BDC) atau $\Sigma M_D = 0$ (free-body BD).

Lihat bab VI, § 69*a* dan VII, § 16.

b) Titik B *turun vertikal* sejauh y.

Goyangan dianggap ke kanan. Kita dapat menggunakan pendapat-pendapat di atas :

$\frac{7}{12} M_c + \frac{1}{6} M_d = -\frac{55}{12} EI_b \delta / b^2 + EI_b y / b^2$ . . . . . (1).

$\frac{1}{6} M_c + \frac{7}{12} M_d = \frac{55}{12} EI_b \delta / b^2 - EI_b y / b^2$ . . . . . (2).

$M_c + M_d = 0$ . . . . . (1) + (2) atau $M_d = -M_c$.

$V_a = V_c = (M_c - M_d)/b = 2 M_c / b = -V_b$

$H_a = M_c/h_1 + V_a \operatorname{tg} \alpha = (\frac{5}{2} + \frac{3}{4}.2) M_c / b = 4 M_c / b$.

$M_b = -\{V_a(a+b+c) - H_a(h_2 - h_1)\} = (2.\frac{21}{10} + 4.\frac{2}{10}) M_c = -5 M_c$

(momen ujung bernilai positif jika bekerja negatif).

$M_b = -\frac{1}{2} M_d - 3 EI_2 \delta_{db} / s_2^2$

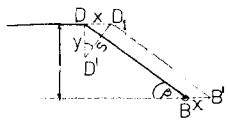
$-5 M_c = \frac{1}{2} M_c - 3.\frac{5}{3} EI_b \delta / b^2$; $EI_b \delta / b^2 = \frac{11}{10} M_c$.

Ini diisikan ke dalam persamaan (1) sambil mengingat bahwa $M_d = -M_c$:

$\frac{5}{12} M_c = -\frac{55}{12}.\frac{11}{10} M_c + EI_b y / b^2$; $M_c = \frac{24}{131}.EI_b y / b^2$ dst.

c) Titik B tergeser *mendatar ke kanan* sejauh x (gb. IV, 70*b*). Jika titik C tidak beralih-tempat (tidak ada goyangan), maka D akan jatuh di D' dengan $DD' = x \operatorname{cotg} = \frac{4}{3} x = y$, dan $D'D_1 = \frac{5}{3} x (\perp DB)$.

Di samping itu masih ada goyangan ke kanan sejarak δ.



Gambar IV, 70*b*.

$\frac{7}{12} M_c + \frac{1}{6} M_d = -\frac{55}{12} EI_b \delta / b^2 + EI_b y / b^2$ . . . . . (1).

$\frac{1}{6} M_c + \frac{7}{12} M_d = \frac{55}{12} EI_b / b^2 - EI_b y / b^2 - \frac{5}{3} EI_b x / b s_2$ . . . . . (2).

$\frac{3}{4} M_c + \frac{3}{4} M_d = -\frac{5}{3} EI_b x / b^2$.

$M_c + M_d = -\frac{20}{9} EI_b x / b^2$ . . . . . (a), lihat persamaan (a) di dalam contoh a di atas.

$V_a = (M_c - M_d)/b$; $H_a = M_c/h_1 + V_a \operatorname{cotg} \alpha = V_b = -V_a$ dan seterusnya. Bandingkan bab VII, § 22.

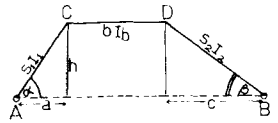
§ 37 a. Portal dua-sendi sama tingginya (gb. IV, 71).

Yang dimaksud ialah bahwa garis-penghubung AB terletak mendatar.

Titik B turun vertikal sejauh y, goyangan ke kanan. Menurut diagram-peralihan di dalam gambar 69 *a* terdapat:

$\delta_{ca} = \delta / \sin \alpha$; $\delta_{ca} / s_1 = \delta / s_1 \sin \alpha = \delta / h$;

$\delta_{db} = \delta / \sin \beta$ dan $\delta_{db} / s_2 = \delta / h$ juga.



Gambar IV, 71

Di samping itu masih ada penurunan sejauh y pada D yang mengikuti B.
Persamaan-persamaan putaran sudut menjadi :

$M_c(s_1/3EI_a + b/3EI_b) + M_d b/6EI_b = -\delta/h - \delta_{cd}/b$ . . . . . (1).

$M_c b/6EI_b + M_d(s_2/3EI_2 + b/3EI_b) = +\delta/h + \delta_{cd}/b - y/b$ . . . . (2).

$M_c(s_1/3EI_a + b/2EI_b) + M_d(s_2/3EI_2 + b/2EI_b) = 0$ . . . (1) + (2).

Menghasilkan $M_d = -\gamma M_c$ dengan γ berarti bilangan *positif*.

$V_a = V_c = (M_c - M_d)/b = (1+\gamma)M_c/b = -V_b$.

$H_a = M_c/h + V_a \operatorname{ctg}\alpha = M_c/h + (1+\gamma)M_c \operatorname{cotg}\alpha/b$. (ke kanan).

$H_b = -M_d/h - V_b \operatorname{cotg}\beta = \gamma M_c/h + (1+\gamma)M_c \operatorname{cotg}\beta/b$ (ke kiri).

$H_a + H_b = 0$; $(1+\gamma)M_c \left\{ 1/h + (\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta)/b \right\} = 0$;

Jadi $M_c = 0$ dan $M_d = 0$, berarti turunnya salah satu titik-perletakan (di sini B), tidak menimbulkan momen-momen (tegangan-tegangan) extra. Ini keuntungan bangunan bersendi pada umumnya pada tanah yang tidak boleh dipercaya kemampuannya.

Keterangan secara geometri demikian :

Jika lukisan $ABCD$ itu berputar bebas dengan A sebagai titik pusatnya, maka bentuknya tidak akan berobah, tidak terjadi robahan-robahan sudut (deformasi). Bila titik B turun, peralihannya menyinggung pada busur lingkaran yang berpusat di A seperti termaksud di atas, (⊥ garis AB). Oleh karena itu, di atas diadakan sarat, bahwa garis-penghubung terletak mendatar.

Jika garis AB itu serong, maka peralihan titik B harus berarah ⊥ AB juga (jadi tidak vertikal) supaya tidak menimbulkan deformasi.

G. POLIGON-BATANG LENTUR

§ 38. Arti dan tujuan.

Jika kita menganggap bidang M/EI sebagai bidang muatan, dan menggambar poligon-batang dengan perantaraan gambar-kutub, maka poligon-batang ini melukiskan garis-lentur balok, atau lebih tepat: sisi-sisi poligon ini membentuk garis-garis-singgung pada garis-lentur ini.

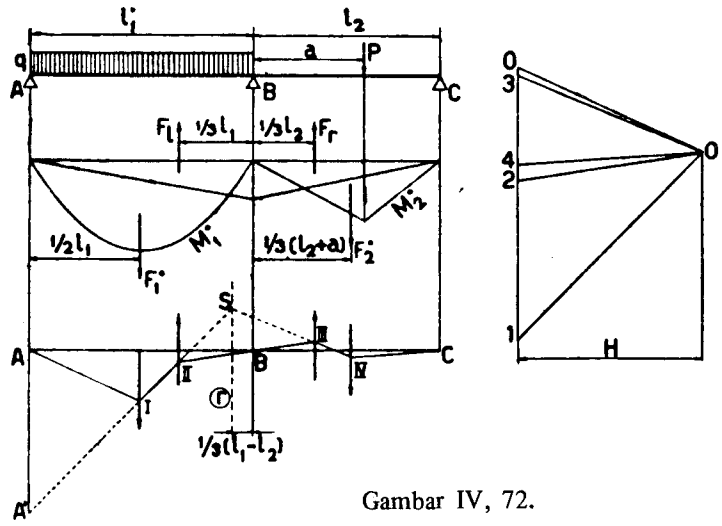
Titik-titik-perletakan yang terletak pada satu garis-lurus dan yang tak dapat turun, akan terdapat terletak pada suatu garis-lurus pada lukisan garis-lentur ini (yaitu terletak pada garis--penutupnya garis-lentur ini).

Kita tidak bermaksud akan menggambar garis-lentur dengan saksama, melainkan hanya akan menarik sisi-sisi-poligon yang penting saja. Jadi kita tak usah membagi-bagi bidang-bidang M/EI di dalam elemen-lentur yang kecil-kecil, bahkan harus menggambar sisi-sisi poligon sesedikit-sedikitnya. Kita mengambil seluruh bidang-bidang M°/EI dan bidang-bidang momen-peralihan $/EI$ di dalam satu lapangan masing-masing sebagai satu "kekuatan". Jika di dalam saban lapangan nilai EI itu tetap, mudah sekali menentukan letaknya garis-garis-berat bidang M°/EI dan $\frac{1}{EI}$ bidang momen-peralihan, yang *berupa segi-tiga* itu. Tentang yang belakangan ini, letak garis-kerjanya sudah tertentu dan tak dipengaruhi oleh nilainya momen, yaitu selalu sejauh $\frac{1}{3}l$ dari titik-perletakan.

Poligon yang termaksud di atas ini, kita namakan *poligon-batang-lentur* yang dapat kita gambar meskipun nilai momen-momen-peralihannya belum terketahui, yaitu berdasarkan atas ketentuan-ketentuan yang kita peroleh tadi. Setelah poligon-batang elastis ini digambar, kita dapat mengetahui besarnya momen-momen-peralihan.

§ 39. Analisa.

Sebagai contoh, kita ambil balok di atas tiga titik-perletakan ABC dengan EI tetap dan sama di masing-masing lapangan.



Gambar IV, 72.

Berhubung dengan ini, faktor EI tidak kita pakai lagi dan yang dianggap sebagai muatan ialah bidang-bidang-momen. Muatan-muatan tersebut adalah:

F_1° = luas bidang M_1°, sebagai muatan yang bekerja ke bawah, di gambar-kutub dilukiskan oleh panjang gari 01.

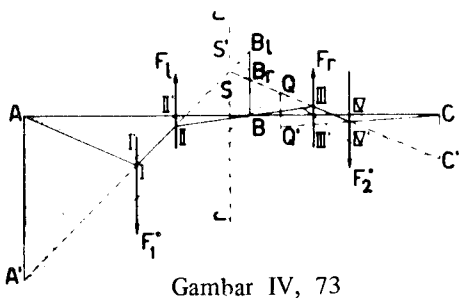
F_2° = luas bidang, M_2°, juga sebagai muatan ke bawah, garis 34 pada gambar-kutub.

F_l = luas bidang-momen-peralihan di lapangan AB, sebagai muatan ke atas : garis 12 gambar-kutub.

F_r = idem idem di lapangan BC, bekerja ke atas juga; garis 23 di gambar-kutub.

ABC adalah garis-penutup pada poligon-batang lentur dan H = lengan-kutubnya. Batang $II\ I$ memotong garis-vertikal yang melalui titik A di titik A'. Maka menurut sifat poligon-batang panjang garis AA' ada artinya, yaitu :

$AA'.H$ = statis-momennya F_1° terhadap titik $A = S_{1a}^\circ$, dan dengan begitu letak titik A' dapat ditentukan. Jadi batang $I\ II$ harus melalui titik A' yang tertentu ini. Batang-batang $I\ II$ dan $III\ IV$ memotong satu sama lain di titik S yang terletak di atas garis-kerjanya resultanta dari F_l dan F_r(garis r), yang tertentu pula letaknya, ialah sejauh $\frac{1}{3}(l_1 - l_2)$ di sebelah kiri B jika $l_1 > l_2$ atau $\frac{1}{3}(l_2 - l_1)$ di sebelah kanan B, jika $l_2 > l_1$; jadi pada umumnya, garis r terletak di lapangan yang terpanjang.



Gambar IV, 73

§ 40. Cara melukiskan.

Di dalam contoh § 36, besaran M_b dianggap belum terketahui.

Meskipun begitu, poligon-batang lentur akan dapat digambar. Kita menghitung S_{1a}° = statis-momennya bidang M_1° (kekuatan F_1°) terhadap titik A, dan sesudah itu menentukan panjangnya garis AA'. Di dalam contoh ini, $S_{1a}^\circ = \frac{1}{24}ql^3 (\text{kgm}^3)$.

Kemudian menarik garis-pembantu $A'\ I'\ II'$ yang boleh sesukanya; di sini kita pilih melalui titik potongan antara garis-penutup ABC dan garis-kerja F_l

(untuk menghemat garis-pembantu). Supaya $I'\ II'$ itu membentuk poligon-batang, maka sisi selanjutnya $II'\ III'$ harus melalui titik B (jadi $II'\ III'$ bersatu padu dengan garis ABC) dan batang $III'\ IV'$ memotong garis $I'\ II'$ di sesuatu titik S' yang terletak di atas garis r (jadi sejauh $\frac{1}{3}(l_1 - l_2)$ dari titik B). Oleh karena itu titik S' itu sudah ditentukan oleh garis-penolong $A'\ I'\ II'$, dan titik III' itu sebagai titik-potong antara garis-penutup ABC dan garis-kerja F_r, juga sudah terketahui, maka garis $S'\ III'\ IV'$ juga dapat ditarik. Poligon ini dan poligon yang kita cari itu mempunyai dua titik tunggal, yaitu A' dan B, atau dua-batang sisi poligon-pembantu ini berpotongan dengan dua batang sisi seurut pada poligon yang belum terketahui itu satu sama lain di dua titik yang tertentu, yaitu A' dan B ($I'\ II'$ memotong $I\ II$ di titik A'; $II'\ III'$ memotong $II\ III$ di titik B). Maka menurut sifat poligon-batang, sisi-sisi lainnya seurut pada kedua-dua poligon ini akan memotong satu sama lain di atas garis yang menghubungkan A' dengan B, yaitu garis $A'B$. Garis $A'B$ ini memotong garis $III'\ IV'$ di titik Q, jadi menurut sifat di atas tadi, garis $III\ IV$ juga melalui titik Q ini. Batang-batang $III\ IV$ dan $IV\ C$ mengapit garis-kerja F_2, jadi panjang garis vertikal yang melalui titik Q yang dipotong oleh garis-garis $IV\ III$ dan $C\ IV$ itu melukiskan besarnya statis momen bidang M_2° (atau kekuatan F_2°) terhadap titik Q itu (panjang garis QQ'). Oleh karena letak Q ini sudah terdapat, besaran tersebut belakangan ini juga boleh ditentukan, jadi letaknya titik Q' juga dapat terketahui. Ini berarti, bahwa batang penghabisan poligon yang kita cahari ini, yaitu sisi $IV\ C$, harus melalui titik Q' tadi, jadi sudah dapat ditarik.

Dengan begitu mendapat titik IV sebagai titikpotong antara garis-$Q'\ C$ dan garis-kerja F_2°. Sisi $IV\ III$ harus melalui titik Q, serta memotong garis r di titik S. Selanjutnya sisi $I\ II$ itu membentuk sebagian dari garis SA', jadi terdapat juga. Sebagai kontrol, sisi $II\ III$ harus melalui B.

Kemudian kita menarik garis vertikal melalui titik B, yang dipotong oleh $I\ II$ di titik B_l dan oleh $IV\ III$ di titik B_r.

Potongan garis BB_l melukiskan statis-momen F_l terhadap B dan BB_r melukiskan statis momen F_r terhadap B. Dengan begitu kita dapat mengetahui nilai M_b, sebab statis-momen F_l terhadap $B = \frac{1}{6}M_b l_1^2$ dan statis-momen F_r terhadap $B = \frac{1}{6}M_b l_2^2$. Jadi kedua-dua besaran ini mendapatkan suatu nilai M_b, dan sebagai kontrol harus terdapat: $BB_l : BB_r = l_1^2 : l_2^2$.

Sesudah poligon-batang lentur $A\ I\ II(B)\ III\ IV\ C$ itu digambar, kita juga dapat menggambar gambar-kutubnya. Untuk itu, kita menarik dari sesuatu

titik 0, garis-garis yang sejajar dengan sisi-sisi poligon ini (radius-radius kutub) dan yang memotong sesuatu garis-vertikal di titik-titik *o*, 1, 2, 3 dan 4 (lihat gambar kutub) dengan pengertian bahwa :

$0o \;//\; AI$, $01 \;//\; I\,II$, $02 \;//\; II\,III$, $03 \;//\; III\,IV$ dan $04 // IV\,C$

Potongan-garis $o1$ melukiskan besarnya F_1° (yang telah terketahui) dan potongan 12 melukiskan besarnya $F_l = \frac{1}{2}M_b l_1$. Jadi $\frac{1}{2}M_b.l_1 : F_1^\circ = 12 : 01$, atau $M_b = \frac{12}{01}.2F_1^\circ/l_1$ sedang di dalam contoh ini

$$F_1^\circ = \tfrac{1}{8}ql^2.\tfrac{2}{3}l_1 = \tfrac{1}{12}q_1 l_1^3$$

atau $2F_1^\circ/l_1^2 = \frac{1}{6}q_1 l_1^2$ dan $M_b = \frac{12}{01}.\frac{1}{6}ql^2. = \frac{12}{01}.4/3.M_{1max}^\circ$

Selanjutnya, panjang potongan garis 23 melukiskan besarnya $F_r = \frac{1}{2}M_b l_2$

dan garis 34 besarnya $F_2^\circ - P\frac{a(l_2-a)}{l_2} \cdot \frac{1}{2}l_2 = \frac{1}{2}Pa\,(l_2 - a)$.

Menurut pendapat ini maka

$$M_b = \tfrac{23}{24}.2F_2^\circ/l_2 - \tfrac{23}{34}Pa(l_2-a)/l_2 = \tfrac{23}{34}.M_{2\,max}^\circ$$

Tentu saja, kedua-dua pendapat untuk M_b ini harus sama. Selanjutnya masih boleh dipakai sebagai kontrol, bahwa :

$$F_l : F_r = l_1 : l_2 = 12 : 23$$

dan juga bahwa CC' melukiskan statis momen F_2° terhadap C (atau S_{2c}°).

Kita harus ingat tentang beberapa *dimensi*.

$[F^\circ] = [F.] = [kl^2]$ atau $[tm^2]$

$[AA'] =$ [statis momennya bidang-momen] $= [kl^3]$ atau $[tm^3]$

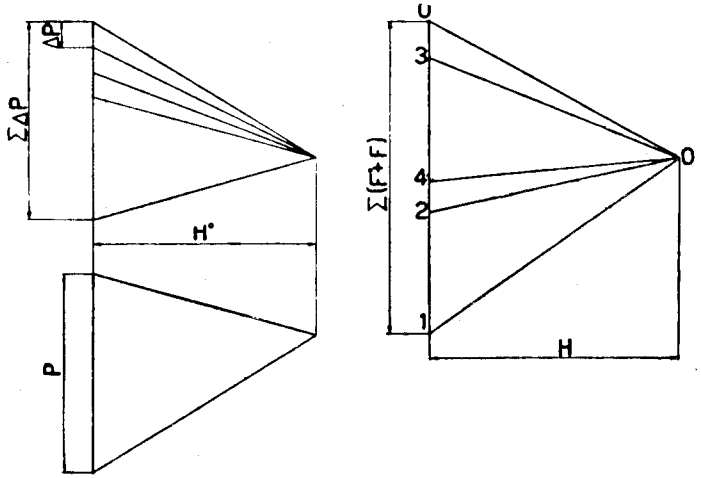
$[BB_l] = [BB_r] = [kl^3]$ atau $[tm^3]$

§ 41. Cara grafis sepenuhnya.

Bidang-bidang M° dilukiskan secara grafis dengan perantaraan gambar-kutub dan poligon-batang biasa.

Jika muatan itu terbagi, maka bidang-bidang muatan dibagi-bagi di dalam kekuatan-kekuatan ΔP.

Panjang kutub tersebut ini adalah H° yang berdimensi $[k]$.



Gambar IV, 74

Bidang-bidang M° yang terlukis demikian itu, kemudian dianggap sebagai muatan (F°) dan dilukiskan di dalam gambar-kutub lainnya dengan lengan $= H$. Jadi lengan-kutub H ini berdimensi $[kl^2]$.

Poligon-batang lentur nanti dilukiskan berdasarkan atas gambar-kutub belakangan ini. Ordinat-ordinat pada poligon-lentur ini, jika dilipatkan dengan H berarti statis momennya bidang-momen yang berdimensi $[kl^3]$ atau $[tm^3]$.

Pada gambar IV 73 terdapat: $H \times BB_l$ = statis momennya bidang momen F_l terhadap $B = \frac{1}{6}M_b l_1^2$.

Sekarang kita pilih, $H = \frac{1}{6}l_1^2.H^\circ$.

Jadi $\frac{1}{6}M_b l_1^2 = \frac{1}{6}l_1^2 H^\circ.BB_l$

$$M_b = H^\circ.BB_l$$

Dengan begitu, panjang garis BB_l dapat dipakai sebagai ordinat M_b pada poligon-batang yang melukiskan bidang-bidang M° tadi (berdasaran atas jarak-kutub H°) dan kemudian menggambar perjalanan M_b di kedua-dua lapangan (berupa segi-tiga). Sekarang tentang panjang garis AA' yang melukiskan S_{1a}° (statis momen F_1° terh. A).

$$H.AA' = S_{1a}^\circ$$

$$AA' = S_{1a}^\circ/H = S_{a1}^\circ/\tfrac{1}{6}l_1^2 H^\circ$$

Di dalam contoh di atas, $S^{\circ}_{1a} = \frac{1}{24}ql^4$. Jika $H^o = \alpha q l_1$ (ton) di mana α itu bilangan biasa, dan skala-gambar (skala–ukuran panjang) ada 1 : n akan terdapat :

$$AA' = \frac{1}{n}\,\tfrac{1}{24}ql_1^4/\tfrac{1}{6}l_1^2 \mathrm{r}.\alpha q l_1 = \frac{1}{n}\cdot\tfrac{1}{4}l_1/\alpha \ (m' \text{ jika } l_1 \text{ diukur dengan } m').$$

Jika umpamanya $n = 100$ dan $l_1 = 8$ m serta $\alpha = 1$, menjadi $AA' = \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{4}.\ 8\ m' = 2$ cm.

Di sini jangan dilupakan, bahwa ordinat-ordinat pada kedua-dua jenis poligon-batang itu, selalu berdimensi $[l]$.

§ 42. Cara analysis.

Lebih mudah serta saksama, jika menghitung satu dan lain menurut perjalanan analysis. Untuk suatu muatan P sejauh x dari perletakan kiri, terdapat: $F^o = \frac{1}{2}P.x(l-x)$; S^o_l (statis momen F° terhadap perletakan kiri) $= \frac{1}{6}Px(l^2 - x^2)$. Jarak antara garis-berat F° dan titik perletakan ini ada :

$$x_o = \frac{S^o_l}{F^o} = \frac{\frac{1}{6}x(l^2-x^2)}{\frac{1}{2}x(l-x)} = \tfrac{1}{3}(l+x)$$

Untuk beberapa muatan-muatan $P_1, P_2, P_3 \ldots . P_n$ masing-masing sejauh $x_1, x_2, x_3 \ldots . x_n$ dari titik-perletakan kiri, terdapat :

$$x_o = \tfrac{1}{3}\,\frac{P_1x_1(l^2-x_1^2) + P_2x_2(l^2-x_2^2) + P_3x_3(l^2-x_3^2) + \ldots . P_nx_n(l^2-x_n^2)}{P_1x_1(l-x_1) + P_2x_2(l-x_2) + P_3x_3(l-x_3) + \ldots . P_nx_n(l-x_n)}$$
$$= \tfrac{1}{3}\,\frac{\Sigma P_x(l^2-x^2)x}{\Sigma P_x(l-x)x} = \frac{\Sigma S^o_l}{\Sigma F^o}$$

Jika muatan terbagi dengan ordinat $q_X = f(x)$ serta mulai dari titik sejauh x_1 dari perletakan kiri sampai sejauh x_2 dari perletakan kiri, terdapat:

$$x_o = \tfrac{1}{3}\,\frac{\int_{x1}^{x2} x(l^2-x^2)q_x dx}{\int_{x1}^{x2} x(l-x)q_x dx} \quad \text{dan} \quad F^o = \tfrac{1}{2}\int_{x1}^{x2} x(l-x)q_x dx$$

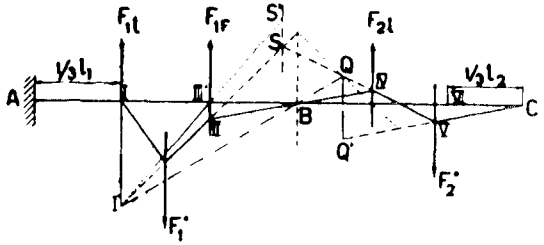
Kejadian khusus $q_X = q$ (tetap) dan lapangan dimuati penuh (jadi $x_1 = o$, $x_2 = l$).

$$x_o = \tfrac{1}{3}\,\frac{\int_o^l x(l^2-x^2)qdx}{\int_o^l x(l-x)qdx} = \tfrac{1}{3}\,\frac{\int_o^l (l^2x-x^3)dx}{\int_o^l (lx-x^2)fdx} = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}}\cdot l = \tfrac{1}{2}l$$

$$F^o = \tfrac{1}{2}q\int_o^l x(l-x)dx = \tfrac{1}{12}ql^3$$

§ 43. Jepitan di ujung balok (ujung A).

Bidang momen di lapangan kiri ditambah dengan satu buah, yaitu $F_1 l = \frac{1}{2}M_a l_1$, yang garis kerjanya terletak sejauh $\frac{1}{3}l_1$ di sebelah kanan A. Oleh karena ada jepitan di A, maka garis-singgung pada garis-lentur di titik A ini harus mendatar letaknya. Jadi batang pertama pada poligon-



Gambar IV, 75*a*.

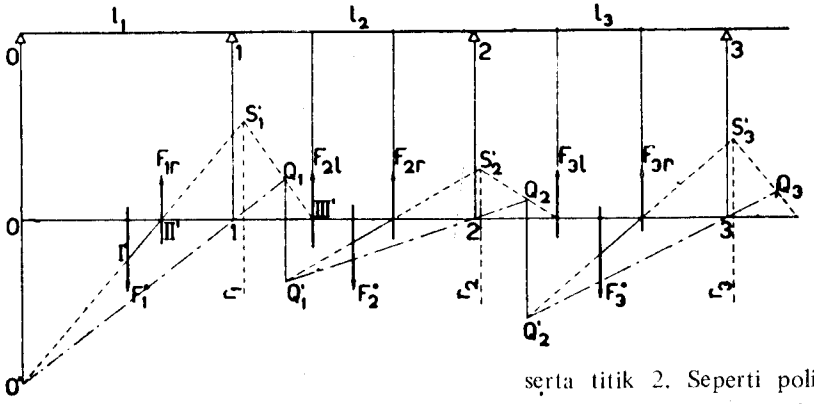
batang elastis ini berjalan mendatar atau bersatu padu dengan garis-penutup ABC, jadi dapat digambar dengan segera, yaitu sisi $A\,I$. Di atas garis-vertikal yang melalui titik I kita mengambil potongan sepanjang $I\,I'$ yang melukiskan statis momen F°_1 terhadap garis vertikal ini (boleh dikatakan terhadap titik I), yang terketahui juga. Jadi batang II III harus melalui titik I' ini, dan dengan begitu titik I' ini mempunyai arti seperti titik A' di atas. Selanjutnya cara mencari poligon-batang-elastis tak berobah.

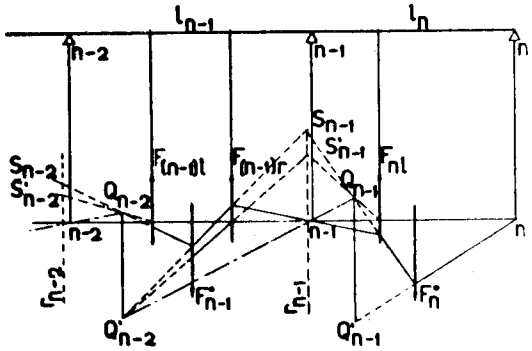
Apabila di ujung kanan (C) juga ada jepitan, sisi poligon terakhir juga bersatu padu dengan garis BC, dan dari titik Q' kita harus menarik garis Q' VI, di mana VI itu titik di atas garis CB sejauh $\frac{1}{3}l_2$ dari C. Garis Q' VI ini memotong garis-kerja F°_2 di titik V, dan seterusnya.

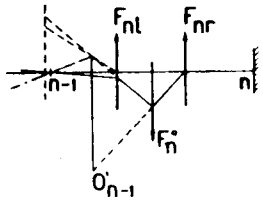
§ 44. Balok di atas banyak perletakan.

Cara tidak berobah, hanya saja pekerjaan menjadi terulang-ulang (gambar IV, 75*b*.).

Kita ambil oo' yang melukiskan statis momen F_1° terhadap titik o. Menggambar poligon-pembantu $o'\,I'\,II'\,III'$ (melalui titik 1), untuk menentukan tempat Q_1. Kemudian menarik Q_1Q_1' = statis-momen F_2° terhadap garis ini, dan menggambar poligon-pembantu baru yang melalui titik Q_1'







serta titik 2. Seperti poligon-penolong pertama, ini digambar melalui titik-potong antara garis-penutup dan garis-kerja F_{2r}, dan sekarang mendapat letaknya titik Q_2. Sesudah ini menarik garis Q_2Q_2' =statis-momen F_3° terhadap garis itu, d.s.t.

Titik Q yang terakhir yalah titik $Q_{(n-1)}$. Setelah mendapat titik $Q'_{(n-1)}$ kita menghubungkannya dengan titik n (di sini perletakan n adalah bebas). Garis ini membentuk batang panghabisan pada poligon-batang lentur yang kita cahari.

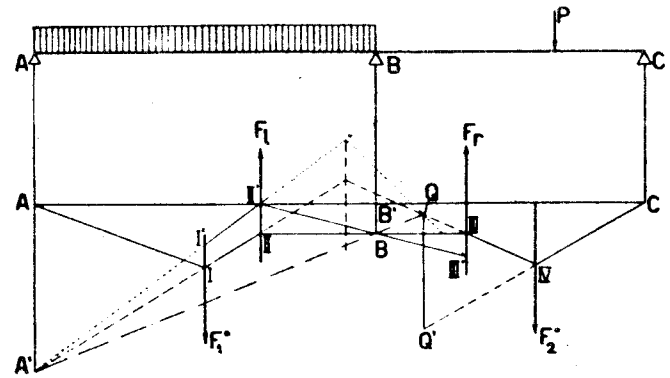
Batang kedua (dari akhir) melalui $Q_{(n-2)}$, yang berikutnya melalui titik $(n-1)$, dan yang berikutnya lagi, melalui titik $Q_{(n-2)}$, d.s.t. Jadi poligon yang kita perlukan ini dapatnya digambar mulai dari "belakang".

Apabila perletakan n itu jepitan, kita menarik garis dari titik Q_{n-1} ke titik-potong antara garis-kerja F_{nr} dan garis-penutup (sejauh $\frac{1}{3}l_n$ dari n).

Setelah mendapat poligon-lentur ini, kita dapat mengetahui momen-momen-peralihan dengan perantaraan nilai statis-momennya bidang-bidangnya terhadap titik-perletakan.

§ 45. Salah stellan (pelaksanaan).

Apabila ada perbedaan tinggi di antara titik-titik perletakan, maka garis penutup poligon-batang lentur tidak lagi berupa garis-lurus, melainkan harus sesuai dengan bangunan garis sumbu-balok semula (atau dengan garis yang menghubungkan titik-titik perletakan satu sama lain).



Sebagai contoh, kita ambil balok di atas tiga titik-perletakan ABC di mana titik B terletak δ_b lebih rendah dari pada garis AC. Di dalam gambar poligon-batang lentur, titik B tak boleh kita gambar sejauh δ_b begitu saja di bawah garis AC (panjang garis $B'B$). Sebab δ_b terdapat jika $\frac{1}{EI}$ × bidang-momen dianggap sebagai muatan, sedang nanti kita memakai bidang-momen sebagai muatan, jadi hasilnya ada EI kalinya. Jika H = lengan-pol. pada poligon-lentur, maka $H \times B'B = EI\delta_b$ jadi $B'B = \delta_b.EI/H$ dan selanjutnya disesuaikan dengan skala gambar.

Lebih mudah lagi, jika kita mendasarkan atas panjang, garis AA' yang dapat kita tentukan setelah menghitung S°_{1a} = statis-momennya F°_1 terhadap A.

$$H \times AA' = S^{\circ}_{1a}, \quad \text{jadi} \quad H = S^{\circ}_{a1}/AA'$$

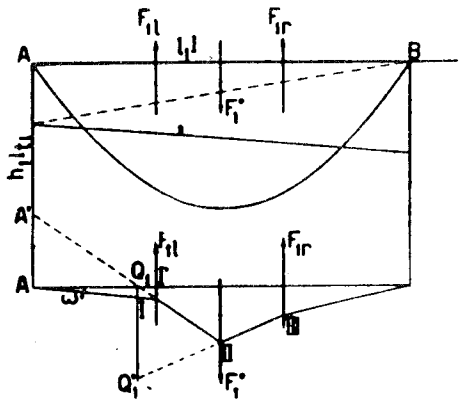
$$B'B = \delta_b.EI/H = \frac{EI\delta_b}{S^{\circ}_{1a}}.AA' \quad \text{atau} \quad B'B : AA' = EI\delta_b : S^{\circ}_{1a}$$

Sebagai teladan: $EI = 2000$ tm^2; $l_1 = l_2 = 8{,}00$ m;
$\delta_b = 2{,}5$ cm $= 0{,}025$ m; skala gambar 1 : 1000
Muatan penuh terbagi rata q pada lapangan AB.
Kita tentukan: $EI\delta_b = 2000$ tm^2. $0{,}025$ m $= 50$ tm^3

$$S^{\circ}_{1a} = \tfrac{1}{24}ql_1^4 = \tfrac{1}{24}q.4096 \text{ tm}^3$$

$$EI\delta_b/S^{\circ}_{1a} = \frac{50}{\frac{1}{24}ql_1^4}. \quad \text{Kita pilih} \quad H = \tfrac{1}{24}ql_1^3$$

Jadi $AA' = S^{\circ}_{1a}/H = l_1 = 8$ m, yang digambar dengan skala 1 : 100 menjadi 8 cm.



Gambar IV, 77

Panjang $B'B$ menjadi

$$\frac{EI\delta_b}{S^{\circ}_{1a}}.AA' = \frac{50}{\frac{1}{24}ql_1^4}.AA'.$$

Dengan $q = 2{,}5$ t/m, maka $\frac{1}{24}ql_1^4 = 519$ tm^3, dan $B'B = \frac{50}{519}$. 8 cm $= 0{,}775$ cm.

§ 46. Perletakan-kenyal.

Batang poligon di tempat jepitan tidak lagi mendatar: arahnya, melainkan membentuk sudut ω dengan garis-datar, oleh karena perletakan-jepitan berputar sudut sebesar ω. Pada tihang-luar, momen di kepala tihang M_{t1} sama dengan momen di ujung balok M_a.

$\omega_1 = M_{t1}.\varphi_{aa}$ dengan $\varphi_{aa} = \frac{1}{3}h_1/EI_{t1}$ jika kaki tihang ditanam dengan sendi dan $\varphi_{aa} = \frac{1}{4}h_1/EI_{t1}$ jika kaki tihang terjepit. Garis-singgung pada

garis-lentur di titik A memotong garis-kerja F_{1l} sejauh $\delta_1 = \frac{1}{3}l_1 \text{tg } \omega_1$, di bawah sumbu balok asli, atau oleh karena ω_1 itu amat kecil nilainya, boleh diambil: $\delta_1 = \frac{1}{3}l_1\omega_1$. Pada gambar-poligon-batang lentur nanti terdapat sudut $\omega'_1 = EI_1\omega_1$ dan $I'I = \frac{1}{3}l_1\omega_1$.

Jadi $\delta_1 = I'I.H/EI$ atau $\frac{1}{3}l_1\omega_1 = I'I_1H/EI$ dan $I'I = l_1EI_1\omega_1/3H$

$AA'.H =$ statis momen F_{1l} terhadap $A = \frac{1}{6}M_al_1^2$ sedang $M_a = M_{t1} = \omega_1/\varphi_{aa}$

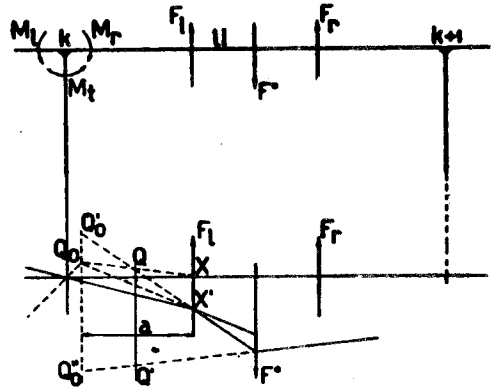
$$AA'.H = \tfrac{1}{6}\omega_1l_1^2/\varphi_{aa} \quad \text{dan} \quad AA' = \tfrac{1}{6}\omega_1l_1^2/H.\varphi_{aa}$$

$$I'I : AA' = 2EI : l_1/\varphi_{aa}$$

Dengan begitu, letak titik Q_1 dapat ditentukan, sebab

$$AQ_1 : Q_1I' = AA' : I'I = l_1/\varphi_{aa} : 2EI$$

Sesudah itu menentukan panjang garis $Q_1Q'_1 = \dfrac{1}{H}$ statis-momen F°_1 terhadap Q_1.



Gambar IV, 78

Pada tihang antara $M_t = M_r - M_l$. Jika $M_t = o$ atau $M_l = M_r$ kita akan mendapat titik Q_o menurut § 43. Sekarang M_r ditambah dengan M_t, jadi F_t ditambah dengan $\frac{1}{2}M_tl$ dan statis momennya terhadap Q_o bertambah dengan $\frac{1}{2}M_tla$, jika a berarti jarak antara titik Q_o hingga garis-kerja F_l.

Tambahan ini dilukiskan oleh panjang garis $Q_oQ'_o$.

Jadi $Q_oQ'_o \times H = \frac{1}{2}M_tla; Q_oQ'_o = M_t.l.a/2H.$

Seperti di atas, $XX' = EI\omega/3H = EIl.M_t\varphi_{kk}/3H.$

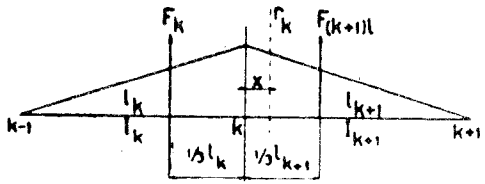
$$Q_oQ : QX = Q_oQ'_o : XX' = \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{3}EI\varphi_{kk} = 3a : 2EI.\varphi_{kk}.$$

Dengan begitu, kita dapat menentukan letak titik Q dan kemudian menarik garis $QQ' = 1/H$ statis momennya F° terhadapnya.

H. MOMEN-INERSIA TAK TETAP

§ 47. Cara grafis.

Asal saja disaban lapangan masing-masing EI itu tetap (balok prismatis) letak garis-garis-kerja F_l dan F_r tetap sejauh $\frac{1}{3}l$ dari titik perletakan. Sebab jika I_o itu momen-inersia pada sesuatu lapangan, maka bidang-bidang momen pada segala lapangan (termasuk bidang-bidang momen peralihan) boleh dilipatkan dengan besaran EI_o/EI, yang untuk tiap-tiap lapangan tetap nilainya, jadi tidak merobah bentuk bidang momennya atau memindah tempat garis-beratnya. Akan tetapi letak garis-garis r akan berobah, oleh karena



Gambar IV, 79

faktor EI_o/EI itu belum tentu sama besarnya pada dua lapangan yang berdampingan (gambar IV, 79).

$$F_{kr} = \tfrac{1}{2}M_k.l_k.I_o/I_k$$

$$F_{(k+1)l} = \tfrac{1}{2}M_k.l_{k+1}I_o/I_{k+1}$$

$F_{kr} + F_{(k+1)l} = F_k$ yang mempunyai garis-kerja di garis r_k

$$F_{kr}(\tfrac{1}{3}l_k + x) = F_{(k+1)l}.(\tfrac{1}{3}l_{k+1} - x)$$

$$x.(F_{kr} + F_{(k+1)l}) = -F_{kr}.\tfrac{1}{3}l_k + F_{(k+1)l}.\tfrac{1}{3}l_{k+1}$$

$$x = \tfrac{1}{3}\frac{F_{(k+1)l}.l_{k+1} - F_{kr}l_k}{F_k} = \tfrac{1}{3}\frac{l_{k+1}^2 - l_k^2(I_{k+1}/I_k)}{l_{k+1} + l_k(I_{k+1}/I_k)}$$

Jika pendapat ini positif, berarti bahwa garis r_k jatuh di sebelah kanan titik k. Dan nanti panjang garis Q_kQ_k' melukiskan (I_o/I_{k+1}) × statis momen bidang F_k° terhadap titik Q_k (titik Q_k itu ada di kanan titik-perletakan k; lihat gambar).

Apabila di dalam satu lapangan, besaran I itu juga tidak tetap, saban ordinat-momen harus dilipatkan dengan I_o/I. Bidang-momen yang terdapat

demikian itu dinamakan bidang-momen *ter-reduksi*. Untuk bidang M° dapat digambar dengan segera oleh karena ordinat-ordinatnya sudah terketahui.

Bidang-momen peralihan berupa segi-tiga, ordinat-ordinatnya belum terketahui. Akan tetapi hanya memerlukan letaknya garis-berat bidang ini, dan panjang ordinat penghabisannya (tinggi segi-tiga) tidak mempengaruhi letak ini, meskipun nanti tiap ordinat harus dilipatkan dengan faktor I_o/I. Jadi kita boleh memberi nilai 1 kepada ordinat penghabisan ini (gambar 75).

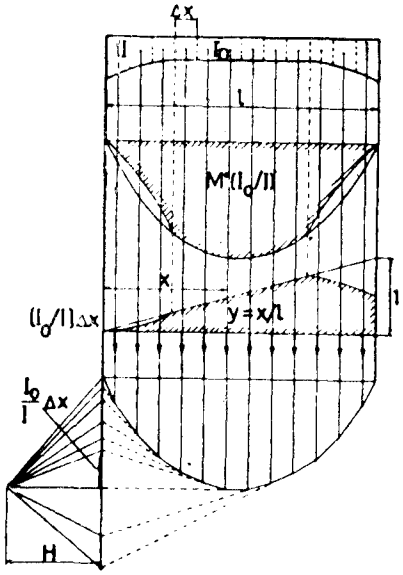
$$y = \frac{x}{l}.1 = x/l$$

Bidang momen kita bagi-bagi di dalam unsur-unsur kecil yang lebarnya ada Δx. Jadi luas bidang unsur sesudah direduksi ada:

$$\Delta F = \frac{I_o}{I}.y.\Delta x = \frac{I_o}{I}.\frac{x}{l}.\Delta x.$$

Oleh karena l itu besaran tetap, boleh kita keluarkan dari hitungan dan dan kita menghitung $\Delta F = \frac{I_o}{I}.x\Delta x = x.\left(\frac{I_o}{I}.\Delta x\right) =$ statis-momen besaran $\left(\frac{I_o}{I}.\Delta x\right)$ terhadap perletakan kiri. Besaran-besaran $(I_o/I)\Delta x$ kita anggap sebagai kekuatan dan kemudian menggambar poligon-batangnya. Pada poligon-batang ini kita dapat menggambar besaran $x.\left(\frac{I_o}{I}.\Delta x\right)$ secara grafis. Sesudah besaran-besaran $x.\frac{I_o}{I}.\Delta x$ ini terdapat kita anggap sebagai gaya-gaya pula dan menggambar poligon-batang (dengan tangan kutub H) padanya untuk menentukan letak resultantenya, yang identik dengan letak garis-berat bidang-momen peralihan sesudah direreduksi tadi.

PERPUSTAKAAN DAERAH JAWA TIMUR
JL. MENUR PUMPUNGAN No. 32
S U R A B A Y A
TAHUN ANGGARAN 1996 / 1997



Gambar IV, 80

Jika Δx itu diambil tetap, kita cukup dengan menghitung besaran-besaran I_o/I yang kemudian dianggap sebagai kekuatan-kekuatan.

§ 48. **Cara analisa.**

Ini dapat dikerjakan apabila besaran I_x itu ditentukan menurut sesuatu fungsi atau rumus yang dapat di-integrasikan.

Sebagai teladan kita ambil balok dengan lebar tetap, yang di dekat perletakannya (ujungnya) diberi perserongan atau voute lurus.

I. Perserongan diadakan sebelah

§ 49. **Akibat momen-momen-ujung** (M_l dan M_r).

Bentang-teori $= l$

Panjang perserongan $= v = l - u$; $m = (t_1 - t_o)/v$

$v = u/l$; $1 - v = v/l$; $\beta = t_o/l$.

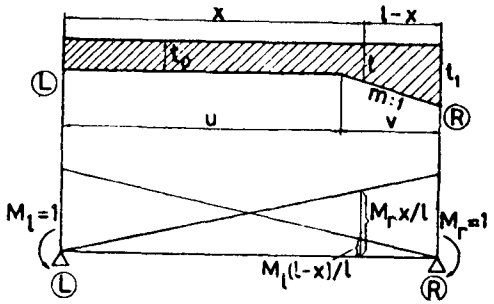
$\gamma = t_1/t_o$, jadi $t_1/l = \beta\gamma$

$I_o/I = t_o^3/t^3$

$t_1 - t = m(l - x)$

$x = \dfrac{1}{m}(ml - t_1 + t)$ selama

$x > u$; $l - x = \dfrac{1}{m}(t_1 - t)$



Gambar VI, 81

$$x^2 = \frac{1}{m^2}\left\{(ml - t_1)^2 + 2(ml - t_1)\,t + t^2\right\};\ (l - x)^2 = \frac{1}{m^2}(t_1^2 - 2t_1\,t + t^2)$$

$$x(l - x) = \frac{1}{m^2}\left\{(ml - t_1)t_1 - (ml - 2t_1)t - t^2\right\};\ dx = \frac{1}{m}\,dt.$$

Kita mempelajari putaran-putaran ujung φ'_l dan φ_r.

Akibat $M_l = 1$ yang menimbulkan $M_x = M_l(l-x)/l$

$$EI_o\varphi'_l = \frac{1}{l}EI_oM_l\varphi_u = \frac{1}{l}\int_o^l M_x(l - x)(I_o/I)dx$$

$$EI_o\varphi_u l^2 = \int_o^u (l - x)^2dx + \int_u^l (l - x)^2(t_o/t)^3dx$$

$$\int_o^u (l - x)^2dx = l^2u - lu^2 + \tfrac{1}{3}u^3 = l^3(v - v^2 + \tfrac{1}{3}v^3)$$

$$\int_u^l (l - x)^2(t_o/t)^3dx = (t_o/m)^3\int_{t_o}^{t_1}(t_1^2/t^3 - 2t_1/t^2 + 1/t)\,dt =$$

$$l^3(\beta/m)^3\left\{\tfrac{1}{2}t_1^2(1/t_o^2 - 1/t_1^2) - 2t_1(1/t_o - 1/t_1) + lg(t_1/t_o)\right\} =$$

$$l^3(\beta/m)^3\left\{\tfrac{1}{2}(\gamma - 1)\ \ (\gamma - 3) + lg\,\gamma\right\} = l^3A$$

$$EI_o\varphi'_r = EI_oM_l\varphi_{rl} = \frac{1}{l}\int_o^l M_x.x(I_o/I)dx$$

$$EI_o\varphi'_{rl}\,l^2 = \int_o^u (l - x)xdx + \int_u^l (l - x)\,x\,(t_o/t)^3dx$$

$$\int_o^u (l - x)xdx = l^3(.\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{3}v^3)$$

$$\int_u^l (l - x)\,x\,(t_o/t)^3dx = (t_o/m)^3\int_{t_o}^{t_1}\left\{(ml - t_1)\,t_1/t^3 - (ml - 2t_1)/t^2 - 1/t\right\}dt =$$

$$= l^3(\beta/m)^3\left\{\tfrac{1}{2}(ml - t_1)t_1\,(1/t_o^2 - 1/t_1^2) - (ml - 2t_1)\right.$$

$$(1/t_o - 1/t_1) - lgt_1/t_o \Big\} = l^3(\beta/m)^3 \Big[\tfrac{1}{2}(\gamma - 1) \Big\{ (1 - 1/\gamma)\ m/\beta +$$

$$+ (3 - \gamma) \Big\} - lg\ \gamma \Big] = l^3.B$$

Akibat $M_r = 1$ yang menghasilkan $M_x = M_r x/l$

$$EI_o\varphi_r' = EI_oM_r\varphi_{rr} = \int_o^l M_x\ x(I_o/I)dx.$$

$$EI_o\varphi_{rr}l^2 = \int_o^u x^2dx + \int_u^l x^2\,(t_o/t)^3dx.$$

$$\int_o^u x^2dx = \tfrac{1}{3}u^3 = l^3.\tfrac{1}{3}v^3.$$

$$\int_u^l x^2(t_o/t)^3dx = (t_o/m)^3\int_u^l \Big\{ (ml - t_1)^2/t^3 + 2(ml - t_1)/t^2 + 1/t \Big\} dt.$$

$$= l^3(\beta/m)^3\ [\tfrac{1}{2}(m/\beta - \gamma)\,(1 - 1/\gamma)\,\{(m/\beta - \gamma)\,(1 + 1/\gamma) + 4\} + lg\,\gamma] = l^3.C.$$

Hasil akhir:

$$EI_o\varphi_{ll}/l = v - v^2 + \tfrac{1}{3}v^3 + (\beta/m)^2\,\{\tfrac{1}{2}(\gamma - 1)\,(\gamma - 3) + lg\,\gamma\} \quad \ldots\ldots\ (1)$$

$$EI_o\varphi_{lr}/l = EI_o\varphi_{rl}/l = \tfrac{1}{2}v - \tfrac{1}{3}v^3 + (\beta/m)^3\ [\tfrac{1}{2}(\gamma - 1)\,\{(1 - 1/\gamma)m/\beta +$$

$$+ 3 - \gamma\} - lg\,\gamma] \quad \ldots\ldots\ (2)$$

$$EI_o\varphi_{rr}/l = \tfrac{1}{3}v^3 + (\beta/m)^3\ [\tfrac{1}{2}(m/\beta - \gamma)\,(1 - 1/\gamma)\,\{(m/\beta - \gamma)(1 + 1/\gamma) +$$

$$+ 4\} + lg\,\gamma] \quad \ldots\ldots\ (3)$$

Kejadian khusus $I : u = o;\ v = 0$

$$m = (t_1 - t_o)/l = \beta(\gamma - 1)$$

$$\beta/m = \frac{1}{(\gamma - 1)}\ ;\ m/\beta = \gamma - 1$$

$$EI_o\varphi_{ll}/l = (\gamma - 1)^{-3}\,\{\tfrac{1}{2}(\gamma - 1)\ \ (\gamma - 3) + lg\,\gamma\} \quad \ldots\ldots\ (1a)$$

$$EI_o\varphi_{lr}/l = (\gamma - 1)^{-3}\,\{\tfrac{1}{2}(1 - 1/\gamma)(\gamma + 1) - lg\,\gamma\} =$$

$$(\gamma - 1)^{-3}\,\{\tfrac{1}{2}(\gamma - 1/\gamma) - lg\,\gamma\} \quad \ldots\ldots\ (2a)$$

$$EI_o\varphi_{rr}/l = (\gamma - 1)^{-3}\,\{\tfrac{1}{2}(1 - 1/\gamma)(1/\gamma - 3) + lg\ \gamma\} \quad \ldots\ldots\ (3a)$$

Kejadian khusus : II: $t = t_o$ tetap; $v = \gamma = 1$; $I = I_o$ tetap.

$\varphi_{ll} = \varphi_{rr} = \tfrac{1}{3}l/EI$; $\varphi_{lr} = \varphi_{rl} = \tfrac{1}{6}l/EI$.

. Jika ujung R itu jepitan sempurna, maka M_l menimbulkan momen di R sebesar $(\varphi_{rl}/\varphi_{rr})M = i_{rl}M_l$ (nilai mutlaknya).

Sebaliknya, M_r menimbulkan momen jepit pada L sebesar $(\varphi_{lr}/\varphi_{ll})M_r = i_{lr}M_r$.

Besaran[2] i. disebut *faktor induksi* atau *jalar*.

Pada kejadian khusus dengan $t = t_o$ tetap, terdapat $i_{..} = \frac{1}{2}$.

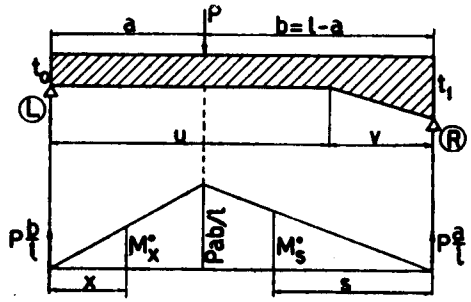
§ 50. Akibat beban luar.

1. **Beban P di atas bagian rata.**

P berdiri sejauh $a < u$ dari L.

$$M_x^o = P\frac{b}{l}.x;\ M_s^o = P\frac{a}{l}.s;\ \varphi_l^o = P\varphi_{lp}' =$$

$$\frac{1}{l}\int_o^a M_x^o(l - x)dx/EI + \frac{1}{l}\int_v^b M_s^o s\,ds/EI.$$



Gambar IV, 82

$$\varphi_r^o = P\varphi_{rp}' = \frac{1}{l}\int_o^a M_x^o x\,dx/EI + \int_v^b M_s^o(l - s)ds/EI.$$

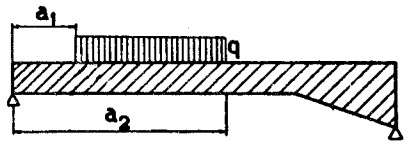
$$EI_o\varphi_{lp}'l^2 = b\int_o^a x(l - x)dx + a\int_v^b s^2ds + a\int_o^v s^2(t_o/t)^3ds.$$

$$EI_o\varphi_{rp}'l^2 = b\int_o^a x^2dx + a\int_v^b (l - s)sds + a\int_o^v (l - s)\,s\,(t_o/t)^3ds.$$

Kita mengadakan besaran pembantu $\alpha = a/l$, jadi $1 - \alpha = b/l$ dan mengingat bahwa $\int_o^v s^2(t_o/t)^3ds = \int_u^l (l - x)^2\,(t_o/t)^3\,dx = l^3.A$ di dalam §48 serta $\int_o^v (l - s)s(t_o/t)^3ds = \int_u^l (l - x)x(t_o/t)^3\,dx = l^3.B$ (§ 48).

$$EI_o\varphi_{lp}/l^2 = (1-\alpha)\left(\tfrac{1}{2}\alpha^2 - \tfrac{1}{3}\alpha^3\right) + \alpha\{(1-\alpha)^3 - (1-\nu)^3\} +$$
$$(\beta/m)^3\,\alpha\left\{\tfrac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-3) + lg\,\gamma\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$
$$EI_o\varphi_{rp}/l^2 = \tfrac{1}{3}(1-\alpha)\alpha^3 + \alpha\left[\tfrac{1}{2}\{(1-\alpha)^2 - (1-\nu)^2\} - \tfrac{1}{3}\{(1-\alpha)^3 -$$
$$-(1-\nu)^3\}\right] + (\beta/m)^3\,\alpha\left[\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\{(1-1/\gamma)\,m/\beta + 3 - \gamma\} - lg\,\gamma\right] \ldots. \quad (5)$$

Pendapat-pendapat ini dapat dipergunakan pada beban terbagi di atas bagian rata secara membuat $u = \alpha l$ variable dan menjalankan integrasi mulai dari $a_1 = \alpha_1 l$ sampai $a_2 = \alpha_2 l$. Pendapat-pendapat (4) dan (5) dapat terlukis sebagai $f_l(\alpha)$ dan $f_r(\alpha)$.



Gambar IV, 83

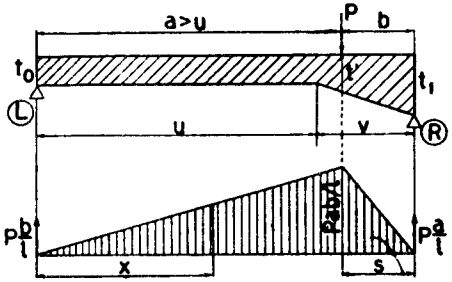
Jika beban termaksud itu merata sebesar q, maka kita menjalankan integrasi-integrasi : $q\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f_l(\alpha)d\alpha$ dan $q\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f_r(\alpha)\,d\alpha$.

Jika ordinat beban tidak tetap, misalnya q_x dan fungsi tertentu terhadap a, maka harus dimasukkan di dalam tanda integrasi, jadi

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} q_x . f_l(\alpha)\,d\alpha, \text{ dst.}$$

2. Beban P di atas perserongan.

$$EI_o\varphi'_{lp}l^2 = b\int_o^u x(l-x)dx +$$
$$b\int_u^a x(l-x)\,(t_o/t)^3dx. +$$
$$a\int_o^b s^2(t_o/t)^3\,ds.$$



Gambar IV, 84

$$EI\varphi'_{rp}l^2 = b\int_o^u x^2dx + b\int_u^a x^2(t_o/t)^3dx + a\int_o^b s(l-s)\,(t_o/t)^3ds.$$

Di tempat berdirinya P, tinggi balok $= t' = \gamma' t_o$.

$\int_u^a x(l-x)\,(t_o/t)^3dx$ serupa dengan pendapat B, § 48 hanya saja batas-batas integrasi menjadi t_o dan $t' = \gamma' t_o$, jadi:

$$\int_{t_o}^{t'} x(l-x)(t_o/t)^3dx = l^3(\beta/m)^3\left[\tfrac{1}{2}(\gamma - \gamma/\gamma')\{(m/\beta-\gamma)(1+1/\gamma'-2/\gamma)+2\}\right.$$
$$\left. - lg\,\gamma'\right]$$

Menurut penjelasan yang serupa, maka terdapat:

$$\int_o^b s^2(t_o/t)^3ds = l^3(\beta/m)^3\{\tfrac{1}{2}(\gamma/\gamma'-1)(\gamma/\gamma'-3) + lg\,\gamma/\gamma'\} \ldots\ldots\ldots (A, \S\,45)$$

$$\int_u^a x^2(t_o/t)^3dx = l^3(\beta/m)^3\left[\tfrac{1}{2}(m/\beta-\gamma)(1-1/\gamma')\{(m/\beta-\gamma)\right.$$
$$\left.(1+1/\gamma')+4\} + lg\,\gamma'\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (C, \S\,45)$$

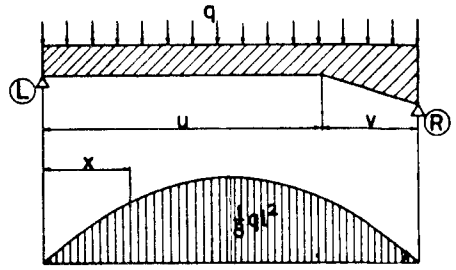
$$\int_o^b s(l-s)\,(t_o/t)^3ds = \int_a^l x(l-x)\,(t_o/t)^3\,dx = l^3(\beta/m)^3\left[\tfrac{1}{2}(\gamma/\gamma'-1)\right.$$
$$\left.\{(1/\gamma'-1/\gamma)m/\beta - (\gamma/\gamma'-3)\} - lg\,\gamma/\gamma'\right]$$

Hasil akhir menjadi:

$$EI_o\varphi'_{lp}/l^2 = (1-\alpha)\left(\tfrac{1}{2}\nu^2 - \tfrac{1}{3}\nu^3\right) + (1-\alpha)(\beta/m)^3\left[\tfrac{1}{2}(\gamma-\gamma/\gamma')\{(m/\beta-\gamma)\right.$$
$$\left.(1+1/\gamma'-2/\gamma)+2\} - lg\,\gamma'\right] + \alpha(\beta/m)^3\left[\tfrac{1}{2}(\gamma/\gamma'-1)\,(\gamma/\gamma'-3) + \right.$$
$$\left. lg\gamma/\gamma'\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4a)$$
$$EI_o\varphi'_{rp}/l^2 = \tfrac{1}{3}(1-\alpha)\nu^3 + (1-\alpha)\,(\beta/m)^3\left[\tfrac{1}{2}(m/\beta-\gamma)\,(1-1/\gamma')\{(m/\beta-\gamma)\right.$$
$$\left.(1+1/\gamma')+4\} + lg\,\gamma'\right] + \alpha(\beta/m)^3\left[\tfrac{1}{2}(1/\gamma'-1/\gamma)\,\{(\gamma/\gamma'-1)\,m/\beta -\right.$$
$$\left.\gamma(\gamma/\gamma'-3)\} - lg\,\gamma/\gamma'\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5a)$$

3. Beban merata penuh q t/m !

$$M_x^o = \tfrac{1}{2}\,q\,x(l-x)$$
$$EI_o\varphi_l^o l = \tfrac{1}{2}q\left\{\int_o^u x(l-x)^2dx + \right.$$
$$\left.\int_u^l x(l-x)^2(t_o/t)^3\,dx\right\}$$
$$EI_o\varphi_r l = \tfrac{1}{2}q\left\{\int_o^u x^2(l-x)dx + \right.$$
$$\left.\int_u^l x^2(l-x)\,(t_o/t)^3\,dx\right\}$$



Gambar IV, 85

Untuk $x > u$ terdapat (lihat § 45):

$$x(l-x)^2 = \frac{1}{m^3}\{(ml-t_1) + t\}\{(t_1^2 - 2t_1t + t^2) =$$

$$= \frac{1}{m^3}\{(ml-t_1)\,t_1^2 + (3t_1^2 - 2mlt_1)\,t + (ml-3t_1)\,t^2 + t^3\}$$

$$x^2(l-x) = \frac{1}{m^3}\{(ml-t_1) + t\}^2(t_1 - t) =$$

$$= \frac{1}{m^3}\{(ml-t_1)^2t_1 - (ml-t_1)(ml-3t_1)t + (3t_1 - 2ml)t^2 - t^3\}$$

$$\int_u^l x(l-x)^2\,(t_o/t)^3dx = (t_o^3/m^4)\int_{t_o}^{t_1}\left\{\frac{(ml-t_1)t_1^2}{t^3} + \frac{(3t_1^2-2mlt_1)}{t^2} + \frac{(ml-3t_1)}{t} + 1\right\}dt = (t_o^3/m^4)\left\{\tfrac{1}{2}(ml-t_1)t_1^2(1/t_0^2 - 1/t_1^2) + (3t_1^2 - 2mlt_1)\,(1/t_o - 1/t_1) + (ml-3t_1)\,lg\,t_1/t_o + (t_1 - t_o)\right\} = l^4\,(\beta/m)^4\left[\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\{(m/\beta-\gamma)\,(\gamma+1) + 2(3\gamma - 2m/\beta) + 2\} + (m/\beta - 3\gamma)\,lg\,\gamma\right]$$

$$\int_u^l x^2(l-x)\;(t_o/t)^3dx = (t_o^3/m^4)\int_{to}^{t_1}\left\{\frac{(ml-t_1)^2t_1}{t^3} - \frac{(ml-t_1)\,(ml-3t_1)}{t^2} + \frac{(3t_1-2ml)}{t} - 1\right\}dt = l^4(t_o^3/m^4)\left\{\tfrac{1}{2}(ml-t_1)^2t_1(1/t_o^2 - 1/t_1^2) - (ml-t_1)\,(ml-3t_1)\,(1/t_o - 1/t_1) - (t_1-t_o) + (3t_1-2ml)\,lg\,t_1/t_o\right\} = l^4(\beta/m^4)\left[\tfrac{1}{2}(1-1/\gamma)\{(m/\beta-\gamma)^2(\gamma+1) - 2(m/\beta-\gamma)\,(m/\beta-3\gamma) - 2\gamma\} + (3\gamma-2m/\beta)\,lg\,\gamma\right] = l^4(\beta/m^4)\,(\left[\tfrac{1}{2}(1-1/\gamma)\right]\,(m/\beta-\gamma)\{(\gamma-1)\,m/\beta - \gamma(\gamma-5)\} - 2\gamma\,]+ + (3\gamma - 2m/\beta)\,lg\,\gamma))$$

$$EI_o\varphi_l^o/l = \tfrac{1}{2}ql^2(\tfrac{1}{2}v - \tfrac{2}{3}v^3 + \tfrac{1}{4}v^4) + \tfrac{1}{2}\,ql^2(\beta/m)^4[\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\{(m/\beta-\gamma)(\gamma+1) + 2(3\gamma-2m/\beta) + 2\} + (m/\beta - 3\gamma)\,lg\,\gamma] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$EI_o\varphi_r^o/l = \tfrac{1}{2}ql^2\;(\tfrac{1}{3}v^3 - \tfrac{1}{4}v^4) + \tfrac{1}{2}ql^2\;(\beta/m)^4\;((\tfrac{1}{2}\;(1-1/\gamma)\;[(m/\beta-\gamma)\{(\gamma-1)\,m/\beta - \gamma(\gamma-5)\} - 2\gamma] + (3\gamma - 2m/\beta)\,lg\,\gamma)) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Contoh bilangan.

$\beta = t_o/l = 1/11$; $\gamma = t_1/t_o = 2$; $m = \tfrac{1}{4}$; $t_1 - t_o = mv$; $v = \dfrac{1}{m}(t_1 - t_o)$;

$v/l = 1 - u = \dfrac{1}{m}(\gamma-1)\,\beta = 4/11 = 0{,}363$; $u = u/l = 7/11 = 0{,}637$; $lg\,\gamma = lg\,2 = 0{,}693$; $(\beta/m)^3 = 0{,}048$; $(\beta/m)^4 = 0{,}0174$; $v^3 = 0{,}258$; $1 - \dfrac{1}{\gamma} = \tfrac{1}{2}$; $m/\beta - \gamma = \tfrac{3}{4}$.

Beban penuh merata $q\ t/m'$; balok terjepit penuh pada ujung R, terletak bebas di L.

$EI_o\varphi_r^o/l = \tfrac{1}{2}ql^2.0{,}258\;(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}.0{,}637) + \tfrac{1}{2}q^2.\;0{,}0174\;[\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}\{\tfrac{3}{4}(\tfrac{11}{4}+6) - 4\} + + (6 - \tfrac{11}{2}).0{,}693] = \tfrac{1}{2}ql^2\,(0{,}045 + 0{,}017) = 0{,}031\;ql^2$.

Untuk menghitung momen jepit M_r kita menghitung φ_{rr} menurut § 48 rumus (3).

$EI_o\varphi_{rr}/l = \tfrac{1}{3}\,v^3 + (\beta/m)^3\;[\tfrac{1}{2}(m/\beta-\gamma)(1-1/\gamma)\;\{(m/\beta-\gamma)(1+1/\gamma)+4\} + + lg\,\gamma] = \tfrac{1}{3}.0{,}258 + 0{,}048\,\{\tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{4}.\tfrac{3}{2}+4) + 0{,}693\} = .0{,}086 + 0{,}079 = 0{,}165$

$M_r = \varphi_r^o/\varphi_{rr} = \dfrac{0{,}031}{0{,}165}\,ql^2 = 0{,}188\,ql^2$ (bandingkan IV B, § 17 yang menghasilkan 0,190 ql^2, jadi beda $< 1{,}1\%$).

II. Perserongan pada dua ujung (simetris)

§ 51. Akibat momen-momen ujung (M_l dan M_r)

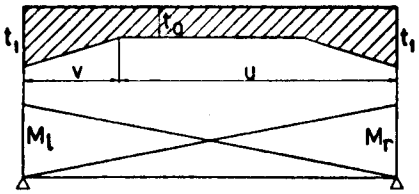
$$EI_o\varphi_{rr}l^2 = \int_o^l x^2\,(I_o/I)dx = \int_v^u x^2dx + t_o^3\int_o^v (x^2/t^3)\,dx + t_o^3\int_u^l (x^2/t^3)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{3}\,(u^3 - v^3) + l^3\,(A + C)$$

(§ 45)

$$EI_o\varphi_{lr}l^2 = EI\,\varphi_{rl}l^3 = \int_o^l x(l-x)\,(I_o/I)\,dx$$

$$= \int_v^u x(l-x)dx +$$



Gambar IV, 86

$$+ t_o^3 \int_o^v x(l-x)/t^3.\,dx + t^3 \int_u^l x(l-x)/t^3.\,dx = \tfrac{1}{2}l(u^2 - v^2) - \tfrac{1}{3}(u^3 - v^3) + 2l^3.B \text{ (§ 45).}$$

$$EI_o\varphi_{ll}/l = EI_o\varphi_{rr}/l = \tfrac{1}{3}\{v^3 - (1-v)^3\} + (\beta/m)^3\,[\tfrac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-3) + \tfrac{1}{2}(1-1/\gamma)\{(\gamma-1)m/\beta + \gamma(3-\gamma)\} + 2\,lg\,\gamma] = \tfrac{1}{3}(2v-1)(1-v+v^2) + \tfrac{1}{2}(\beta/m)^3\{(1-1/\gamma)(\gamma-1)\,m/\beta + 4\,lg\,\gamma\} \ldots. \quad (8)$$

$$EI_o\varphi_{lr}/l = EI_o\varphi_{rl}/l = \tfrac{1}{2}\{v^2 - (1-v^2)\} - \tfrac{1}{3}\{v^3 - (1-v)^3\} + (m/\beta)^3\,[(\gamma-1)\{(1-1/\gamma)m/\beta + 3 - \gamma\} - 2lg\,\gamma] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

§ 52. Akibat beban luar.

1. Beban P di atas bagian rata.

$$EI_o\varphi'_{lp}l^2 = b\int_v^a x(l-x)dx + a\int_v^b s^2ds + b\int_o^v x(l-x)\,(t_o/t)^3\,dx +$$

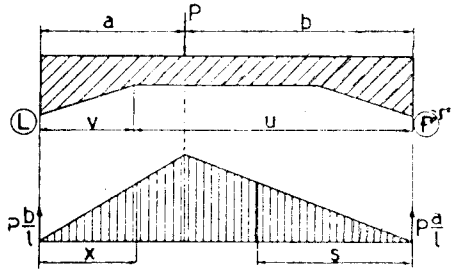
$$a\int_o^v s^2(t_o/t^3)ds = b\,\{\tfrac{1}{2}l(a^2 - v^2) - \tfrac{1}{3}a^3\} + \tfrac{1}{3}a\,(b^3 - v^3) + bl^3.B + al^3.A.$$

$$EI_o\varphi'_{rp}l^2 = b\int_v^a x^2dx +$$

$$a\int_v^b s(l-s)ds + b\int_o^v x^2(t_o/t)^3dx +$$

$$+ a\int_o^v s\{l - s(t_o/t)^3\}ds =$$

$$= \tfrac{1}{3}b(a^3 - v^3) + a\{\tfrac{1}{2}l\,b^2 - v^2) - \tfrac{1}{3}(b^3 - v^3)\} + bl^3.A + al^3.B.$$



Gambar IV, 87

$$EI_o\varphi'_{lp}/l = (1-\alpha)\,[\tfrac{1}{2}\{\alpha^2 - (1-v^2)\} - \tfrac{1}{3}\alpha^3] + \tfrac{1}{3}\alpha\,\{(1-\alpha)^3 - (1-v)^3\} + (1-\alpha)(\beta/m)^3\,[\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\{(1-1/\gamma)m/\beta + 3 - \gamma\} - lg\,\gamma] + \alpha(\beta/m)^3\,\{\tfrac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-3) + lg\,\gamma\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$EI_o\varphi'_{rp}/l = \tfrac{1}{3}(1-\alpha)\,\{\alpha^3 - (1-v)^3\} + \alpha[\tfrac{1}{2}\{(1-\alpha)^2 - (1-v)^2 - \tfrac{1}{3}\{(1-\alpha)^3 - (1-v)^3\}] + (1-\alpha)(\beta/m)^3\,\{\tfrac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-3) + lg\,\gamma\} + (1-\alpha)\,(\beta/m)^3.\,[\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\{(1-1/\gamma)\,m/\beta + 3 - \gamma\} - lg\,\gamma] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

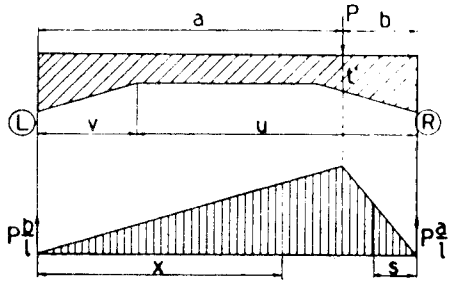
2. Beban P di atas perserongan.

$$EI_o\varphi'_{lp}l^2 = b\int_v^u x(l-x)dx +$$

$$+ b\int_o^v x(l-x)\,(t_o/t)^3dx +$$

$$+ b\int_u^a x(l-x)\,(t_o/t)^3dx +$$

$$+ a\int_o^b s^2\,(t_o/t)^3\,ds$$



Gambar IV, 88

$$EI_o\varphi'_{rp}l^2 = b\int_v^u x^2dx + b\int_o^v x^2(t_o/t)^3dx + b\int_u^a x^2(t_o/t)^3dx +$$

$$a\int_o^b s(l-s)\,(t_o/t)ds.$$

Kita dapat mempergunakan pendapat-pendapat di dalam § 49, 2

$$EI_o\varphi'_{lp}/l^2 = (1-\alpha)\,(2v-1)\,\{\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3}v\,(1-v)\} + (1-\alpha)\,(\beta/m)^3\,[\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\{(1-1/\gamma)m/\beta + (3-\gamma) - lg\,\gamma\} + (1-\alpha)\,(\beta/m)^3\,[\tfrac{1}{2}(\gamma - \gamma/\gamma')\{(m/\beta - \gamma)\,(1 + 1/\gamma' - 2/\gamma) + 2\} - lg\,\gamma'] + \alpha(\beta/m)^3\,[\tfrac{1}{2}(\gamma/\gamma' - 1)\{(\gamma/\gamma - 3) + lg\,\gamma/\gamma'] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

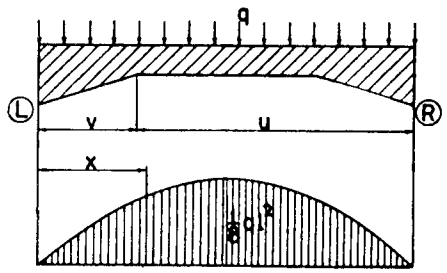
$$EI_o\varphi'_{rp}/l^2 = (1-\alpha)\tfrac{1}{3}\,(2v-1)\,\{1 - v\,(1-v)\} + (1-\alpha)\,(\beta/m)^3\,\{\tfrac{1}{2}\,(\gamma-1)(\gamma-3) + lg\,\gamma\} + (1-\alpha)\,(\beta/m)^3\,[\tfrac{1}{2}m/\beta - \gamma)\,(1-\gamma')\,\{(m/\beta - \gamma)\,(1 + 1/\gamma') + 4\} - lg\,\gamma'] + \alpha(\beta/m)^3\,[\tfrac{1}{2}(\gamma/\gamma' - 1)(1/\gamma' - 1/\gamma)\,m/\beta - (\gamma/\gamma' - 3)\} - lg\,\gamma/\gamma'] \ldots. \quad (13)$$

3. Beban penuh merata q t/m'

$$\varphi_l^o = \varphi_r^o = \int_o^{1/2l} M_x^o dx \text{ sedang}$$

$$M_x^o = \tfrac{1}{2}q\,x\,(l-x)$$

$$EI_o\varphi_l^o/l = \tfrac{1}{2}\,q\,\Big\{\int_v^{\frac{1}{2}l} x(l-x)^2dx + \int_o^v x(l-x)^2\,(t_o/t)^3dx\Big\} = \tfrac{1}{2}ql^2\,((\tfrac{1}{12} - (1-v)(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3}v) + (\beta/m)^3\,[\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\{(1-1/\gamma)\,m/\beta + (3-\gamma)\} - lg\,\gamma]))$$

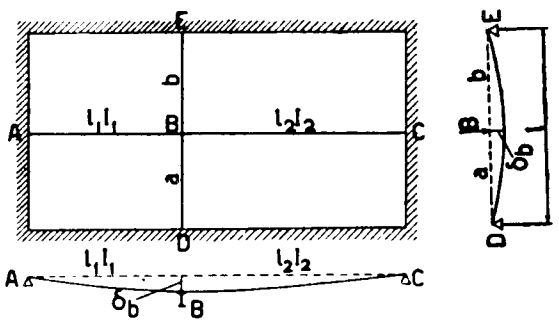


Gambar IV, 89

I. BALOK-BALOK BERSILANGAN

§ 53. Dua balok.

Balok ABC membentuk kesatuan (atau dihubungkan) dengan balok DE sehingga keduaduanya bertunggalan titik di B. Jika $ABC > DE$, maka AB dan BC boleh dianggap sebagai anak-anak-balok yang dipukul oleh ibu-balok ED di B.



Gambar IV, 90

φ°_{bl} = putaran ujung B pada balok BA akibat beban luar, apabila dipotong lepas dari BC (statis tertentu).

φ°_{br} = putaran ujung B pada balok BC akibat beban luar didalam susunan statis tertentu.

$\varphi^{\circ}_{b} = \varphi^{\circ}_{bl} + \varphi^{\circ}_{br}$

B_o = reaksi perletakan balok-balok BA dan BC di B akibat beban luar (statis tertentu).

B = reaksi perletakan di B yang sewajarnya (susunan statis tak tertentu).

δ°_{b} = lenturan titik B akibat beban luar yang bekerja langsung di atas balok DE (tidak dipengaruhi oleh balok ABC).

$\delta_b = \delta^{\circ}_{b} + B\delta_{bb}$, lenturan sewajarnya di B.

Persamaan putaran sudut di B (A dan C adalah perletakan bebas)terdapat :

$$M_b\,\varphi_{bb} = \varphi^{o}_{b} - (\delta_b/l_1 + \delta_b/l_2) = \varphi^{o}_{b} - \delta_b(1/l_1 + 1/l_2) = \varphi^{o}_{b} - (B\delta_{bb} + \delta^{o}_{b})\,(1/l_1 + 1/l_2)$$

$$\varphi_{bb} = \varphi_{bbl} + \varphi_{bbr} = l_1/3EI_1 + l_2/3EI_2;\ \delta_{bb} = a^2b^2/3EIl \quad (D \text{ dan } E \text{ bebas})$$

$$B = B_o + M_b/l_1 + M_b/l_2 = B_o + M_b(1/l_1 + 1/l_2)$$

$$M_b\,\varphi_{bb} = \varphi^{o}_{b} - [\{B_o + M_b(1/l_1 + 1/l_2)\}\,\delta_{bb} + \delta^{o}_{b}]\,(1/l_1 + 1/l_2)$$

$$M_b\{\varphi_{bb} + \delta_{bb}(1/l_1 + 1/l_2)^2\} = \varphi^{o}_{b} - (B_o\delta_{bb} + \delta^{o}_{b})\,(1/l_1 + 1/l_2)$$

$$M_b\varphi'_{bb} = (\varphi^{o}_{b})'$$

Contoh bilangan : $l_1 = l_2$; $I_1 = I_2$; $a = b = \frac{1}{2}l$.

Beban penuh merata g_1 t/m' di atas ABC dan g di atas DE.

$$\varphi_{bb} = 2l_1/3EI_1;\ \varphi^{o}_{b} = g_1l_1^3/12EI_1;\ B_o = g_1l_1$$

$$\delta^{o}_{b} = 5gl^4/384EI;\ \delta_{bb} = l^3/48EI$$

$$\varphi'_{bb}EI_1/l_1 = \tfrac{8}{3} + \tfrac{1}{12}(I_1/I)\,(l/l_1)^3$$

$$(\varphi^{o}_{b})'EI_1/l_1 = \tfrac{1}{12}\,g_1l_1^2 - \left(g_1 \cdot \frac{l^3}{48}\,\frac{I_1}{I} + \tfrac{5}{384}\,g \cdot \frac{l^4}{l_1} \cdot \frac{I_1}{I}\right) \cdot \frac{2}{l_1} =$$

$$g_1l_1^2\left\{\tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{24}\,\frac{I_1}{I}\left(\frac{l}{l_1}\right)^3 - \tfrac{5}{192}\,\frac{g}{g_1}\,\frac{I_1}{I}\left(\frac{l}{l_1}\right)^4\right\}$$

Jika B dianggap tidak turun, maka berarti $I = \infty$ dan terdapat :

$\varphi'_{bb} = \varphi_{bb}$ dan $(\varphi^{o}_{b})' = \varphi^{o}_{b}$; $M_b = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot g_1l_1^2 = \frac{1}{8}g_1l_1^2$.

§ 54. Beberapa balok.

Titik-titik diberi nomer rangkap yang angka pertamanya diurutkan: 0, 1, 2, j, k, ... dst. (gambar IV, 86).

Kita mempelajari titik potong ki.

$$M_{(k-1)j}\varphi_{kj,(k-1)j} + M_{kj}\,\varphi_{kj,\,kj} + M_{(k+1)j}\,\varphi_{kj(k+1)j} = \varphi^{o}_{kj} - \delta_{kj}(1/l_k + 1/l_{k+1}) + + \delta_{(k-1)j}/l_k + \delta_{(k+1)j}/l_{k+1}$$

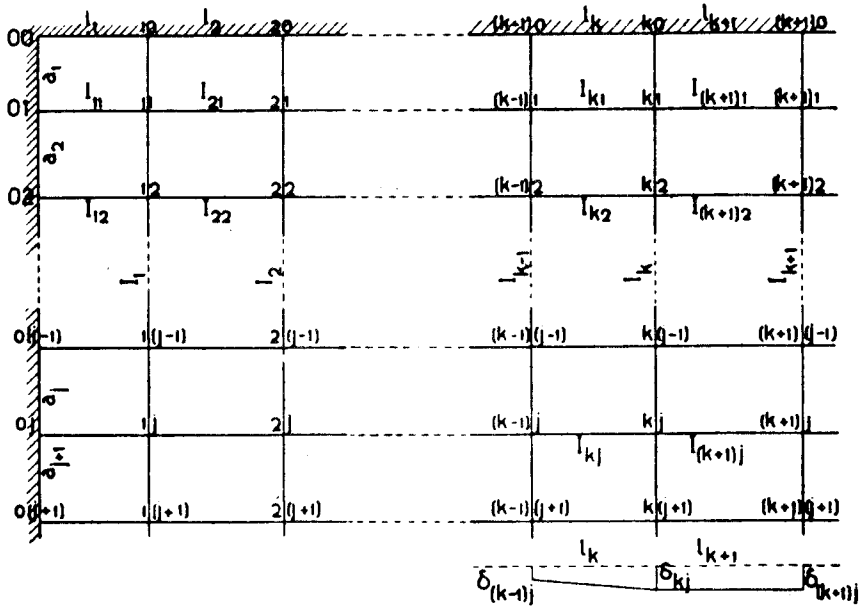
$$\delta_{kj} = \delta^{o}_{kj} + R_{kj}.\delta_{kj,kj} + R_{k_1}\delta_{kj,k_1} + \ldots . R_{k(j-1)}\delta_{kj,k(j-1)} + R_{k(j+1)}\delta_{kj,k(j+1)} + \ldots .$$

$$R_{kj} = R^{o}_{kj} + (M_{kj} - M_{(k-1)j})/l_k + (M_{kj} - M_{(k+1)j}/l_{k+1})$$

$$R_{k_1} = R^{o}_{k_1} + (M_{k_1} - M_{(k-1)})/l_k + (M_{k_1} - M_{(k+1)_1})/l_{k+1}$$

$$R_{k(j-1)} = R^{o}_{k(j-1)} + (M_{k(j-1)} - M_{(k-1)\,(j-1)})/l_k + (M_{k(j-1)} - M_{(k+1)\,(j-1)})/l_{k+1},\ \text{dst.}$$

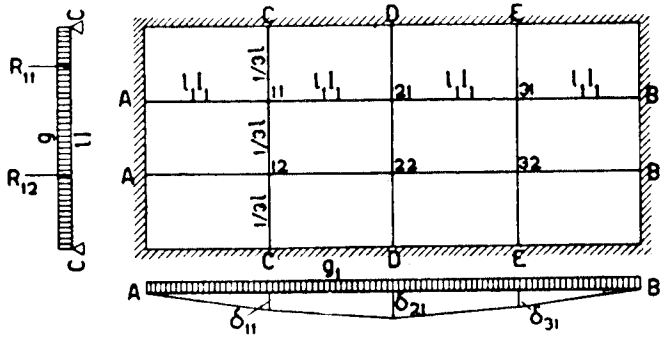
Ini berarti, bahwa besarnya lenturan-lenturan pada titik-titik persilangan (δ) dapat dinyatakan di dalam besarnya momen-momen peralihan (M).



Gambar IV, 91

Contoh (Gb. IV, 92).

Susunan dan beban adalah teratur simetrisnya.



Gambar IV, 92

$M_{11} = M_{31} = M_{12} = M_{32}$; $M_{21} = M_{22}$; $\varphi_{11,\,11} = \varphi_{21,\,21} = 2l_1/3\ EI_1$, dst.

$\varphi_{21,\,11} = \varphi_{21,\,31} = l_1/6EI_1$, dst.

$\varphi^o_{\cdot} = g_1\, l_1^3/12EI_1$ $\delta^o_{\cdot} = \frac{11}{972}\, gl^4/EI$; $\delta_{11,\,11} = \delta_{21,\,21} = \frac{4}{243}\, l^3/EI$.

$\delta_{11,\,12} = \delta_{21,\,22} = \frac{7}{486}\, l^3/EI$.

$\delta_{11,\,11} + \delta_{11,\,12} = \frac{5}{162}\, l^3/EI$. $R^o_{\cdot\cdot} = g_1 l_1$.

$$\delta_{11} = \delta^o_{11} + \left\{ g_1 l_1 + \frac{1}{l_i}(2M_{11} - M_{21}) \right\} (\delta_{11,\,11} + \delta_{11,\,12}) =$$

$$= \tfrac{11}{972}\, gl^4/EI + \tfrac{5}{162}\, g_1 l_1 l^3/EI + \tfrac{5}{81}\, M_{11} l^3/l_1 EI - \tfrac{5}{162}\, M_{21} l^3/l_1 EI.$$

$$\delta_{21} = \delta^\circ{}_{21} + \left\{ g_1 l_1 + \frac{2}{l_i}(M_{21} - M_{11}) \right\} (\delta_{21,\,21} + \delta_{21,\,22}) =$$

$$= \tfrac{11}{972}\, gl^4/EI + \tfrac{5}{162}\, g_1 l_1 l^3/EI - \tfrac{5}{81}\, M_{11} l^3/l_1 EI + \tfrac{5}{81}\, M_{21} l^3/l_1 EI.$$

$M_{11}\varphi_{11,\,11} + M_{21}\varphi_{11,\,21} = \varphi^o_{11} - 2\delta_{11}/l_1 + \delta_{21}/l_1$ ..... (1)

$2M_{11}\varphi_{21,\,11} + M_{21}\varphi_{21,\,21} = \varphi^o_{21} - 2\delta_{21}/l_1 + 2\delta_{11}/l_1$ ..... (2)

$M_{11}\varphi_{11,11} + M_{21}\varphi_{11,\,21} = \frac{1}{12}\, g_1 l_1^3/EI_1 - \frac{11}{972}\, gl^4/l_1 EI_1 - \frac{5}{162}\, g_1 l^3/EI - \frac{5}{27}\, M_{11} l^3/l_1^2 EI + \frac{10}{81}\, M_{21} l^3/l_1^2\, EI$ ..... (1)

$2M_{11}\varphi_{21,\,11} + M_{21}\varphi_{21,\,21} = \frac{1}{12}\, g_1 l_1^3/EI + \frac{20}{81}\, M_{11} l^3/l_1^2 EI - \frac{5}{27}\, M_{21} l^3/l_1^2 EI_1$ (2)

$M_{11}(\varphi_{11,\,11} + \frac{5}{27}\, l^3/l_1^2 EI) + M_{21}\,(\varphi_{11,\,21} - \frac{10}{81}\, l^3/l_1^2 EI) = \frac{1}{12}\, g_1 l_1^3/EI - \frac{5}{162}\, g_1 l^3/EI - \frac{11}{192}\, gl^4/l_1 EI$ ..... (1)

$2M_{11}(\varphi_{21,11} - \frac{20}{81}\, l^3/l_1^2 EI) + M_{21}\,(\varphi_{21,\,21} + \frac{5}{27}\, l^3/l_1^2 EI) = \frac{1}{12}\, g_1 l_1^3/EI_1$ .... (2)

$M_{11}\varphi'_{11,\,11} + M_{21}\varphi'_{11,\,21} = (\varphi^o_{11})'$ ..... (1)

$M_{11}\varphi'_{21,\,11} + M_{21}\varphi'_{21,\,21} = (\varphi^o_{21})'$ ..... (2)

$\varphi'_{11,11}\, EI_1/l_1 = \frac{2}{3} + \frac{5}{27}\,(I_1/I)\,(l/l_1)^3$ | $\varphi'_{21,\,11} EI_1/l_1 = \frac{1}{6} - \frac{20}{81}\,(I_1/I)\,(l/l_1)^3$

$\varphi_{11,21}\, EI_1/l_1 = \frac{1}{6} - \frac{10}{81}\,(I_1/I)\,(l/l_1)^3$ | $\varphi_{21,\,21} EI_1/l_1 = \frac{2}{3} + \frac{5}{27}\,(I_1/I)\,(l/l_1)^3$

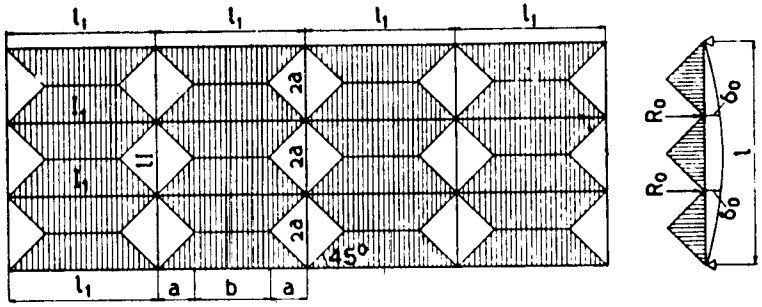
$(\varphi^o_{11})' EI_1/l_1 = \frac{1}{12}\, g_1 l_1^2 - \frac{5}{162}\, g_1 l_1^2 (I_1/I)\,(l/l_1)^3 - \frac{11}{972}\, gl_1^2\,(I_1/I)\,(l/l_1)^4 =$

$g_1 l_1^2 \{ \frac{1}{12} - \frac{5}{162}\,(I_1/I)\,(l/l_1^3) - \frac{11}{972}\,(g/g_1)\,(I_1/I)\,(l/l_1)^4 \}$

Jika titik-titik hubungan tidak turun diisi $I = \infty$

§ 55. Lanjutan.

Seringkali balok-balok itu membentuk kesatuan pula dengan lantai (pelat) yang memikul beban penuh merata sebesar $q\ t/m^2$.

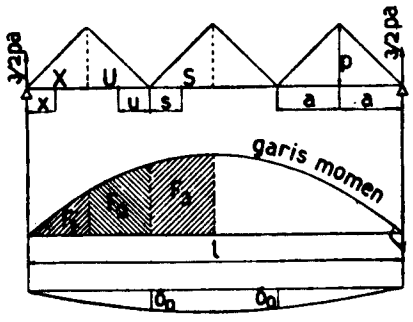


Gambar IV, 93

Pembagian beban kepada balok-balok terlihat pada gambar. Jadi anak-anak-balok menahan bidang beban yang berupa trapesium dan ibu-balok memikul secara langsung beban-beban yang bidangnya berbentuk segi-tiga, yang tinggi-nya melukiskan beban $p = 2qa(t/m')$.

$R_o = q.$ luas trapesium $= \frac{1}{2}p(2l_1 - 2a) = pa(l_1 - a_1)(t).$

Kita akan menghitung δ_o pada ibu-balok secara menganggap bidang-momen sebagai bidang muatan.



Gambar IV, 93*a*.

$$M_x = p(\tfrac{1}{4}ax - \tfrac{1}{6}x^3/a).$$

$$F_1 = \int_o^a M_x dx =$$

$$(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{24})pa^3 = \tfrac{17}{24}pa^3.$$

$$M_u = \tfrac{3}{2}pa(a+u) - \tfrac{1}{2}pa(\tfrac{1}{3}a+u) - \tfrac{1}{2}pu^2 + \tfrac{1}{6}pu^3/a =$$
$$p(\tfrac{1}{3}a^2 + au - \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{6}u^3/a).$$

$$F_2 = \int_o^a M_u du =$$

$$(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24})pa^3 = \tfrac{11}{24}pa^3.$$

$$M_s = \tfrac{3}{2}pa(2a+s) - pa(a+s) - \tfrac{1}{6}ps^3/a = p(2a^2 + \tfrac{1}{2}as - \tfrac{1}{6}s^3/a):$$

$$F_3 = \int_o^a M_s ds = (2 + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{24})pa^3 = \tfrac{53}{24}pa^3$$

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = \tfrac{37}{8}pa^3.$$

$$EI\delta_o = \tfrac{37}{8}pa^3 \cdot 2a - \int_o^a M_s dx(2a-x) - \int_o^a M_u du(a-u) = y_o - y_1 - y_2.$$

$$y_o = \tfrac{37}{4}pa^4.$$

$$y_1 = p\int_o^a (\tfrac{1}{3}a^2 + ax - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3/a)(a-x)\,dx = p\int_o^a (3a^2x - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{3}{2}ax^2 + \tfrac{1}{6}x^4/a)dx = (\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{30})pa^4 = \tfrac{19}{20}pa^4.$$

$$y_2 = p\int_o^a (\tfrac{1}{3}a^2 + au - \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{6}u^3/a)(a-u)du = p\int_o^a (\tfrac{1}{3}a^3 - \tfrac{1}{3}a^2u - \tfrac{3}{2}au^2 + \tfrac{2}{3}u^3 - \tfrac{1}{6}u^4/a)du. = (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{30})pa^4 = \tfrac{1}{5}pa^4.$$

$$EI\delta_o = y_o - y_1 - y_2 = (\tfrac{37}{4} - \tfrac{19}{20} - \tfrac{1}{5})pa^4 = \tfrac{15}{2}pa^4 = \tfrac{5}{864}pl^4.$$

Pada anak-balok terdapat :

$EI_1\varphi_{..}^{\circ} = \frac{1}{192}p(l_1 + b)(5l^2_1 - b^2)$, lihat A — § 10, g.

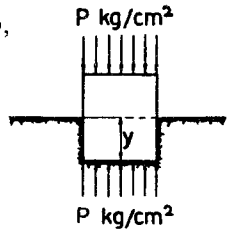
BAB V

BALOK DILETAKKAN PADA SELURUH PANJANGNYA

§ 1. Benda di atas tanah ditekan.

Muatan menekan di atas benda adalah p kg/cm^2. Tanah di bawah dasar benda turun y cm. Menurut syarat seimbang reaksi tanah juga p kg/cm^2. Di sini kita akan menganggap, bahwa turunnya tanah y itu bertanding lurus dengan tekanan pada tanah p, jadi boleh kita tulis :

$$y = \frac{1}{k} . p \quad \text{atau} \quad p = ky.$$



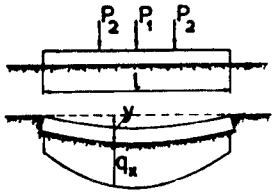
Gambar V, 1

Besaran (faktor) k disebut "ballast-koeffisien" dan berdimensi $[\frac{p}{y}] = [\frac{\text{kg/cm}^2}{\text{cm}}] = [\text{kg/cm}^3]$, atau juga berarti tekanan tanah (berapa kg/cm^2) yang dapat menurunkan (melekukkan) tanah sedalam 1 cm.

Jadi $k = 3$ kg/cm^3 umpamanya, berarti bahwa tanah akan turun (melekuk) 1 cm, jika ditekan dengan muatan 3 kg/cm^3.

§ 2. Balok di atas tanah.

Panjang balok adalah l dan lebarnya b, dan muatan simetris. Ke arah melintang (pada sesuatu tempat), reaksi tanah adalah tetap p_x kg/cm^2, ke arah membujur bertanding lurus dengan lekukan tanah y. Jadi reaksi-tanah ke arah panjang balok $q_x = bp_x$ kg/cm$' = b.ky$ kg/cm$'$ $= c.y$ kg/cm$'$.



Gambar V, 2

Dimensi c menjadi $[c] = [\text{kg/cm}^2]$.

Lekukan tanah y itu sebetulnya sama dengan lengkungan balok atau ordinat garis-lentur balok.

Kita mempelajari balok yang dimuati dengan q_x yang tak tetap nilainya dan boleh diambil : $q_x = f(x)$. Gaya-lintang pada sesuatu tampang dengan absis x adalah Q_x .

$$dQ_x = q_x dx \quad \text{atau} \quad q_x = dQ_x/dx$$

$$Q_x = dM_x/dx \quad \text{atau} \quad q_x = d^2M_x/dx^2, \quad \text{sedang} \quad q_x = c.y$$

Jadi $c.y = d^2M_x^2/dx^2$.

Persamaan garis-lentur ada:

$$M_x/EI = -d^2y/dx^2 \quad \text{atau} \quad M_x = -EI\, d^2y/dx^2 \quad \text{dan}$$

$$d^2M_x/dx^2 = -EId^4y/dx^4$$

Jadi $c.y = -EI.d^4y/dx^4$

$$d^4y/dx^4 = -\frac{c}{EI}.y = -4a^4.y \quad \text{jika} \quad \frac{c}{EI} = 4a^4$$

Jadi persamaan garis lekuk tanah : $d^4y/dx^4 = -4a^4.y$.

$$\left[\frac{c}{EI}\right] = \left[\frac{\text{kg/cm}^2}{\text{kg.cm}^2}\right] = [\text{cm}^{-4}]$$

$$[a] = \sqrt[4]{[\text{cm}^{-4}]} = [\text{cm}^{-1}] \text{ atau } [1/\text{cm}]$$

$$[1/a] = [\text{cm}]$$

Pemecahan persamaan-differensi di atas itu ialah:

$$y = C_1e^{ax}\cos ax + C_2e^{ax}\sin ax + C_3e^{-ax}\cos ax + C_4e^{-ax}\sin ax$$

$$= C_1\alpha_x + C_2\beta_x + C_3\gamma_x + C_4\delta_x$$

$$d\alpha_x/dx = ac^{ax}\cos ax - ac^{ax}\sin ax = a(\alpha_x - \beta_x)$$

$$d\beta_x/dx = ac^{ax}\sin ax + ac^{ax}\cos ax = a(\alpha_x + \beta_x)$$

$$d\gamma_x/dx = -ac^{-ax}\cos ax - a^{-ax}\sin ax = -a(\gamma_x + \delta_x)$$

$$d\delta_x/dx = -ac^{-ax}\sin ax + a^{-ax}\cos ax = a(\gamma_x - \delta_x).$$

$$d^2\alpha_x/dx^2 = -2a^2\beta_x\ ;\quad d^2\beta_x/dx^2 = 2a^2\alpha_x\ ;\quad d^2\gamma_x/dx^2 = 2a^2\delta_x\ ;$$

$$d^2\delta_x/dx^2 = -2a^2\gamma_x.$$

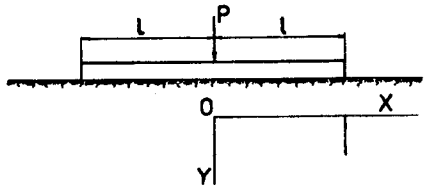
$$d^3\alpha_x/dx^3 = -2a^3(\alpha_x + \beta_x);\quad d^3\beta_x/dx^3 = 2a^3(\alpha_x - \beta_x);$$

$$d^3\gamma_x/dx^3 = 2a^3(\gamma_x - \delta_x);\quad d^3\delta_x/dx^2 = 2a^3(\gamma_x + \delta_x).$$

§ 3. Balok dimuati di tengah-tengah.

Panjang balok adalah $2l$. Kita mempelajari bagian kanan. Syarat-syarat yang harus dipenuhi :

1. Pada ujung balok dengan $x = l$, momen bernilai nol, jadi $M_{x=l} = 0$.
2. Idem, gaya-lintang sama dengan nol, $Q_{x=l} = 0$.
3. Di tengah-tengah balok ($x = 0$), gaya-lintang ada $-\frac{1}{2}P$ besarnya, $Q_{x=0} = -\frac{1}{2}P$.



Gambar V, 3

4. Idem, garis-singgung pada garis-lentur balok berjalan mendatar (sebab keadaan simetris, jadi $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=o} = 0$.

$$dy/dx = a\{(C_1 + C_2)\alpha_x + (C_2 - C_1)\beta_x + (C_4 - C_3)\gamma_x - (C_4 + C_3)\delta_x\}$$

$$M_x = -(d^2y/dx^2).EI = -2a^2EI(C_2\alpha_x - C_1\beta_x - C_4\gamma_x + C_3\delta_x)$$

$$Q_x = dM_x/dx = -EId^3y/dx^3 =$$

$$= -2a^3EI\{(C_2 - C_1)\alpha_x - (C_1 + C_2)\beta_x + (C_3 + C_4)\gamma_x + (C_4 - C_3)\delta_x\}$$

Faktor-faktor C dapat diperoleh berdasarkan atas 4 sarat-sarat di atas:

1. $C_2\alpha_l - C_1\beta_l - C_4\gamma_l + C_3\delta_l = 0$ (jika $\alpha_l = \alpha_{x=l}$; $\beta_l = \beta_{x=l}$ dst.)
2. $(C_2 - C_1)\alpha_l - (C_1 + C_2)\beta_l + (C_3 + C_4)\gamma_l + (C_4 - C_3)\delta_l = 0$
3. $-2a^3EI\{(C_2 - C_1) + (C_3 + C_4)\} = -\frac{1}{2}P$ (sebab $\alpha_o = \alpha_{x=o} = 1$ $\gamma_o = \gamma_{x=o} = 1$; $\beta_o = \delta_o = 0$)
4. $(C_1 + C_2) + (C_4 - C_3) = 0$

Contoh: $2l = 1{,}50$m, jadi $l = 75$ cm; lebar balok $b = 25$ cm; tinggi balok $h = 15$ cm.

$$E = 10^5 \text{ kg/cm}^2; \quad EI = 10^5 \cdot \tfrac{1}{12} \cdot 25.15^3 \text{ kg/cm}^2 \approx 7.10^8 \text{ kg/cm}^2$$

$$k = 5 \text{ kg/cm}^3; \quad c = bk = 125 \text{ kg/cm}^2$$

$$4a^4 = c/EI = \frac{125}{7.10^8} \text{ cm}^{-4}; \quad a = \frac{1}{68{,}8 \text{ cm}}; \quad al = \frac{78}{68{,}8} \approx 1{,}090$$

$$\alpha_l = e^{al}\cos al = 1{,}375; \quad \beta_l = e^{al}\sin al = 2{,}637$$

$$\gamma_l = e^{-al}\cos al = 0{,}155; \quad \delta_l = e^{-al}\sin al = 0{,}298$$

1. $-2{,}637C_1 + 1{,}375C_2 + 0{,}298C_3 - 0{,}155C_4 = 0$
2. $-4{,}012C_1 - 1{,}262C_2 - 0{,}143C_3 + 0{,}453C_4 = 0$
3. $-C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = P/4a^3EI = Pa/c$ (sebab $c = 4a^4EI$)
4. $C_1 + C_2 - C_3 + C_4 = 0$.

$C_1 = 0{,}07Pa/2c$; $C_2 = 0{,}01Pa/2c$; $C_3 = 1.07Pa/2c$; $C_4 = 0{,}99Pa/2c$.
Jadi $[C] = [\text{cm}]$

$$a/2c = \frac{1/68{,}8 \text{ (cm}^{-1})}{2.125 \text{ (kg/cm}^{-1})} = 0{,}000058 \text{ cm/kg} = 0{,}058 \text{ cm/ton}$$

Kekuatan P diukur dengan *ton* :
$C_1 = 0{,}004P$ cm; $C_2 = 0{,}001P$ cm; $C_3 = 0{,}062P$ cm; $C_4 = 0{,}057P$ cm.
Maximum y terdapat di tengah-tengah balok, dengan $x = 0$.

$$y_{max} = y_o = C_1 + C_3 = 0{,}066P \text{ (cm)}$$

$$M_{max} = M_o = -EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=o} = 2a^2EI(C_4 - C_2) = 2a^2EI.0{,}98Pa/2c =$$

$$= 0{,}98P.\frac{EIa^4}{ac} = 0{,}98.\frac{1/4c}{ac} = 0{,}245P/a = 0{,}245.68{,}8P \text{ tcm} =$$

$$= 16{,}8P \text{ tcm} = 0{,}168P \text{ tm}$$

§ 4. Ujung balok tak boleh terangkat ke atas.

Supaya ujung balok tak akan terangkat, maka $y_l = y_{x=l} \geqslant o$. Jadi jika ujung ini di dalam keadaan extrem, sehingga $y_l = o$, harus dipenuhi kepada persamaan :

$C_1\alpha_l + C_2\beta_l + C_3\gamma_l + C_4\delta_l = 0$, di mana sekarang l tak terketahui.

Kemudian persamaan ini ditambah kepada persamaan-persamaan di dalam § 3 tadi dan sebagai hasil akan terdapat :

$\cos al = 0$; $al = \frac{1}{2}\pi$; $l = \pi/2a$; $\alpha_l = \gamma_l = 0$; $\beta_l = e^{\frac{1}{2}\pi}$; $\delta_l = e^{-\frac{1}{2}\pi}$

$$C_1 = -C_2 = Pa/2c(e^{2al} - 1) = Pa/2c(e^{\pi} - 1)$$

$$C_3 = C_4 = Pa/2c(1 - e^{-2al}) = Pa/2c(1 - e^{-\pi})$$

Persamaan garis-lentur menjadi :

$$y = \frac{P_a}{2c(e^{\pi} - 1)}(e^{ax}\cos ax - e^{ax}\sin ax + e^{\pi - ax}\cos ax + e^{\pi - ax}\sin ax)$$

$$y_o = y_{max} = \frac{P_a e^{\pi} + 1}{2ce^{\pi} - 1} = P.\frac{\pi}{4lc}\coth.\frac{\pi}{2} = 0{,}86P/lc$$

$$M_o = M_{max} = -2a^2EI(C_2 - C_4) = \frac{Pl}{2\pi}\coth.\frac{\pi}{2} = 0{,}175Pl \text{ atau}$$

$$= -2a^2EI(C_2 - C_4) = -2a^2EI\,C_1(1 - e^{\pi}) =$$
$$= \frac{a^3EI(e^{\pi} - 1)}{c(e^{\pi} - 1)} = \tfrac{1}{4}P/a$$

Menurut contoh di atas dengan $a = \frac{1}{68{,}8\,\text{cm}}$ atau $\frac{1}{a} = 68{,}8$ cm menjadi : $l \leqslant \pi/2a = \pi.\frac{68{,}8}{2}$ cm $= 1.08$ m.

Apabila kekakuan balok itu tak terbatas, jadi $EI = \sim$, maka $a = 0$ dan muatan P menjadi terbagi rata di sepanjang balok dan dengan begitu tekanan tanah, $q = \frac{P}{2l}$ dan $y = q/c = \frac{P}{2lc}$.

Panjang balok boleh diambil $\sim$ (tak terhingga).

§ 5. Balok sepanjang 2 l = ~ dibebani dengan P di tengah-tengah (gb. V,4).

a) Perjalanan garis-lenturnya.

$y = C_1\alpha_x + C_2\beta_x + C_3\gamma_x + C_4\delta_x$.

$x = l = \sim$; $\gamma_x = \delta_x = 0$

$M_x = -EId^2y/dx^2 = 0$; $-C_1\beta_l + C_2\alpha_l = 0$ . . . . . (1).

$Q_x = -EId^3y/dx^3 = 0$; $-C_1 + (\alpha_l + \beta_l) + C_2(\gamma_l - \delta_l) = 0$ . . (2).

Kesimpulan : $C_1 = C_2 = 0$.

Jadi $y = C_3\gamma_x + C_4\delta_x$.

Pada $x = o$ (di tempat P terdapat) :

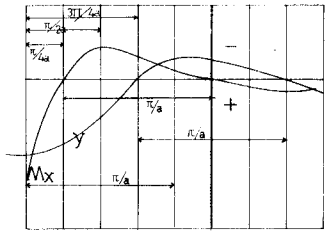
$dy/dx = 0$; $-C_3(\gamma_o + \delta_o) + C_4(\gamma_o - \delta_o) = 0$;

$\gamma_o = 1$ dan $\delta_o = 0$, berarti $C_3 = C_4 = K$

$Q_x = -EId^3y/dx^3 = \frac{1}{2}P$

$d^3y/dx^3 = P/2EI$

$2a^3K(\gamma_o - \delta_o + \gamma_o + \delta_o) = P/2EI$



Gambar, V, 4*a,b*.

$4a^3K = P/2EI$; $K = P/8a^3EI = P_a/2\,c$, sebab $c/EI = 4a^4$ atau $a^3EI = c/4a$.

Jadi $y = (Pa/2c)(\gamma_x + \delta_x) = (Pa/2c)e^{-ax}(\cos ax + \sin ax) = P/8a^3EI(\gamma_x + \delta_x)$.

$y_{max} = y_{x=0} = Pa/2c$ (gb. a.)

b) **Garis momen**

$M_x = -EId^2y/dx^2 = (P/4a)e^{-ax}(\cos ax - \sin ax)$.

$Q_x = dM_x/dx = (P/2a) = -\frac{1}{2}Pe^{-ax}\cos ax = -\frac{1}{2}P\gamma_x$.

$M^{+}_{max} = M_{x=0} = P/4a$

Supaya $M_x = 0$, $\cos ax - \sin ax = 0$; $\operatorname{tg} ax = 1$; $ax = \frac{1}{4}\pi + k\pi$;

$x = \pi/4a + k\pi/a$ (ke kanan dan ke kiri).

Supaya M_x extrem, $dM_x/dx = Q_x = 0$; $\gamma_x = e^{-ax}\cos ax = 0$;

$ax = \frac{1}{2}\pi + k\pi$; $x = \pi/2a + k\pi/a$ (ke kanan/kiri).

M_x^- extrem pertama terdapat pada $ax = \pi/2$.

$M_x = -(P/4a)e^{-\pi/2}$ (gb. *b*)

c) **Garis-pengaruh M_a** (gb. *bc*).

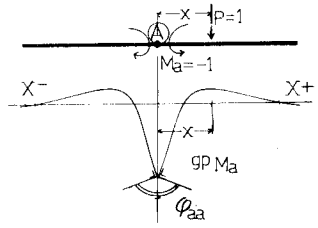
Kita menggunakan hukum timbal-balik *Maxwell*.

$M_a\varphi_{aa} = P\varphi'_{ap} = P\delta'_{pa}$

δ'_{pa} = ordinat-lentur sebagai akibat dari $M_a = 1$

Kita mengadakan sendi di A dan mengerjakan $M_a = -1$ pada ujung-ujung kanan-kirinya.

Seperti halnya di dalam ayat *a* di atas, terdapat pada $x = l = \sim$ bahwa :



Gambar V, 4*c*

$M_x = Q_x = 0$, jadi lagi $C_1 = C_2 = 0$;

$y = C_3\gamma_x + C_4\delta_x$.

$d^2y/dx^2 = 2a^2(C_3\gamma_x - C_4\delta_x) = 2a^2c^{-ax}(C_3\sin ax - C_4\cos ax)$.

$x = 0$, $d^2y/dx^2 = -2a^2C_4 = -M_{x=0}/EI = l/EI$

Jadi $C_4 = -1/2a^2EI$.

Pada $x = 0$ terdapat juga $Q_x = -EId^3y/dx^3 = 0$.

$2a^3 C_3(\gamma_o - \delta_o) + C_4(\gamma_o + \delta_o) = 0$, sedang $\gamma_o = 1$ dan $\delta_o = 0$.

$C_3 = -C_4 = 1/2a^2EI$

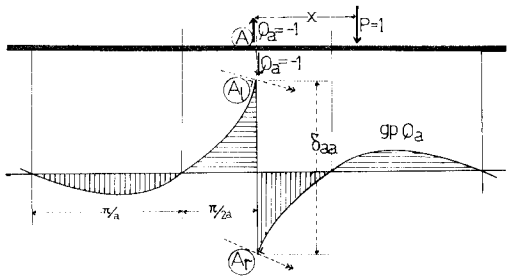
$y = \delta'_{pa}/\varphi_{aa} = e^{-ax}(\cos ax - \sin ax)/2a^3EI.$

$\varphi_{aa} = 2(dy/dx)_{x=0} = 2a\{-C_3(\gamma_o + \delta_o) + C_4(\gamma_o - \delta_o)\} = 2/aEI.$

$M_a = P.\delta'_{pa}/\varphi_{aa} = (P/4a)(\cos ax - \sin ax)$ identik dengan pendapat M_x didalam *ayat b.*

d) **Garis-pengaruh gaya lintang Q_a** (gb.d)

Kita menghapuskan kemungkinan bekerjanya gaya lintang Q_a di A secara memotong balok di situ dan kemudian mengerjakan gayalintang $Q_a = -1$ di situ, tetapi berusaha supaya ujung-ujung pemisahnya tidak berputar sudut terhadap satu sama lain, jadi garis-garis singgung pada garis-lenturnya sejajar pada satu sama lain. Terdapat lagi $y = \delta_{pa} = C_3\gamma_x + C_4\delta_x$.



Gambar V, 4*d*.

$M_a = M_{x=o} = 0$; $(d^2y/dx^2)_{x=o} = 2a^2(C_3\gamma_o - C_4\delta_o) = 0$; $C_4 = 0$.

$y = C_3\gamma_x = C_3 e^{-ax}\cos ax.$

$Q_a = Q_{x=o} = -1$; $-EId^3y/dx^3 = -EI2a^3 C_3\gamma_o = -1$; $C_3 = 1/2a^3EI = a/2c.$

$y = \delta_{pa} = (a/2c)e^{-ax}\cos ax.$

$\delta_{aa} = 2y_a = 2y_{x=o} = a/c$

$Q_a = P\delta_{pa}/\delta_{aa} = P.\ \frac{1}{2}e^{-ax}\cos ax.$

$x = 0$, $Q_a = \frac{1}{2}P.$ (beban P masih ada di kanannya A).

Di dalam hitungan *ayat b* terdapat $Q_x = dM_x/dx = -\frac{1}{2}P.e^{-ax}\cos ax.$

e) Usaha supaya balok *tak terangkat* secara membebaninya penuh merata q.

Kita mempelajari *soal a* dengan $y = (Pa/2c)e^{-ax}(\cos ax - \sin ax)$.

y extrem terdapat pada $dy/dx = 0$ yang mendapatkan $\sin ax = 0$, $ax = k\pi$.

Pada $k = 0$, y menjadi extrem positif.

Pada $k = 1$, atau $ax = \pi$ terdapat y extrem negatif (terbesar), yaitu $y = -Pae^{-\pi}/2c$.

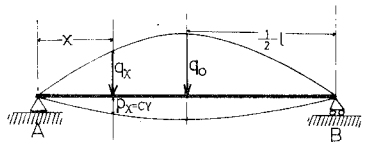
Untuk menghapuskannya diperlukan beban $q = -c$; $y = Pe^{-\pi}a/2c = Pa/2ce^{\pi}$ (t/m^1).

(soal-soal ujian T.H. Bandung).

§ 6. **Balok $AB = l$ dengan EI tetap di atas tanah dan di atas dua perletakan bebas.** (gb. V, 5).

Beban penuh simetris dengan ordinat $q_x = q_o \sin \pi x/1$.

Menghitung persamaan-persamaan garis-lentur (y), garis-momen (M_x) dan gaya lintang (Q_x). Kemudian reaksi-reaksi perletakkannya.



Gambar V, 5.

Reaksi-tanah setempat $= p_x$ sedang absis x diukur dari A.

$Q_x = -EId^3y/dx^3.$

$dQ_x = p_x dx - q_x dx = (cy - q_o \sin k\pi/l)\,dx.$

$dQ_x/dx = cy - q_x = -EId^4y/dx^4.$

$d^4y/dx^4 = -cy/EI + q_x/EI = -4a^4y + q_x/EI.$

$y = C_1\alpha_x + C_2\beta_x + C_3\gamma_x + C_4\delta_x + z = u + z.$

$y = u$ jika $z = 0$.

Kita tulis $z = K \sin \pi x/l = (K/qo)\,qx$

$d^4z/dx^4 = (\pi^4/l^4)K \sin \pi x/l = z\pi^4/l^4$

Kemudian z harus memenuhi sarat :

$d^4z/dx^4 = -4a^4z + q_x/EI$

$z\pi^4/l^4 = -4a^4z + q_x/EI$

$$z = \frac{q_x}{EI(\pi^4/l^4 + 4a^4)} = \frac{q_o \sin \pi x/l}{EI(\pi^4/l^4 + 4a^4)} = K \sin \pi x/l.$$

$$K = \frac{q_o l^4}{EI(\pi^4 + 4a^4l^4)} \text{ (cm).}$$

$y = C_1\alpha_x + C_2\beta_x + C_3\gamma_x + C_4\delta_x + K \sin \pi x/l.$

Sarat-sarat yang masih harus dipenuhi ialah :

1). $x = 0,\ y = 0;\ C_1\alpha_o + C_2\beta_o + C_3\gamma_o + C_4\delta_o + 0 = 0.$

2). $x = l,\ y = 0;\ C_1\alpha_l + C_2\beta_l + C_3\gamma_l + C_4\delta_l + 0 = 0.$

3). $x = l/2,\ dy/dx = 0;\ (C_1 + C_2)\alpha_{l/2} + (C_2 - C_1)\beta_{l/2} + (C_4 - C_3)\gamma_{l/2} + + (C_3 + C_4)\delta_{l/2} + 0 = 0.$

4). $x = 0,\ M_x = 0,\ d^2y/dx^2 = 0;\ -C_1\alpha_o + C_2\beta_o + C_3\gamma_o + C_4\delta_o + 0 = 0.$

Semua anggauta kanan bernilai nol, berarti $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0.$

$$y = z = \frac{q_o l^4 \sin \pi x/l}{EI(\pi^4 + 4a^4 l^4)} = (K/q_o)qx;\ p_x = cy = cKq_x/q_o = cK \sin \pi x/l.$$

$$M_x = -EI\, d^2y/dx^2 = \frac{q_o l^2 \pi^2 \sin \pi x/l}{\pi^4 + 4a^4 l^4}$$

$$Q_x = dM_x/dx = \frac{q_o l\ \pi^3 \cos \pi x/l}{\pi^4 + 4a^4 l^4}$$

Reaksi-reaksi perletakan.

$$A = Q_{x=o} = \frac{q_o l\, \pi^3}{\pi^4 + 4a^4 l^4} = B.$$

Atau dengan jalan lain :

$$A = \tfrac{1}{2}\int_o^l (q_x - p_x)\,dx = \tfrac{1}{2}(q_o - cK)\int_o^l \sin \pi x/l.dx = (q_o - cK)\frac{l}{\pi} =$$

$$= q_o \cdot \frac{l}{\pi}\left(1 - \frac{4a^4 l^4}{\pi^4 + 4a^4 l^4}\right) = q_o \frac{l\pi^3}{\pi^4 - 4a^4 l^4}$$

Sekarang perletakan A dibuat jepitan, dan B hapus

1). $x = 0,\ y = 0.$ 3). $x = l,\ M_x = 0;\ d^2y/dx^2 = 0.$

2). $x = 0,\ dy/dx = 0.$ 4). $x = l,\ Q_x = 0;\ d^3y/dx^3 = 0.$

Jika perletakan B tetap ada (sebagai rol) :

1). $x = 0;\ y = 0$ 3). $x = l,\ y = 0.$

2). $x = 0;\ dy/dx = 0$ 4). $x = l,\ M_x = 0;\ d^2y/dx^2 = 0.$

Apabila beban $q_x = q$ tetap, maka dapat ditulis sebagai deret Fourier menjadi :

$$q_x = (4q/\pi)(\sin \pi x/l + \tfrac{1}{3}\sin 3\pi x/l + \tfrac{1}{5}\sin 5\pi x/l + \tfrac{1}{7}\sin 7\pi/l + \ldots)$$

Ini supaya dapat didifferensi ke X.

(Soal-soal ujian T.H. Bandung).

§ 7. Muatan tidak di tengah-tengah.

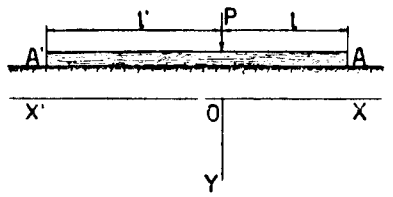
Garis-lentur balok terdiri dari dua bagian, yaitu bagian OA dan bagian OA'.

Persamaan bagian OA :

$$y = C_1\alpha_x + C_2\beta_x + C_3\gamma_x + C_4\delta_x$$

Idem bagian OA':

$$y' = C_1'\alpha_{x'} + C_2'\beta_{x'} + C_3'\gamma_{x'} + C_4'\delta_{x'}$$



Gambar V, 6.

Jadi sekarang terdapat ada delapan besaran C yang belum terketahui dengan delapan sarat-sarat pula.

1. $M_l = M_a = o$ atau $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=l} = o$; momen di ujung A pada $x = l$ bernilai nol.

2. $Q_l = Q_a = o$ atau $\left(\frac{d^3y}{dx^2}\right)_{x=l} = o$; kekuatan gaya-lintang di ujung A sama dengan nol.

3. $M_{l'} = M_{a'} = o$ atau $\left\{\frac{(d^2y')}{(dx')^2}\right\}_{x'=l'} = o$; bandingkan dengan (1)

4. $Q_{l'} = Q_{a'} = o$ atau $\left\{\frac{(d^3y')}{(dx')^3}\right\}_{x'=l'} = o$; bandingkan dengan

5. $y_o = y_0'$ (kedua-dua garis-lentur bertunggalan ordinat di titik 0)

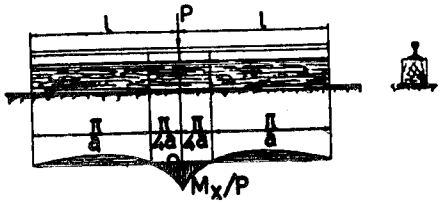
6. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=o} = \left(\frac{dy'}{dx'}\right)_{x'=o}$ (idem idem garis-singgung di 0)

7. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=o} = \left\{\frac{(d^2y')}{(dx')^2}\right\}_{x'=o}$ (idem idem momen di 0)

8. $-EI\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=o} = +\left\{EI\frac{(d^3y')}{(dx')^3}\right\}_{x'=o} - P$ (kekuatan-melintang di kanan O = idem di kiri O minus P).

§ 8. Rail di atas bantalan-membujur (gmb. V, 7).

Jika al tak begitu kecil nilainya, maka suku-suku yang mengandung $\gamma_l = e^{-al}\cos al$ dan $\delta_l = e^{-al}\sin al$ boleh diabaikan.



Gambar V, 7.

Dengan begitu terdapatlah:

$$C_1 = o;\ C_2 = o$$
$$C_3 = C_4 = P/8a^3EI = Pa/2c$$
$$y = \frac{Pa}{2c}\,(e^{-ax}\cos ax + e^{-ax}\sin ax);\ y_o = Pa/2c$$

$y = o$ jika $\cos ax + \sin ax = o$, jadi $ax = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$, d.s.t. atau $ax = (\frac{3}{4} + k)\pi$.

$$M_x = \frac{P}{4a}(e^{-ax}\cos ax - e^{-ax}\sin ax)$$
$$M_o = P/4a$$

$M_x = o$ untuk $ax = (\frac{1}{4} + k)\pi$, jadi $x = (\frac{1}{4} + k).\pi/a$

Persamaan garis $\frac{M_x}{P}$ menjadi:

$$y = \frac{1}{4a}(e^{-ax}\cos ax - e^{-ax}\sin ax)$$

Garis ini boleh dipergunakan sebagai garis-pengaruh momen pada sesuatu titik O.

Ordinat di tempat O ini ada $\frac{1}{4a}.(m')$

Besaran EI diambil jumlah $(EI)_{rail}$ dan $(EI)_{bantalan}$ jadi $EI = (EI)_r + (EI)_b$.

Contoh: $(EI)_r = 300\,\text{tm}^2$; $(EI)_b = 200\ \text{tm}^2$; $EI = (300 + 200)\ \text{tm}^2 = 500\ \text{tm}^2$. Lebar bantalan $b = 30\,\text{cm}$; $k = 5\ \text{kg/cm}^3$, $c = bk = 150\ \text{kg/cm}^2 = 1500\ \text{t/m}^2$.

$$\frac{1}{a} = \sqrt[4]{4EI/c} = \sqrt[4]{\frac{5.500}{1500}}\,m^4 = 1{,}075\ m'$$

$l = \frac{1}{2} \times 12\,m = 6m$; $al = \frac{6}{1{,}075} = 5{,}6$. Muatan P diukur dengan ton.

$$M_o = P/4a = 0{,}269P\,(\text{tm})$$
$$y_o = Pa/2c \sim \tfrac{1}{1600}P\,(m') = \tfrac{1}{16}P\,(\text{cm})$$

§ 9. Rail di atas bantalan-bantalan melintang.

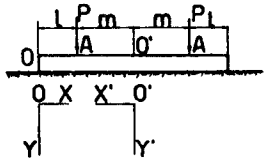
Jarak antara bantalan-bantalan satu sama lain adalah tetap, $\lambda(m')$. Muatan P menurunkan bantalan sejauh $\delta = P\,\delta_{oo}(m')$. Nilai δ_{oo} terdapat menurut percobaan, yaitu turunnya bantalan yang disebabkan oleh muatan satu ton.

Gambar V, 8.

$q = P/\lambda = c\delta = cP\delta_{oo}$; jadi $c = 1/\lambda\delta_{oo}(\text{t/m}^2)$

$1/c = \lambda\delta_{oo}(\text{m}^2/\text{t})$; $\frac{1}{a} = \sqrt[4]{4EI/c} = \sqrt[4]{4EI\lambda\delta_{oo}(\text{m}^4)}$

§ 10. Bantalan-melintang.



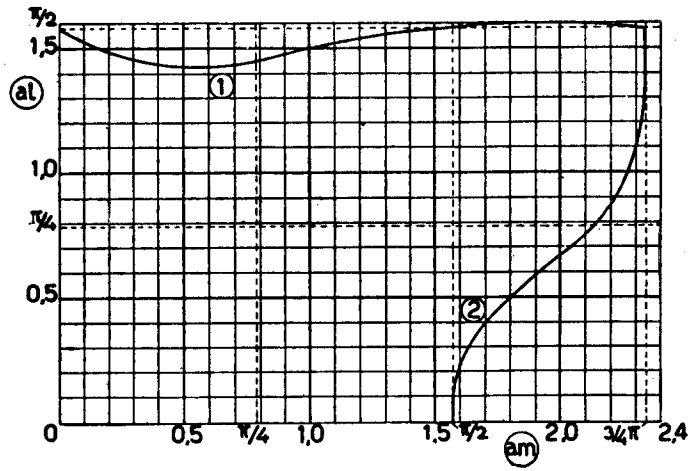
Gambar V, 9

Muatan dianggap simetris. Garis-lentur terdiri dari dua pasang cabang yang simetris terhadap satu sama lain.

Cabang OA: $y = C_1\alpha_x + C_2\beta_x + C_3\gamma_x + C_4\delta_x$.

Cabang $O'A$: $y' = C_1'\alpha_{x'} + C_2'\beta_{x'} + C_3'\gamma_{x'} + C_4'\delta_{x'}$.

Di sini juga ada delapan sarat seperti § 5.



Gambar V, 10.

$x = o$ { 1) $d^2y/dx^2 = o$ (sarat momen); $C_2 - C_4 = o$
2) $d^3y/dx^3 = o$ (sarat kekuatan melintang), $C_2 - C_1 + C_3 + C_4 = o$.

$x' = o$ { 3) $dy'/dx' = o$ (garis-singgung ada mendatar $C_1' + C_2' + C_4' - C_3' = o$.
4) $d^3y'/(dx')^3 = o$ (kekuatan melintang) $C_2' - C_1' + C_3' + C_4' = o$.

$x = l$
$x' = m$ {
5) $y = y'$ (bertunggalan ordinat)
6) $dy/dx = -dy'/dx'$ (idem garis-singgung)
7) $d^2y/dx^2 = d^2y'/(dx')^2$ (idem momen)
8) $-EId^3y/dx^3 - P = +EId^3y'/(dx')^3$ (tentang kekuatan melintang dari kiri kanan A).

Supaya ujung balok tak boleh terangkat, maka l tak boleh besar terhadap m.

Saratnya ialah, bahwa $y_o = y_{x=o} \geq o$. Ini menghasilkan persamaan :

$$\frac{\cos al}{e^{al} + e^{-al}} + \frac{\cos(al + 2am)}{e^{al + 2am} + e^{-(al + 2am)}} = o.$$

yang dilukiskan dengan garis 1 pada gambar V, 10 dengan am sebagai absis, dan al sebagai ordinat. Ordinat kurva ini kita sebut y_1.

Jadi untuk memenuhi sarat tersebut harus terdapat: $al \leqslant y_1$. Ini berlaku untuk titik-titik yang terletak di bawah garis 1 tadi.

Kemudian ada sarat pula, bahwa titik tengah balok O' tak boleh terangkat juga, jadi $y_o' \geqslant o$.

$$\frac{\sin am - \cos am}{\cos am + \sin am} = \frac{e^{2al + am} + e^{am}(\cos al - \sin al)^2 + 2e^{-am}\cos^2 al}{e^{-(2al + am)} + e^{-am}(\cos al + \sin al)^2 + 2e^{am}\cos^2 al}$$

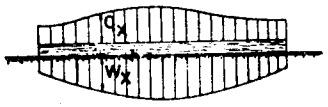
Persamaan ini dilukiskan dengan kurva 2 dengan ordinat y_2. Pada sarat ini dipenuhi jika $al \geqslant y_2$ (jadi ruangan di atas garis 2).

Setelah am ditentukan, maka untuk memenuhi pada kedua-dua sarat tadi, harus tercapai: $y_2 < al < y_1$.

§ 11. Muatan-terbagi.

Ordinat muatan di atas balok, yaitu q_x tidak tetap.

Ordinat reaksi-tanah $= w_x = c.y$.



Gambar V, 11.

$$dQ_x = w_x dx - q_x dx$$

$$\frac{dQ_x}{dx} = w_x - q_x = -\frac{d^4EIy}{dx^4}$$

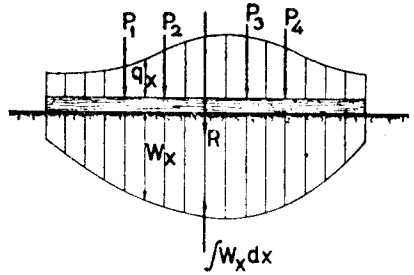
$$cy - q_x = -\frac{d^4EIy}{dx^4}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -4a^4y + \frac{q_x}{EI}$$

§ 12. Cara grafis.

Di atas balok berdirilah beberapa muatan terpusat P dan muatan terbagi dengan ordinat q_x. Kita menghitung resultanta semua muatan di atas balok ini, ialah $R = \Sigma P + \int q_x dx$, serta letak garis-kerjanya dengan poligon-batang + gambar kutub).

Bidang reaksi-tanah kita tentukan sementara, dengan sarat, bahwa garis-beratnya bersatu-padu dengan garis-kerja R tadi, serta $\int w_x dx = R$; sedang $w_x =$ ordinat reaksi-tanah.



Gambar V, 12.

Setelah ini, kita dapat menggambar garis-momen pada balok sebagai akibat dari muatan-luar dan reaksi tanah. Bidang-momen ini dipakai sebagai muatan (EI dianggap tetap), dan dengan begitu kita menggambar poligon-batangnya, yang melukiskan garis-lentur balok dengan ordinat $= y$.

Ketentuan bidang reaksi-tanah tadi itu betul apabila terdapat bahwa $w_x = c.y$ atau bertanding lurus dengan y. Ini dapat terlihat apakah bentuk garis w_x itu sebangun dengan garis-lentur itu.

Apabila maksud ini belum tercapai, maka garis y ini dianggap sebagai garis w_x dan mengulangi lagi pekerjaan tadi sehingga terdapat w_x bertanding lurus dengan y yang ditimbulkan olehnya.

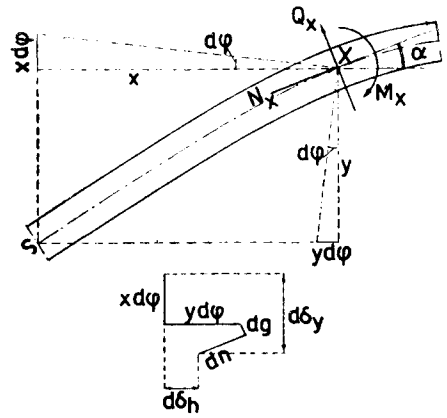
BAB VI

BUSUR ATAU PELENGKUNG STATIS TAK TERTENTU

A. PERALIHAN TEMPAT

§ 1. Cara menyelidikinya.

Di dalam mempelajari robahan bentuk pada bangunan pelengkung, dianggap bahwa tebalnya amat kecil dibandingkan dengan radius serta bentangnya. Berhubung dengan ini rumus-rumus robahan bentuk untuk balok berlaku juga dan boleh dipakai dengan begitu saja.



Gambar VI, 1.

Kita menyelidiki robahan tempat pada sesuatu tampang S terhadap tampang lainnya X di mana bekerja M_x, N_x dan Q_x (gambar VI, 1) yang ketiga-tiganya dianggap bekerja positif (kekuatan-normal dianggap *positif* jika *menekan*). Jarak-mendatar antara S dan X adalah x dan jaraknya vertikal adalah y. Komponen peralihan mendatar disebut *positif* jika arahnya *ke luar*, komponen peralihan vertikal dianggap *positif* apabila arahnya *ke atas* dan putaran-sudut itu *positif* apabila arahnya seperti putaran-jarum-jam (ke kanan).

M_x menimbulkan putaran sudut $d\varphi = M_x ds/EI$, N_x menyebabkan perpandakan $dn = N_x ds/EF$ dan Q_x mengakibatkan geseran $dg = Q_x ds/GF'$; besaran-besaran I dan F dianggap variabel.

Jika tampang X ini dipegang teguh, tampang S akan beralih terhadap X yang disebabkan oleh $d\varphi$, dn dan dg tadi.

Komponen-mendatar peralihan tempat ini, $d\delta_h = y d\varphi - dn \cos \alpha + dg \sin \alpha$.

$$d\delta_h = M_x y ds/EI - N_x ds \cos \alpha/EF + Q_x ds \sin \alpha/GF' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Komponen-vertikal terdapat: $d\delta_v = x d\varphi + dn \sin x + dg \cos \alpha$.

$$d\delta_v = M_x x ds/EI + N_x ds \sin \alpha/EF + Q_x ds \cos \alpha/GF' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

$$d\varphi = M_x ds/EI$$

Peralihan tempat dan putaran sudut tampang S seperti terdapat di atas ini hanya akibat dari deformasi-deformasi pada tampang X saja.

Jadi sebagai akibat dari robahan-bentuk pada seluruh bangunan akan terdapat :

$$\delta_h = \int d\delta_h = \int M_x y ds/EI - \int N_x ds \cos \alpha/EF + \int Q_x ds \sin \alpha/GF' \ldots (1)$$

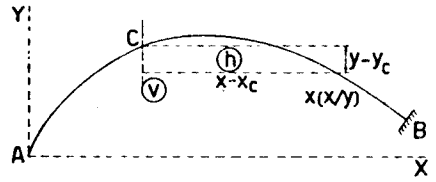
$$\delta_v = \int d\delta_v = \int M_x x ds/EI + \int N_x ds \sin \alpha/EF + \int Q_x ds \cos \alpha/GF' \ldots (2)$$

$$\varphi = \int d\varphi = \int M_x ds/EI \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

§ 2. Penyederhanaan.

Pada umumnya, akibat deformasi yang berasal dari tekanan (N_x) dan geseran (Q_x) boleh diabaikan, jadi hanya memperhitung robahan-bentuk dari lenturan (M_x).

Busur seperti tergambar di gambar VI, 2 terjepit sebelah di B.



Gambar VI, 2

Peralihan-tempat tampang C menjadi :

$\delta_{hc} = \int_C^B M_x(y - y_c) ds/EI$ = statis-momen bagian bidang $\frac{M_x}{EI}$ di sebelah kanan C terhadap garis mendatar yang melalui C (garis h).

$\delta_{vc} = \int_C^B M_x(x - x_c) ds/EI$ = idem idem terhadap garis vertikal v yang melalui C.

$\varphi_c = \int_C^B M_x ds/EI$ = luas bagian bidang $\frac{M_x}{EI}$ di sebelah kanan C.

Sekarang peralihan tampang di ujung A, sedang titik-asal susunan koordinat kita bersatu padukan dengan A sendiri.

$\delta_{ha} = \int M_x y ds/EI$ = statis-momen bidang $\frac{M_x}{EI}$ terhadap sumbu X.

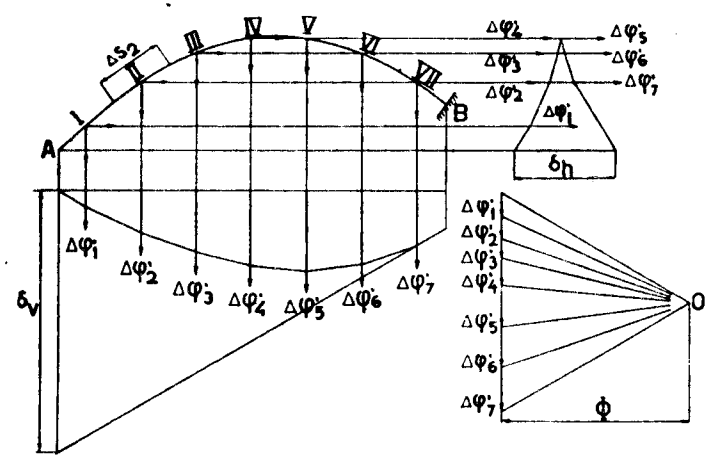
$\delta_{va} = \int M_x x ds/EI$ = statis-momen bidang $\frac{M_x}{EI}$ terhadap sumbu Y.

$\varphi_a = \int M_x ds/EI$ = luas bidang $\frac{M_x}{EI}$

§ 3. Cara grafis.

Ini dipergunakan untuk menghindari hitungan-integral, jika ini amat sukar penglaksanaannya. Hal ini terjadi apabila EI tak tetap nilainya. Sebagai pendekatan, busur dibagi-bagikan di dalam bagian-bagian yang kecil (unsur-unsur) sepanjang Δs.

Besaran-besaran $d\varphi$ dipusatkan di tengah-tengah unsur ini sehingga terdapat $\Delta\varphi = \int_{\Delta S} d\varphi \infty M_x \Delta s/EI$. Nilai-nilai M_x, x dan y diambil di tampang tengah elemen.



Gambar VI, 3

Lebih mudah jika kita melipatkan besaran $\Delta\varphi$ itu dengan faktor EI_o di mana I_o adalah momen-inersia pada sesuatu tampang (misalnya di puncak atau di salah satu pangkal). Dengan begitu kita mencapai besaran $\Delta\varphi' = EI_o\Delta\varphi = M_x \Delta s. I_o/I$. Hasil yang nanti kita capai itu harus dikalikan dengan faktor $\frac{1}{EI_o}$ Kemudian besaran-besaran $\Delta\varphi'$ dianggap sebagai muatan vertikal dan mendatar. Dengan perantaraan gambar-kutub kita menggambar poligon batangan. Ordinat-ordinat pada poligon-poligon-batang ini melukiskan $EI_o \times$ peralihan-tempat pada sesuatu tampang, yaitu komponen-vertikal terdapat pada poligon-batang jika $\Delta\varphi'$ dianggap sebagai muatan vertikal dan komponen mendatar terdapat pada poligon-batang jika $\Delta\varphi'$ dianggap sebagai muatan mendatar. Sisi-sisi pada poligon-batang disebut terakhir ini, digambar $\perp$ terhadap radius-radius-kutub.

Jadi pada gambar VI, 3 dapat terbaca:

$\Phi\delta_v' = EI_o \times$ peralihan-vertikal titik $A = EI_o\delta_v$

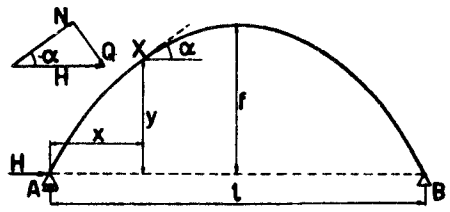
$\Phi\delta_h' = EI_o \times$ peralihan-mendatar titik $A = EI_o\delta_h$

$\varphi' = \Delta\varphi_1' + \Delta\varphi_2' + \ldots . \Delta\varphi_7' = \Sigma\Delta\varphi' = EI_o \times$ putaran sudut tampang $A = EI_o\varphi_o$.

B. BUSUR DENGAN DUA SENDI

§ 4. Dengan faktor pengaruh-luar.

Bangunan adalah statis tak tertentu tunggal dengan reaksi-sendi mendatar H sebagai gaya statis kelebihan. Apabila sendi atau skarnir A diganti dengan perletakan rol, maka bangunan menjadi statis-tertentu (melenyapkan reaksi H). Untuk memulihkan keadaan, kita mengadakan kekuatan mendatar H pada rol ini.



Gambar VI, 4

Perletakan rol ini hanya dapat beralih mendatar saja, dengan arti positif jika arahnya ke luar (di sini ke kiri), dan reaksi H berkewajiban supaya titik A tak akan berpindah. Jadi H

ini bernilai positif jika arah kerjanya ke dalam (mencegah peralihan rol ke luar).

Kekuatan H ini menimbulkan di sesuatu tampang X dengan koordinat x/y: momen (negatif) sebesar $-H.y$ dengan putaran sudut $-Hyds/EI$, kekuatan normal menekan (positif) sebesar $H \cos \alpha$ dengan perpandakan $H \cos \alpha\, ds/EF$, kekuatan melintang (negatif untuk bagian kiri) sebesar $-H \sin \alpha$ dengan geseran $H \sin \alpha.ds/GF'$. Ketiga-tiga gaya ini berkehendak memindah rol A sejauh:

$$d\delta_h = -Hy.ds/EI - (H \cos \alpha.ds/EF) \cos \alpha - (H \sin \alpha.ds/GF') \sin \alpha$$
$$= -H(y^2 ds/EI + \cos^2 \alpha ds/EF + \sin^2 \alpha ds/GF')$$
$$\delta_h = \int ds_h = -H.(\int y^2 ds/EI + \int \cos^2 \alpha.ds/EF + \int \sin^2 \alpha.ds/GF')$$
$$\delta_h = -H.\delta_{hh}$$

Tanda *minus* menunjukkan hasrat peralihan *ke dalam*, jadi searah dengan arah kerjanya H. Ini berarti, δ_h itu positif jika diukur menurut arah kerjanya H.

$$\delta_{hh} = \int y^2 ds/EI + \int \cos^2 \alpha.ds/EF + \int \sin^2 \alpha.ds/GF'$$

Sekarang kita mempelajari akibat muatan luar terhadap peralihan tempat pada rol A. Muatan luar ini menimbulkan di sesuatu tampang X, gaya-gaya momen M_x°, kekuatan-normal N_x° dan kekuatan-melintang O_x° (yaitu di dalam susunan statis-tertentu). Ketiga-tiga gaya ini berkehendak memindah rol A sejauh:

$$d\delta_h^\circ = M_x^\circ y ds/EI - N_x^\circ \cos \alpha.ds/EF + Q_x^\circ \sin \alpha.ds/GF'$$

Akibat dari gaya-gaya-tampang pada seluruh bangunan menjadi.

$$\delta_h^\circ = \int d\delta_h^\circ = \int M_x^\circ y ds/EI - \int N_x^\circ \cos \alpha.ds/EF + Q_x^\circ \sin \alpha.ds/GF'$$

Supaya rol A tidak beralih maka diharuskan supaya:

$$\delta_h^\circ + \delta_o = o$$
$$\delta_h^\circ - H\delta_{hh} = o$$
$$H = \delta_h^\circ/\delta_{hh} = \frac{\int M_x^\circ y ds/EI - \int N_x^\circ \cos \alpha.ds/EF + \int Q_x^\circ \sin \alpha.ds/GF'}{\int y^2 ds/EI + \int \cos^2 \alpha.ds/EF + \int \sin^2 \alpha.ds/GF'}$$

§ 5. Dengan faktor pengaruh-dalam.

Untuk menghitung faktor-faktor pengaruh dalam: α, kita mengadakan pada rol A tersebut di atas suatu kekuatan = 1 *keluar* (jadi berlawanan arah-kerja H), atau boleh dikatakan mengadakan kekuatan $H = -1$ di tempat rol A itu.

$\alpha_m = y$ (faktor pengaruh terhadap momen)

$\alpha_n = -\cos \alpha$ (faktor pengaruh terhadap kekuatan-normal)

$\alpha_q = \sin \alpha$ (faktor pengaruh terhadap kekuatan-melintang), yang bernilai negatif untuk bagian busur sebelah kanan puncak.

Menurut apa yang telah terdapat dulu tentang besaran gaya statis kelebihan (lihat bab II § 11), kita dengan segera dapat menentukan:

$$H = \frac{\int \alpha_m M_x^\circ ds/EI + \int \alpha_n N_x^\circ ds/EF + \int \alpha_q Q_x^\circ ds/GF'}{\int \alpha_m^2 ds/EI + \int \alpha_n^2 ds/EF + \int \alpha_q^2 ds/GF'}$$
$$H = \frac{\int M_x^\circ y ds/EI - \int N_x^\circ \cos \alpha.ds/EF + \int Q_x^\circ \sin \alpha.ds/GF'y}{\int y^2 ds/EI + \int \cos^2 \alpha.ds/EF + \int \sin^2 \alpha.ds/GF'}$$

§ 6. Dengan hukum Castigliano.

Sebagai akibat dari muatan luar dan reaksi H terdapat:

$$M_x = M_x^\circ - Hy$$
$$N_x = N_x^\circ + H \cos \alpha$$

$Q_x = Q_x^\circ - H \sin \alpha$ (sin α itu negatif di sebelah kanan puncak busur).

Pekerjaan deformasi:

$$U = \int M_x^2 \frac{ds}{2EI} + \int N_x^2 \frac{ds}{2EF} + \int Q_x^2 \frac{ds}{2GF'}$$
$$dU/dH = o$$
$$\int M_x \frac{dM_x}{dH} \frac{ds}{EI} + \int N_x \frac{dH_x}{dH} \frac{ds}{EF} + \int Q_x \frac{dQ_x}{dH} \frac{ds}{GF'} = o$$
$$dM_x/dH = -y;\ dN_x/dH = \cos \alpha;\ dQ_x/dH = -\sin \alpha$$
$$-\int (M_x^\circ - Hy)y \frac{ds}{EI} + \int (N_x^\circ + H \cos \alpha) \cos \alpha \frac{ds}{EF} - \int (Q_x^\circ - H \sin \alpha) \sin \alpha \frac{ds}{GF'} = o$$
$$H\left(\int y^2 \frac{ds}{EI} + \int \cos^2 \alpha \frac{ds}{EF} + \int \sin^2 \alpha \frac{ds}{GF'}\right) =$$

$$= \int M_x^o y \frac{ds}{EI} - \int N_x^o \cos\alpha \frac{ds}{EF} + \int Q_x^o \sin\alpha \frac{ds}{GF'}$$

$$H = \frac{\int M_x^o y ds/EI - \int N_x^o \cos\alpha\, ds/EF + \int Q_x^o \sin\alpha\, ds/GF'}{\int y^2 ds/EI + \int \cos^2\alpha\, ds/EF + \int \sin^2\alpha\, ds/GF'}$$

§ 7. Secara langsung.

Kita juga boleh bekerja secara langsung dengan menentukan bahwa titik A tak boleh beralih, jadi:

$$\int M_x y ds/EI - \int N_x ds/EF \cos\alpha + \int Q_x ds/GF' \sin\alpha = o$$

$$\int (M_x^o - Hy) y ds/EI - \int (N_x^o + H\cos\alpha) \int \frac{ds}{EF} \cos\alpha +$$

$$+ \int (Q_x^o - H\sin\alpha) \frac{ds}{GF'} \sin\alpha = o$$

$$-H(\int y^2 ds/EI + \int \cos^2\alpha\, ds/EF + \int \sin^2\alpha\, ds/GF') +$$

$$+ \int M_x^o y ds/EI - \int N_x^o \cos\alpha\, ds/EF + \int Q_x^o \sin\alpha\, ds/GF' = o$$

$$H(\int y^2 ds/EI + \int \cos^2 a ds/EF + \int \sin^2 ds/GF') =$$

$$= \int M_x^o y ds/EI - \int N_x^o \cos\alpha ds/EF + \int Q_x^o \sin\alpha ds/GF'$$

§ 8. Penyederhanaan.

Kita mengabaikan : akibat dari segala *geseran* (jadi yang berasal dari H dan muatan luar) dan akibat dari tekanan yang berasal dari muatan-luar; jadi tekanan dari H diperhitungkan juga. Ini dibolehkan, oleh karena pekerjaan deformasi berasal dari lengkungan (momen) itu terpenting atau lebih dari pada pekerjaan deformasi berasal dari tekanan dan geseran.

$$H = \frac{\int M_x^o y ds/EI}{\int y^2 ds/EI + \int \cos^2\alpha\, ds/EF}$$

Dengan memasukkan faktor $\mu = \dfrac{\int \cos^2\alpha ds/EF}{\int y^2 ds/EI}$ menjadi:

$$H = \frac{\int M_x^o y ds/EI}{(1+\mu)\int y^2 ds/EI} = \left(1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right) \frac{\int M_x^o y ds/EI}{\int y^2 ds/EI} \backsim (1-\mu) \frac{\int M_x^o y ds/EI}{\int y^2 ds/EI}$$

Mengabaikan akibat tekanan berasal dari H berarti mengabaikan faktor μ, yang biasanya amat kecil terhadap $1 (\mu \ll 1)$.

Sebagai contoh kita ambil busur parabol dengan ukuran-tampang tetap (jadi EI tetap). Persamaan sumbu busur dengan titik A sebagai pusat susunan XY : $y = x(l-x)4f/l^2$. Selanjutnya dianggap $ds \backsim dx$.

$$\int y^2 ds \backsim \int y^2 dx = 16\frac{f^2}{l^4}\int (lx - x^2)^2 dx = 16\frac{f^2}{l^4}\int (l^2x^2 - 2x^3 + x^4) dx =$$

$$= 16\frac{f^2}{l^4}\left[\tfrac{1}{3}l^2x^3 - \tfrac{1}{2}lx^4 + \tfrac{1}{5}x^5\right]_o^l = \tfrac{8}{15}lf^2$$

$$\int \cos^2\alpha ds = \int \cos\alpha dx \backsim \int dx = l$$

Lebih saksama lagi jika mengisi $ds = dx\sqrt{1+(dy/dx)^2} \simeq dx\{1 + \frac{1}{2}(dy/dx)^2\}$, jadi $\int y^2 ds = \int y^2 dx + \frac{1}{2}\int y^2 (dy/dx)^2 dx$ sedang $dy/dx = (l-2x)\,4f/l^2$. Sebagai hasil terdapat:

$$\mu = \frac{\int \cos^2\alpha ds/EF}{\int y^2 ds/EI} = \frac{I}{F}\frac{\int \cos^2\alpha\, ds}{\int y^2 ds} \backsim \frac{I}{F}\cdot\frac{l}{\frac{8}{15}lf^2} = \frac{15}{8}\frac{I}{F}\frac{1}{f^2} \quad \frac{\frac{8}{15}(1 + \frac{8}{7}f^2/l^2)\,lf^2}{}$$

dan dengan $I/F = i^2$ menjadi:

$$\mu \backsim \left(\frac{i}{f}\right)^2 \cdot \frac{15}{8}.$$

Jika tampang-busur berbangun persegi dengan ukuran $b.h$, maka

$$I = \tfrac{1}{12}bh^3 \quad \text{dan} \quad F = bh, \quad \text{jadi} \quad i^2 = \tfrac{1}{12}h^2, \quad \text{dan}$$

$$\mu \backsim \tfrac{15}{8}\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\frac{h^2}{f^2} = \tfrac{5}{32}\left(\frac{h}{f}\right)^2$$

Jika pendapat ini kita dapat menarik kesimpulan, bahwa makin kecil tebal busur (h) dan makin besar tinggi panahnya (f), makin kecil nilai μ, yang berarti makin kurang pengaruh tekanan dan semakin diperbolehkan mengabaikannya ($\mu \sim o$).

Apabila EI tak tetap nilainya, besaran-besaran ini dikalikan dengan faktor tetap EI_o di mana I_o berarti momen-inersia di sesuatu tampang (misalnya puncak atau pangkal).

$$H = \frac{\int M_x^o . y(I_o/I).ds}{(1+\mu)\int y^2 (I_o/I) ds} = \frac{\delta_h^{o\prime}}{\delta_h'}$$

Jadi $\delta_{hh}' = EI_o\delta_{hh}$ dan $\delta_h^{o\prime} = EI_o\delta_h^o$.

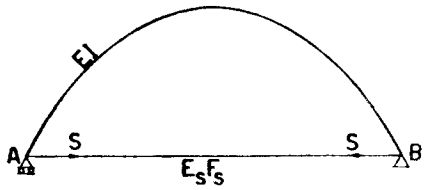
$$\mu = \frac{\int \cos^2 \alpha (I_o/F)ds}{\int y^2 (I_o/I)ds} = \frac{I_o/F_o \int \cos^2 \alpha (F_o/F)ds}{\int y^2 (I_o/I)ds} = i_o^2 \frac{\int \cos^2 \alpha (F_o/F)ds}{\int y^2 (I_o/I)ds}$$

F_o berarti luas tampang di mana $I = I_o$.

Dengan begitu kita bekerja dengan besaran-besaran $\frac{I_o}{I}$ dan $\frac{F_o}{F}$ yang berarti perbandingan, jadi tidak berdimensi, hal mana memudahkan pekerjaan menghitung.

§ 9. Pelengkung dengan batang-tarik.

Di sini salah satu perletakan adalah sendi dan yang lainnya rol. Batang-tarik ini mencegah bergeraknya rol ini. Jika batang ini dipotong (melenyapkan kemungkinan bekerjanya reaksi batang-tarik S ini), susunan menjadi statis tertentu. Sebagai akibat dari muatan-luar, rol akan beralih keluar sejauh δ_h^o. Reaksi batang-tarik S memperpanjang batang ini dengan $\Delta l = Sl/E_sF_s$.



Gambar VI, 5

Jadi sebagai akibat dari muatan-luar dan reaksi S ini, rol akan beralih keluar (positif) sejauh:

$$\Delta l = Sl/E_sF_s$$
$$\delta_h^o - S\delta_{hh} = Sl/E_sF_s$$

Di sini arti δ_{hh} seperti termaksud di dalam § 4, yaitu:

$$\int y^2 ds/EI + \int \cos^2 \alpha ds/EF + \int \sin^2 \alpha ds/GF'$$
$$S(\delta_{hh} + l/E_sF_s) = \delta_h^o$$
$$S\delta_{ss} = \delta_h^o$$
$$\delta_{ss} = \delta_{hh} + l/E_sF_s = \int y^2 ds/EI + \int \cos^2 \alpha ds/EF + \int \sin^2 \alpha ds/GF' + l/E_sF_s$$
$$\delta_h^o = \int M_x^o y ds/EI - \int N_x^o \cos \alpha ds/EF + \int Q_x^o \sin \alpha ds/GF'$$
$$S = \frac{\delta_h^o}{\delta_{ss}} = \frac{\int M_x^o y ds/EI - \int N_x^o \cos \alpha \, ds/EF + \int Q_x^o \sin \alpha ds/GF'}{\int y^2 ds/EI + \int \cos^2 \alpha \, ds/EF + \int \sin^2 \alpha \, ds/GF' + l/E_sF_s}$$

Di dalam mempergunakan hukum Castigliano, kita menentukan:

$$dU/dS = Sl/E_sF_s$$

Setelah mengadakan penyederhanaan seperti di atas, menjadi:

$$S = \frac{\int M_x^o y(I_o/I)ds}{(1+\mu) \int y^2 (I_o/I)ds + l(E/E_s)(I_o/F_s)} =$$
$$= \frac{\int M_x^o y(I_o/I)ds}{(1+\mu) \int y^2 (I_o/I)ds + i_o^2 l (E/E_s)(F_o/E_s)} = \frac{\delta_h^{o\prime}}{\delta_{ss}'}$$

§ 10. Derajat-panas.

Panas seluruh busur naik $t^\circ C$. Jika salah satu sendi diganti dengan rol, maka rol ini akan beralih keluar sejauh $\delta_{ht} = t.\gamma.l$.

Untuk menghalang-halangi ini, diperlukan reaksi-mendatar H, sehingga $H_t\delta_{hh} = \delta_{ht}$.

$$H_t = \delta_{ht}/\delta_{hh} = \frac{t.\gamma.l}{(1+\mu) \int y^2 ds/EI} = \frac{t.\gamma.EI}{(1+\mu) \int y^2 (I_o/I) ds}$$

Nilai H ini positif apabila derajat-panas naik, dan negatif jika sebaliknya.

Akibat dari sudut disamakan dengan akibat turun derajat-panas, jadi susut itu menimbulkan H yang negatif (bekerja keluar).

Pada busur dengan batang-tarik, naik-turun derajat panas tak menimbulkan extra-reaksi oleh, karena batang-tarik ini dapat mengikuti bergeraknya rol.

Sekarang derajat-panas tepi-bawah t_b tak sama dengan derajat-panas tepi-atas t_a, dan boleh dianggap bahwa perjalanan beda derajat-panas itu, lurus. Jadi $\Delta t = t_b - t_a$, telah terdapat dulu (bab IV, § 5):

$d\varphi = \gamma.\Delta t.\, ds/h$ jika h = tebal busur.

$$(\delta_h)_{\Delta t} = \int y d\varphi = \gamma . \Delta t \int \frac{y}{h} ds$$

$$H_{\Delta t} = \frac{(\delta_h)_{\Delta t}}{\delta_{hh}} = \frac{\gamma . \Delta t . \int (y/h) ds}{(1+\mu) \int y^2 ds/EI} = \frac{EI_o . \gamma . \Delta t \int y(h_o/h) ds}{(1+\mu) h_o \int y^2 (I_o/I) ds}$$

Pendapat ini bernilai positif, jika Δt positif atau $t_b > t_a$, jadi tepi bawah lebih panas dari pada tepi-atas.

§ 11. Salah setelan (penyelenggaraan).

Ketika menyelenggarakan jarak antara kedua-dua titik-sendi (diukur mendatar) tidak mencocoki rencana, sehingga bentang bangunan yang sebelulnya l menjadi $l' = l - \Delta l$. Jika $l' < l$ atau $\Delta l > o$, kita memaksa salah satu sendi beralih ke dalam (positif) dan untuk ini memerlukan kekuatan-sendi mendatar $H_{\Delta l}$ sehingga $H_{\Delta l}\delta_{hh} = \Delta l$.

$$H_{\Delta l} = \frac{\Delta l}{\delta_{hh}} = \frac{\Delta l}{(1+\mu)\int y^2 ds/EI} = \frac{EI_o\Delta l}{(1+\mu)\int y^2(I_o/I)ds}$$ (positif atau kedalam arah kerjanya.

Sebaliknya jika $l' > l$ atau Δl itu *negatif*, akan terdapat H yang negatif.

$$H_{\Delta l} = -\frac{EI_o\Delta l}{(1+\mu)\int y^2(I_o/I)ds}$$

Pendapat-pendapat di atas: H_t, $H_{\Delta t}$ dan $H_{\Delta l}$ harus dijumlahkan secara aljabat kepada pendapat H sebagai akibat dari muatan luar.

§ 12. Beberapa contoh.

1. **Pelengkung parabol**, simetris dengan I variabel.

$$\delta'_{hh} = (1+\mu)\int y^2 ds/EI$$

Muatan penuh terbagi rata q.

$$M^o_x = \tfrac{1}{2}qlx - \tfrac{1}{2}qx^2 = \tfrac{1}{2}qx(l-x), \text{ sedang } y = x(l-x).\,4\frac{f}{l^2}$$

$$M^o_x = \tfrac{1}{8}q\frac{l^2}{f}\cdot y$$

$$\delta^o_h = \int M^o_x y\, ds/EI = \int M^o_x y\,.\,ds/EI = \tfrac{1}{8}q\frac{l^2}{f}\int y^2 ds/EI$$

$$H = \frac{\delta^o_h}{\delta_{hh}} = \frac{(\frac{1}{8}ql^2/f)\int y^2 ds/EI}{(1+\mu)\int y^2 ds/EI} = \frac{1}{(1+\mu)}\tfrac{1}{8}ql^2/f$$

Jika poligon-batang digambar sehingga bersatu padu dengan sumbu-busur maka lengan-kutub $H' = \frac{1}{8}q\frac{l^2}{f} = (1+\mu)H$

$$H = \frac{H'}{1+\mu} = \left(1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right)H' \text{ ∽ } (1-\mu)H'$$

Jika akibat dari tekanan diabaikan (yaitu $\mu = o$), ini berarti bahwa poligon-batang identik dengan garis-tekan dan di mana-mana momen sama dengan nol ($H = H'$). Ini sesuai pula dengan hukum pekerjaan minimum (jika hanya pekerjaan deformasi dari momen yang diperhitung).

Apabila akibat tekanan diperhitung, kita mengadakan koreksi pada pendapat reaksi-sendi mendatar sebesar

$$\Delta H = -\frac{\mu}{1+\mu}H' = -\frac{\mu}{1+\mu}\cdot\tfrac{1}{8}q\frac{l^2}{f}$$

Koreksi ini menimbulkan momen

$$\Delta M_x = -\Delta H\,.\,y = +\frac{\mu}{1+\mu}\cdot\tfrac{1}{8}q\frac{l^2}{f}y$$

yang kemudian menimbulkan tegangan-tegangan sekonder $\sigma = \pm\,\Delta H.y/W$, dengan W = momen-perlawanan.

Akibat beda derajat-panas tepi-bawah dan tepi-atas, Δt.

$$H_{\Delta t} = \frac{EI_o\gamma\,.\,\Delta t\,.\int y(h_o/h)ds}{(1+\mu)h_o\int y^2(I_o/I)ds}\ (\S\ 10)$$

Jika tampang busur berbangun persegi dengan ukuran $b.\,h$, dan $I = I_o \sec\alpha$, maka :

$$I_o = \tfrac{1}{12}bh_o^3,\ I = \tfrac{1}{12}bh^3;\ \frac{I_o}{I} = \left(\frac{h_o}{h}\right)^3 = \cos\alpha;\ \frac{h_o}{h} = \sqrt[3]{\cos\alpha}$$

$$\frac{h_o}{h}ds = \sqrt[3]{\cos\alpha}\,.\,\frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dx}{\sqrt[3]{\cos^2\alpha}} \text{ ∽ } dx$$

$$\int y\frac{h_o}{h}ds \text{ ∽ } \int y dx = 4\frac{f}{l^2}\int_o^l x(l-x)dx = 4\frac{f}{l^2}\cdot\tfrac{1}{6}l^3 = \tfrac{2}{3}lf$$

$$\int y^2\frac{I_o}{I}ds = \int y^2 dx = \tfrac{8}{15}lf^2\ (\S\ 8)$$

$$H_{\Delta t} = \frac{E\,.\,\frac{1}{12}bh_o^3\,.\,\gamma\,.\,\Delta t\,.\,\frac{1}{2}lf}{(1+\mu)h_o\,.\,\frac{8}{15}lf^2} = \frac{5}{48(1+\mu)}\cdot\frac{b}{f}\,.\,h_o^2\,.\,E\,.\,\gamma\,.\,\Delta t =$$

$$= \frac{5}{48(1+\mu)}\cdot\frac{h_o}{f}\,.\,\gamma\,.\,\Delta t\,.\,EF_o$$

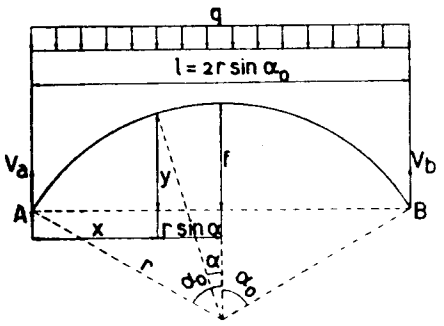
Nilai ini berkurang, jika f bertambah dan bertambah jika tebal serta luas-tampang busur bertambah, jadi makin kecil ukuran tampang busur terhadap tinggi bangunan (f), makin kecil akibat beda-panas ini.

Salah setellan Δl mengakibatkan :

$$H_{\Delta l} = \frac{EI_o \cdot \Delta l}{(1+\mu)\int y^2(I_o/I)ds} = \frac{EF_o i_o^2 \cdot \Delta l}{(1+\mu)\cdot \frac{8}{15} lf^2} = \frac{15}{8(1+\mu)} \cdot \frac{\Delta l}{f} \cdot \left(\frac{i_o}{f}\right)^2 \cdot EF_o$$

Kenaikan derajat panas sebanyak $t°C$ di seluruh bangunan, menimbulkan :

$$H_t = \frac{t \cdot \gamma \cdot l \cdot EI_o}{(1+\mu)\frac{8}{15} lf^2} = \frac{15}{8(1+\mu)} \cdot t \cdot \gamma \cdot \left(\frac{i_o}{f}\right)^2 \cdot EF_o$$



Gambar VI, 6

2. **Busur lingkaran.** Bangunan ada simetris dan EI bernilai tetap. Muatan terbagi-rata penuh, q. $l = 2r \sin \alpha_o$;

$$f = r(l - \cos\alpha_o) x = \tfrac{1}{2} l -$$

$$r \sin\alpha = r(\sin\alpha_o - \sin\alpha)$$

$$y = r(\cos\alpha - \cos\alpha_o)$$

$$ds = r\,d\alpha$$

Kita akan mempergunakan rumus lengkap.

$$\delta_{hh} = \int y^2 ds/EI + \int \cos^2\alpha ds/EF + \int \sin^2\alpha ds/GF'$$

$$\delta'_{hh} = EI\delta_{hh} = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} y^2 ds + i^2 \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \cos^2\alpha ds + i^2 \frac{E}{G} \cdot \frac{F}{F'} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \sin\alpha ds$$

$$\delta^o_h = \int M^o_x y ds/EI - \int N^o_x \cos\alpha\, ds/EF + \int Q^o_x \sin\alpha\, ds/GF'$$

$$(\delta^a_h)' = EI\delta^o_h = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} M^o_x y ds - i^2 \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} N^o_x \cos\alpha ds + i^2 \frac{E}{G} \cdot \frac{F}{F'} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} Q^o_x \sin\alpha\, ds$$

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} y^2 ds = r^3 \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \cos^2\alpha - 2\cos\alpha_o \cos\alpha + \cos^2\alpha_o) d\alpha =$$

$$= r^3(\alpha_o + 2\alpha_o \cos^2\alpha_o - 3\sin\alpha_o \cos\alpha_o)$$

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \cos^2\alpha ds = r\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \cos^2\alpha d\alpha = r(\alpha_o + \sin\alpha_o \cos\alpha_o)$$

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \sin^2\alpha ds = r\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \sin^2\alpha d\alpha = r(\alpha_o - \sin\alpha_o \cos\alpha_o)$$

$$\delta'_{hh} = r^3 \left\{ (\alpha_o + 2\alpha_o \cos^2\alpha_o - 3\sin\alpha_o\cos\alpha_o) + \frac{i^2}{r^2}(\alpha_o + \sin\alpha_o\cos\alpha_o) + \right.$$

$$\left. + \frac{i^2}{r^2} \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{F}{F'} (\alpha_o - \sin\alpha_o \cos\alpha_o) \right\}$$

$$V_a = V_b = \tfrac{1}{2} ql = qr \sin\alpha_o$$

$$M^o_x = \tfrac{1}{2} qx(l-x) = \tfrac{1}{2} qr^2 (\sin\alpha_o - \sin\alpha)(\sin\alpha_o + \sin\alpha) =$$

$$= \tfrac{1}{2} qr^2 (\sin^2\alpha_o - \sin^2\alpha)$$

$$N^o_x = \tfrac{1}{2}(ql - qx)\sin\alpha = qr\sin^2\alpha$$

$$Q^o_x = (\tfrac{1}{2} ql - qx)\cos\alpha = qr \sin\alpha\cos\alpha$$

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} M^o_x y ds = \tfrac{1}{2} qr^3 \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (\sin\alpha_o - \sin\alpha)(\sin\alpha_o + \sin\alpha)(\cos\alpha - \cos\alpha_o)\, d\alpha =$$

$$= qr^4(\tfrac{2}{3}\sin^3\alpha_o - \alpha_o \sin^2\alpha_o \cos\alpha_o + \tfrac{1}{2}\alpha_o \cos\alpha_o - \tfrac{1}{2}\sin\alpha_o \cos^3\alpha_o)$$

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} N^o_x \cos\alpha ds = qr^2 \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \sin^2\alpha \cos\alpha d\alpha = \tfrac{2}{3} qr^2 \sin^3\alpha_o$$

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} Q^o_x \sin\alpha ds = qr^2 \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \sin^2\alpha \cos\alpha d\alpha = \tfrac{2}{3} qr^2 \sin^3\alpha_o$$

$$(\delta^o_h)' = qr^4(\tfrac{2}{3}\sin^3\alpha_o - \alpha_o \sin^2\alpha_o\cos\alpha_o + \tfrac{1}{2}\alpha_o\cos\alpha_o - \tfrac{1}{2}\sin\alpha_o\cos^2\alpha_o) +$$

$$+ \tfrac{2}{3}\frac{i^2}{r^2}\sin^3\alpha_o \left(1 + \frac{E'}{G} \cdot \frac{F}{F'}\right)$$

$$H = (\delta^o_h)'/\delta'_{hh} = C.\,qr, \text{ dengan}$$

$$C = \frac{(\tfrac{2}{3}\sin^3\alpha_o - \alpha_o\sin^2\alpha_o\cos\alpha_o + \tfrac{1}{2}\alpha_o\cos\alpha_o - \tfrac{1}{2}\sin\alpha_o\cos^2\alpha_o) +}{(\alpha_o + 2\alpha_o\cos^2\alpha_o - 3\sin\alpha_o\cos\alpha_o) +}$$

$$\frac{+ \tfrac{2}{3} i^2/r^2 \cdot \sin^2\alpha^o (1 + E/G \cdot F/F')}{+ i^2/r^2 \cdot \{(\alpha_o + \sin\alpha_o\cos\alpha_o) + E/G \cdot F/F' \cdot (\alpha_o - \sin\alpha_o\cos\alpha_o)\}}$$

Sebagai contoh dengan bilangan, kita ambil: $l = 16\ m$; $f = 2$ m; busur terdiri dari baja *NPI* 50 dengan $I = 68736\ \text{cm}^4$ serta $F = 179\ \text{cm}^2$.

$$f(2r-f) = (\tfrac{1}{2}l)^2;\ r = \frac{(\frac{1}{2}l)^2 + f^2}{2f} = \frac{8^2+2^2}{2.2} = 17\ \text{m};\ r - f = 15\ \text{m}$$

$$\sin\alpha_o = \frac{\frac{1}{2}l}{r} = \tfrac{8}{17};\ \cos\alpha_o = \frac{r-f}{r} = \tfrac{15}{17};\ \alpha_o = 28°4'20'' = 0{,}4899 \text{ radial}$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{F}} \backsim 20\ \text{cm};\ \frac{F}{F} \backsim 2\tfrac{1}{4};\ G = \frac{m}{2(m+1)}E \text{ dengan } m = 3\tfrac{1}{3} \text{ jadi}$$

$$\frac{E}{G} = \frac{2(m+1)}{m} = 2{,}6$$

$$\left(\frac{i}{r}\right)^2 = 0{,}00014$$

$$C = \frac{0{,}0067 - 0{,}0000098 + 0{,}0000575}{0{,}0072 + 0{,}0000128 + 0{,}0000615} = 0{,}915$$

Dengan mengabaikan geseran :

$$C_1 = \frac{0{,}0067 - 0{,}0000098}{0{,}0072 + 0{,}0000128} = 0{,}914$$

Dengan mengabaikan geseran dan tekanan dari muatan-luar :

$$C' = \frac{0{,}0067}{0{,}0072 + 0{,}0000012} = 0{,}914$$

Dengan mengabaikan geseran dan segala tekanan :

$$C_2 = \frac{0{,}0067}{0{,}0072} = 0{,}930$$

Di dalam hitungan di dalam praktek, yang lazim terpakai ialah C' dengan :

$$\mu = \frac{0{,}0000128}{0{,}0072} = 0{,}018$$

Menurut rumus parabol terdapat (dengan $ds \approx dx$)

$$\mu = \tfrac{15}{8}\left(\frac{i}{f}\right)^2 = \tfrac{15}{8}\left(\frac{0{,}20}{2}\right)^2 = 0{,}0188$$

tak begitu berbeda.

Sekarang kita menghitung momen di puncak, $M_o = \frac{1}{8}ql^2 - Hf$. Dengan $H = Cqr$ (yang tersaksama), $M_o = \frac{1}{8}ql^2 - 0{,}915qrf =$

$$= (\tfrac{1}{8} - 0{,}915 \cdot \tfrac{17}{16} \cdot \tfrac{2}{16})ql^2 = (16 - 0{,}915.17)\tfrac{1}{128}ql^2 =$$
$$= 0{,}445(\tfrac{1}{128}ql^2)$$

Dengan faktor C' menjadi $M_o' = (16 - 0{,}914.17)(\frac{1}{128}ql)^2 =$

$$= 0{,}462(\tfrac{1}{128}ql^2) = 1{,}04M_o$$

Dengan faktor C_2 menjadi $(M_o)_2 = (16 - 0{,}930.17)(\frac{1}{128}ql^2) =$

$$= 0{,}190.(\tfrac{1}{128}ql^2) = 0{,}427M_o$$

Di dalam contoh ini dapat diperlihatkan, bagaimana selisih kecil di dalam nilai H(0,930 melawan 0,915), menyebabkan perbedaan besar di dalam nilai momen (0,427 : 1).

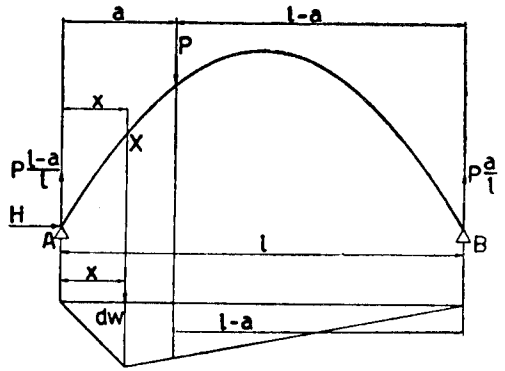
Memperhitung akibat geseran (faktor C) tak ada gunanya, oleh karena pengaruhnya begitu kecil dan apalagi nilai-nilai $\frac{E}{G}$ dan $\frac{F}{F'}$ itu hanya dapat diambil dengan pendekatan saja.

§ 13. Garis-pengaruh H.

Muatan $P = 1$ berdiri sejauh a dari perletakan A.

Pada tampang X sejauh $x < a$ dari A terdapat :

$$M_x^o = P\frac{(l-a)}{l} \cdot x \text{ dan jika } x > a$$



Gambar VI, 7

$$M_x^o = P\frac{a}{l}(l-x)$$

$$\delta_h^o = \int M_x^o y ds/EI =$$

$$= \int_o^a P\frac{(l-a)}{l}xyds/EI + \int_a^l P\frac{a}{l}(l-x)yds/EI = P\delta_{hp}$$

$$\delta_{hp} = \int_o^a x \cdot \frac{(l-a)}{l} \cdot y\frac{ds}{EI} + \int_a^l (l-x)\frac{a}{l} \cdot y\frac{ds}{EI}$$

$$\delta'_{hp} = EI \,.\, \delta_{hp} = \int x \frac{(l-a)}{l} y \left(\frac{I_o}{I}\right) ds + \int (l-x) \frac{a}{l} y \left(\frac{I_o}{I}\right) ds$$

$$y \left(\frac{I_o}{I}\right) ds = dw$$

$$\delta'_{hp} = \int x \frac{(l-a)}{l} dw + \int_a^l (l-x) \frac{a}{l} dw$$

Pada sesuatu titik sejauh $x < a$ berdirilah "muatan" dw di atas balok AB. Ini menimbulkan momen di bawah P sebesar :

$$dw \,.\, \frac{x}{l}(l-a) = x \frac{(l-a)}{l} dw$$

Jadi $\int_o^a x \frac{(l-a)}{l} dw$ berarti momen di bawah P jika pada balok AB berdiri bidang muatan dengan ordinat $\frac{dw}{dx} = y \frac{I_o}{I} \frac{ds}{dx}$, mulai dari A sampai P (sepanjang a).

Sekarang muatan dw berdiri sejauh $x > a$ dari A. Momen di bawah P ada $dw \,.\, \frac{(l-x)}{l} \,.\, a = (l-x) \frac{a}{l} \,.\, dw$ dan $\int_a^l (l-x) \frac{a}{l} dw$ berarti momen di bawah P jika balok AB dari P sampai B dimuati dengan bidang-muatan yang ordinatnya setempat ada $\frac{dw}{dx} = y \frac{I_o}{I} \frac{ds}{dx}$.

Jadi pada akhirnya arti

$$\delta'_{hp} = \int_o^a x \frac{(l-a)}{l} dw + \int_a^l (l-x) \frac{a}{l} dw$$

tak lain ialah momen di bawah P apabila balok AB dimuati penuh dengan ordinat-muatan sebesar $\frac{dw}{dx} = y \frac{I_o}{I} \frac{ds}{dx}$. Kita juga boleh menganggap bahwa bidang-muatan ini letaknya $\perp$ bidang busur dan mengikuti sumbu busur (oleh karena ds itu panjang bagian-busur); "lebar" bidang ini $\frac{dw}{ds} = y \,.\, \frac{I_o}{I}$ (diukur $\perp$ bidang-gambar).

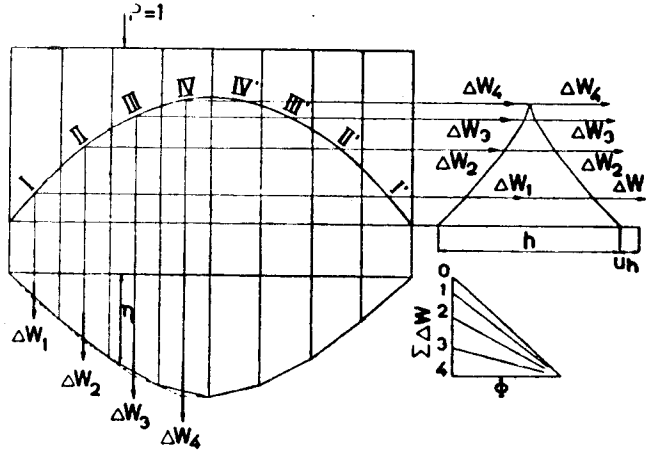
$H = P\delta'_{hp}/\delta'_{hh}$ di mana $\delta'_{hh} = EI\delta_{hh} = (1+\mu)\int_o^l y^2 \left(\frac{I_o}{I}\right) ds = (l+\mu)\int_o^l y \,.\, dw$

$\int y dw$ berarti statis-momennya "muatan-muatan" *mendatar* dw terhadap garis AB.

Oleh karena δ'_{hh} itu besaran yang tetap, maka nilai H itu bertanding lurus dengan $P\delta'_{hp}$ atau dengan δ'_{hp} untuk $P = 1$. Jadi garis-pengaruh H ini boleh dilukiskan oleh garis-momen pada balok AB yang dimuati penuh dengan ordinat-muatan sebesar $\frac{I^\circ}{I} \,.\, y \frac{ds}{dx}$ yang dapat terketahui di masing-masing titik.

Satu dan lain dapat dilukiskan secara grafis dan dengan pendekatan.

Kita membagi-bagi busur di dalam elemen-elemen sepanjang Δs dan menentukan $\Delta w = \int_{\Delta s} dw \sim y \,.\, \frac{I_o}{I} \,.\, \Delta s$. Besaran-besaran $\frac{I_o}{I}$ dan y diambil pada tengah-tengah unsur.



Gambar VI, 8

Kemudian menganggap besaran-besaran Δw ini sebagai muatan yang arah kerjanya melalui titik-tengah elemen-busur tadi. Untuk melukiskan besaran δ'_{hp} kita menganggap Δw sebagai muatan bertikal dan untuk melukiskan $\frac{1}{1+\mu}\delta'_{hh} = \Sigma y \,.\, \Delta w$ menganggapnya sebagai muatan mendatar. Dengan pe-

rantaraan gambar kutub, kita menggambar poligon-poligon batang yang bersangkutan (bandingkan § 3, gambar VI, 3).

Satu dan lain dipertunjukkan di dalam gambar VI, 8. Gaya-gaya Δw melalui titik-titik I, II, III, IV, IV' ..... i' yang letaknya di tengah-tengah antara tihang-tihang-penekan. Jadi unsur-busur itu bagian di antara saban dua tihang ini. Oleh karena muatan dilimpahkan kepada busur dengan perantaraan tihang-tihang-tekan ini, garis-pengaruh harus berjalan lurus di antaranya (garis-tarik pada poligon-batang yang sendirinya tergambar dengan garis terpisah-pisah), atau poligon-batang ini harus dipapak di bawah tihang-tihang itu. Menurut gambar ini dapat terbaca :

$$H = P\,\frac{\eta}{(1+\mu)h}$$

§ 14. Pandangan lain.

Setelah perletakan-sendi di A diganti dengan rol, kita mengerjakan kekuatan mendatar sebesar 1 ke arah luar, jadi kekuatan $H = -1$.

Ini mengakibatkan turunnya sesuatu titik pada busur di mana P nanti berdiri sejauh, $1 \,.\, \delta_{ph} = \delta_{ph}$, sedang menurut Maxwell, $\delta_{ph} = \delta_{hp}$. Jadi $H = P\,\delta_{ph}/\delta_{hh}$.

Apakah arti δ_{ph} ini ? Tak lain ialah ordinat garis-lentur di bawah P sebagai akibat dari $H = -1$. Garis-lentur ini boleh dilukiskan oleh garis-momen, jika $\frac{1}{EI}$ bidang-momen dianggap sebagai muatan, sedang $H = -1$ itu menimbulkan momen sebesar $-(-1.y) = y$. Jadi ordinat $\frac{y}{EI}$ dianggap sebagai ordinat, atau sesudah melipatkan dengan EI_o, menjadi $y\,\frac{I_o}{I}$, yang sama dengan pendapat di atas tadi (faktor $\frac{ds}{dx}$ hilang, oleh karena di sini busur yang jadi dasar).

Ini berarti bahwa garis-pengaruh H boleh dilukiskan oleh garis-lentur yang ditimbulkan oleh $H = -1$ (setelah kemampuan-kerja H dilenyapkan).

§ 15. Garis-pengaruh H secara analisa.

Kita ambil lagi busur parabol simetris dengan EI tetap, serta dengan persamaan :

$$y = x(l-x)4f/l^2 \quad (\S\ 13,\ \text{Gb. } 7).$$

$$\delta'_{hh} = EI\delta_{hh} = (1+\mu)\int_o^l y^2 ds \backsim (1+\mu)\int_o^l y^2 dx = (1+\mu)\tfrac{8}{15} l f^2 \quad (\S\ 8)$$

$$\delta'_{hp} = EI\delta_{hp} = \int_o^a \frac{l-a}{l}\,.\,xy dx + \int_a^l \frac{a}{l}(l-x)y dx =$$

$$= \frac{4f(l-a)}{l^3}\int_o^a x^2(l-x)dx + \frac{4fa}{l^3}\int_a^l x(l-x)^2 dx =$$

$$= \frac{4f}{l^3}\{(l-a)(\tfrac{1}{3}la^3 - \tfrac{1}{4}a^4) + a(\tfrac{1}{2}l^4 - \tfrac{2}{3}l^4 + \tfrac{1}{4}l^4 - \tfrac{1}{2}l^2a^2 +$$

$$+ \tfrac{2}{3}la^3 - \tfrac{1}{4}a)\} =$$

$$= \frac{4af}{l^3}(\tfrac{1}{3}l^2a^2 - \tfrac{1}{4}la^3 - \tfrac{1}{3}l^3a + \tfrac{1}{4}a^4 + \tfrac{1}{12}l^4 - \tfrac{1}{2}l^2a^2 + \tfrac{2}{3}la^3 - \tfrac{1}{4}a^4) =$$

$$= \frac{4af}{l^2}(\tfrac{1}{12}a^3 - \tfrac{1}{6}la^2 + \tfrac{1}{12}l^3) =$$

$$= \tfrac{1}{3}\frac{f}{l^2}\,.\,a(a^3 - 2a^2l + l^3) = \tfrac{1}{3}\frac{f}{l^2}\,a(l-a)(l^2 + la - a^2)$$

$$H = \frac{\delta'_{hp}}{\delta'_{hh}} = \frac{5}{8(1+\mu)}\,\frac{a(l-a)(l^2+la-a^2)}{l^3 f}$$

Oleh karena a itu senantiasa $< l$, nilai $(l^2 + la - a^2)$ tak begitu berobah banyak dan boleh diganti dengan nilai rata-rata, yaitu :

$$\frac{1}{l}\int_o^l (l^2 + la - a^2)da = \tfrac{7}{6}l^2$$

Sebagai pendekatan boleh diambil :

$$H = \frac{5}{(1+\mu)8}\,\tfrac{7}{6}\,\frac{a(l-a)}{lf} \backsim \tfrac{3}{4}\,\frac{a(l-a)}{(1+\mu)lf}$$

Jika a itu diambil bariabel, maka ini berarti bahwa garis H berupa parabol.

Selanjutnya juga boleh diambil $\mu \backsim \frac{15}{8}\left(\frac{i}{f}\right)^2$.

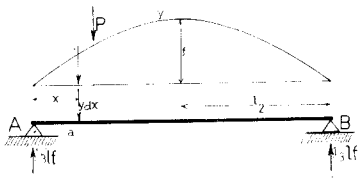
Lebih saksama lagi secara $ds \approx dx\ \{1 + \frac{1}{2}(dy/dx)^2\}$

§ 16. Menggunakan Hukum Maxwell (Gb. VI, 9).

Soal seperti di atas.

$H = P\delta_{hp}/\ \delta'_{hh} = P\delta_{ph}/\delta_{hh}$.

δ_{ph} = ordinat lentur di tempat P sebagai akibat dari gaya $H = -1$.



Gambar VI, 9

Oleh karena ds≈dx, maka ini berarti garis-lentur pada balok lurus AB, bidang-momen termaksud di atas dianggap sebagai bidang muatan, yang berordinat = y. Luas bidang muatan ini F = $\frac{2}{3}$ lf dan "reaksi perletakan" A = ½ F = $\frac{1}{3}$ lf. Momen di tempat P = 1 sejumlah a dari A terdapat sebagai :

$$\delta'_{ph} = EI\delta_{ph} = \tfrac{1}{3}\,lf\,a\int_o^a y\,(a-x)\,dx = \tfrac{1}{3}\,lfa - 4\frac{f}{l^2}\int_o^a (lx - x^2)\,(a-x)\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{3}\,lfa - 4\frac{f}{l^2}\int_o^a (lax - lx^2 - ax + x^3)dx = \frac{f}{3l^2}\,(l^3a - 2\,la^3 + a^4)$$

$$= \frac{f}{3l^2}\,a\,(l-a)\,(l^2 + la - a^2).$$

$$\delta^1_{hh} = EI\delta_{hh} = 8\,lf^2/15 \text{ (tetap)}$$

Atau dengan persamaan diferensi :

$$d^2\delta'_{ph}/da^2 = -M_a = -\,y = (-la + a^2)\,4f/l^4$$

$$d\delta'_{ph}/da = (-\tfrac{1}{2}\,la^2 + \tfrac{1}{3}\,a^3 + c)\,4f/l^2.$$

$$a = l/2,\ d\delta'_{ph}/da = o,\ c = \tfrac{1}{12}\,l^3$$

$$d\delta'_{ph}/da = (l^3 - 6\,la^2 + 4\,a^3)\,f/3\,l^2$$

$$\delta'_{ph} = (l^3a - 2\,la^3 + a^4)\ f/3\,l^2$$

Terlihat bahwa hitungan secara ini lebih ringkas.

§ 17. Secara pendekatan.

Pelengkung seperti di dalam § 15.

Bentang $l = 24m'$; $f = \frac{1}{4}l = 6m'$; tebal busur $h = 0{,}25m'$ (tetap).

$$y = \frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)4f;\ \text{tg}\,\alpha = \frac{dy}{dx} = \left(1 - 2\frac{x}{l}\right)4\frac{f}{l}$$

$$\delta'_{hh} = \frac{1}{\Delta x}\,EI\delta_{hh} = \frac{1}{\Delta x}(1+\mu)\int y^2 ds = \frac{1}{\Delta x}(1+\mu)\int y^2 \sec\alpha\,dx \approx$$

$$\approx \frac{1}{\Delta x}(1+\mu)\,\Sigma\,y^2 \sec\alpha\,.\Delta x = (1+\mu)\,\Sigma\,y^2 \sec\alpha$$

$$\delta'_{hp} = \frac{1}{\Delta x}\,EI\delta_{hp} \approx \frac{1}{\Delta x}\left(\sum_o^a \frac{l-a}{l}\,.xy\,\sec\alpha\,.\Delta x + \sum_a^l \frac{a}{l}(l-x)\sec\alpha\,.\Delta x\right) =$$

$$= \sum_o^a \frac{l-a}{l}\,.x\,.y\,\sec\alpha + \sum_a^l \frac{(l-x)a}{l}\,.y\,\sec\alpha$$

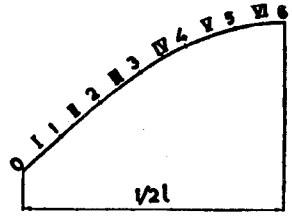
Δx = proyeksi-mendatar unsur-unsur diambil tetap = $\frac{1}{2n}\,.\,l$.

$$H = \frac{\delta'_{hp}}{\delta'_{hh}} = \frac{\sum_o^a \frac{x(l-a)}{l}(y\sec\alpha) + \sum_a^l \frac{(l-x)a}{l}(y\sec\alpha)}{(1+\mu)\sum_o^l y^2\sec\alpha} =$$

$$= \frac{\sum_o^a \frac{x(l-a)}{l}\,.\Delta w + \sum_a^l \frac{(l-x)a}{l}\,\Delta w}{(1+\mu)\sum_o^l y\,.\Delta w}$$

$$\mu = \frac{i^2\,\Sigma\cos^2\alpha\,.\Delta s}{\Sigma\,y^2\Delta s} = \frac{i^2\,\Sigma\cos\alpha\,.\Delta w}{\Sigma\,y^2\Delta x\sec\alpha} \approx$$

$$\approx \frac{i^2\,\Sigma\Delta x}{\Delta x\,\Sigma\,y^2\sec\alpha} = 2n\,\frac{i^2}{\Sigma\,y\,.\Delta w}$$



Gambar VI, 10

Di sini diambil $\Delta x = 2m' = \frac{1}{12}l$. jadi $2n = 12$.

Besaran-besaran Δw dianggap sebagai muatan, kemudian menghitung gaya-gaya-lintang Q di masing-masing titik-pembagian sebagai akibat dari muatan ini, dan sesudah itu menghitung momen dibagi Δx, yang berarti $\frac{M}{\Delta x}$ di tempat tengah-tengah bagian.

Titik	0	1	2	3	4	5	6
Bagian busur		I	II	III	IV	V	VI
y-tengah-tengah bagian (m')		0,96	2,62	3,96	4,96	5,64	5,95
$\text{tg}\,\alpha = \left(1-2\frac{x}{l}\right)4\frac{f}{l}$ (tengah-tengah)		0,917	0,750	0,583	0,417	0,250	0,083
$\sec\alpha = \sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}$		1,36	1,25	1,16	1,08	1,03	1,003
$\Delta w = y\sec\alpha$		1,29	3,27	4,58	5,35	5,82	5,96
$Q = \Sigma\,\Delta w$	26,27	24,98	21,71	17,13	11,78	5,96	
$\frac{1}{\Delta x}\,.\,M$		13,13	38,11	59,82	76,95	88,73	94,69
$\frac{1}{\Delta x}\,.\,\delta'_{hp}$	0	25,62	48,97	68,38	82,84	91,71	94,69
$y\,.\,\Delta w = y^2\sec\alpha$		1,15	8,55	18,20	26,50	32,80	35,50

$$\Sigma\, y^2\sec\alpha = 2(1{,}15 + 8{,}55 + \ldots. + 35{,}50) = 245{,}40$$

$$i^2 = \tfrac{1}{12}h^2 = \tfrac{1}{12}\,.\,0{,}25^2;\ 2n = 12$$

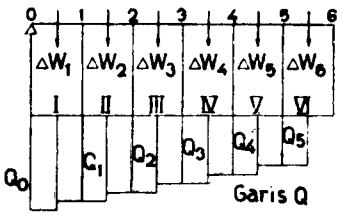
$$\mu = 2n\,\frac{i^2}{\Sigma\, y^2\sec\alpha} = 12\,.\,\frac{\frac{1}{12}\,.\,0{,}25^2}{245{,}40} = \frac{0{,}25^2}{245{,}40} \approx 0, \quad \text{jadi } \delta'_{hh} \approx 245{,}40$$

Dibandingkan dengan pendapat menurut rumus

$$\mu = \frac{5}{32}\left(\frac{h}{f}\right)^2 = \frac{5}{32}\cdot\frac{0{,}25^2}{6^2} = \frac{0{,}25^2}{232{,}0}\ (\S\ 8)$$

Di dalam daftar di atas itu, yang dihitung ialah $\frac{1}{\Delta x}\,.\,\delta'_{hp}$, jadi untuk mendapat ordinat-pengaruh H besaran δ'_{hh} harus dibagi juga dengan $\Delta x = 2$, menjadi $\frac{245{,}40}{2} = 122{,}70$. jadi $H = \frac{\frac{1}{\Delta x}\,.\,\delta_{hp}}{122{,}70}$

Besaran-besaran $\frac{1}{\Delta x}\,.\,\delta'_{hp}$ tadi terdapat sebagai nilai pertengahan antara nilai-nilai $\frac{1}{\Delta x}\,M$, yang sendirinya terdapat dengan perantaraan Q menurut hukum $Q = \frac{\Delta M}{\Delta x}$ (lihat gambar VI, 11) $Q_6 = 0$; $Q_5 = \Delta w_6$; $Q_4 = Q_5 + \Delta w_5$; $Q_3 = Q_4 + \Delta w_4$; $Q_2 = Q_3 + \Delta w_3$, d.s.t. hingga $Q_o = \sum_6^1 \Delta w$



Gambar VI, 11

$$M_1 = Q_o\,.\,\tfrac{1}{2}\Delta x;\ \frac{1}{\Delta x}\,M_1 = \tfrac{1}{2}Q$$

$$M_{II} = M_I + Q_1\Delta x;\ \frac{1}{\Delta x}\,M_{II} = \frac{1}{\Delta x}\,M_I + Q_1 = \tfrac{1}{2}Q_o + Q_1$$

$$M_{III} = M_{II} + Q_2\Delta x;\ \frac{1}{\Delta x}\,M_{III} = \frac{1}{\Delta x}\,M_{II} + Q_2 = (\tfrac{1}{2}Q_o + Q_1) + Q_2,\ \text{dst}$$

$$M_o = 0;\ \frac{1}{\Delta x}\,M_o = 0;\ \frac{1}{\Delta x}\,M_1 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta x}\,M_I + \frac{1}{\Delta x}\,M_{II}\right)$$

$$\frac{1}{\Delta x}\,M_2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta x}\,M_{II} + \frac{1}{\Delta x}\,M_{III}\right),\ \text{dst}$$

$P = 1$, berdiri dititik	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{\Delta x}\,\delta'_{hp}$	0	25,62	48,97	68,38	82,84	91,74	94,69
$H = \frac{1}{122{,}70}\cdot\frac{1}{\Delta x}\,.\,\delta'_{hp}$	0	0,209	0,407	0,557	0,675	0,747	0,772
$H = \frac{5}{8}\,\frac{a(l-a)\,(l^2+la-a^2)}{l^2 f}$	0	0,204	0,396	0,556	0,680	0,756	0,780
$H = \frac{3}{4}\,\frac{(al-a)}{lf}$	0	0,228	0,417	0,562	0,667	0,730	0,755

Di dalam tabel di atas ini, nilai-nilai H dihitung untuk sesuatu kedudukan muatan, menurut tiga jenis pendapat; ini bermaksud untuk menunjukkan selisih-selisih antara ketiga-tiga pendapat ini. Jika misalnya P berdiri di atas titik 1, nilai a diisi $\frac{1}{12}l$; jika P ada di titik 4, $a = \frac{4}{12}l$, d.s.t.

§18. Pelengkung belahan lingkaran dengan EI tetap (gb VI, 12)

$y = r\sin\varphi$; $ds = rd\varphi$

$\delta_{hhm} = \int y^2\,ds/EI = (r^3/EI)\int_o^\pi \sin^2\varphi\,d\varphi = \pi r^3/2EI$

$\delta_{hhn} = \int_o^\pi \cos^2\varphi\,ds/EF = \pi r/2EF.$

$\mu = \delta_{hhn}/\delta_{hhm} = i^2/r^2$; $\delta_{hh} = (1+\mu)\,\pi\,r^3/2EI$

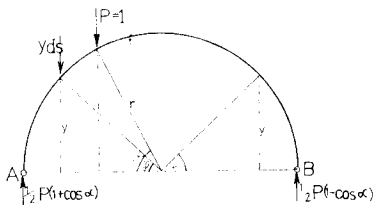
Kita mempelajari garis-pengaruh H.

a). Dengan cara biasa,

$H = p\,\delta_{hp}/\delta_{hh}$

$\delta_h = \int M_x^0\, y\, ds/EI.$

Kedudukan P = 1 ditentukan oleh besarnya α dan letak penampang x oleh φ.



Gambar VI, 12

$V_a = \frac{1}{2} P\,(1 + \cos\alpha)$; $V_b = \frac{1}{2} P\,(1 - \cos\alpha)$

§ 19. Garis-pengaruh M_x, N_x dan Q_x.

$$M_x = M_x^o - Hy = \left(\frac{M_x^o}{y} - H\right) y$$

$$N_x = Q_x^o \sin\alpha + H\cos\alpha = (Q_x^o \operatorname{tg}\alpha + H)\cos\alpha$$

$$Q_x = Q_x^o \cos\alpha - H\sin\alpha = (Q_x^o \operatorname{cotg}\alpha - H)\sin\alpha$$

Garis M_x^o/y itu mudah menggambarkannya. Pada busur parabol bidang $\frac{1}{y} M_x^o$ berupa segi-segi dengan ordinat-puncak $= \frac{x(l-x)}{ly}$, sedang

$y = x(l-x)4f/l^2$; jadi $\frac{x(l-x)}{ly} = \frac{l}{4f}$ (tetap sama untuk semua titik).

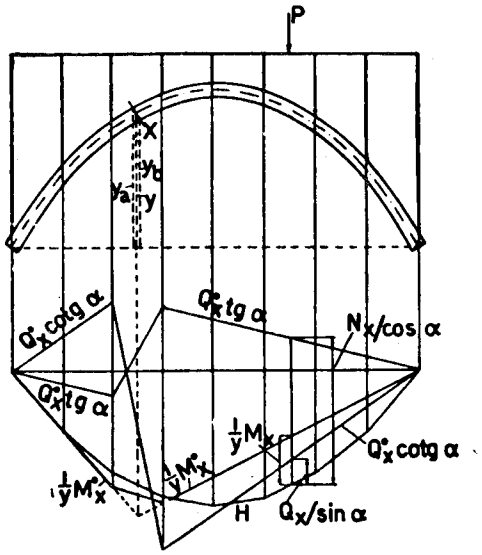
Pada kombinasi garis H dan garis $\frac{1}{y} M_x^o$ ini, kita dapat mengukur ordinat $\frac{1}{y} M = \frac{1}{y} M_x^o - H$, yaitu panjang garis-vertikal, antara garis $\frac{1}{y} M_x^o$.

Di sini kedua-dua garis ini digambar di sebelah bawah garis-penutup, oleh karena pendapat adalah selisih. Panjang potongan garis tsb tadi, harus kita lipatkan dengan y untuk mencapai M_x, multiplikator (penglipat) ialah besaran y.

Yang dimaksud dengan Q_x^o itu kekuatan melintang vertikal yang bekerja pada balok lurus AB di dalam susunan statis-tertentu.

Untuk menggambar garis-pengaruh N_x^o kita mengadakan kombinasi antara garis H dan garis Q_x^o tg α. Di mana Q_x^o bernilai positif, N_x terdapat sebagai jumlah, jadi di situ garis Q_x^o tg α digambar di sebelah lawannya bidang H (jadi di sini ke atas), dan panjang garis-vertikal antara kedua-dua garis ini melukiskan nilai N_x atau menghasilkan N_x setelah dilipatkan dengan multiplikator cos α. Di mana Q_x^o bernilai negatif, N_x terdapat sebagai selisih, jadi di situ digambar ke bawah.

Tentang garis-pengaruh $Q_x = (Q_x^o \operatorname{cot g}\alpha - H)\sin\alpha$, keterangan di atas sudah cukup jelas, di sini multiplikatornya ialah sin α.



Gambar VI, 13

Biasanya besaran Q_x itu tak usah dihitung dan besaran-besaran M_x serta N_x digabungan dengan secara mempergunakan momen-inti. Sesuatu tampang mempunyai dua titik-inti, atas dan bawah. y_a; adalah ordinat titik-inti atas dan y_b ordinat titik inti bawah. Untuk sesuatu tampang kita mengambar garis-garis $\frac{1}{y_a} M_{ka}^o$ dan $\frac{1}{y_b} M_{kb}^o$ yang di kombinasi dengan garis H.

M_{ka}^o berarti momen inti atas pada susunan statis-tertentu, dan M_k^o idem momen inti-bawah. Garis-garis $\frac{1}{y_a} M_{ka}^o$ dan $\frac{1}{y_b} M_{kb}^o$ tidak bersatu pada oleh karena $y_a \neq y_b$ dan $x_a \neq x_b$ (jadi puncak-puncak berlainan tempatnya).

$$M_{ka} = \left(\frac{1}{y_a} M_{ka}^o - H\right) y_a \quad \text{dan} \quad M_{kb} = \left(\frac{1}{y_b} M_{kb}^o - H\right) \cdot y_b$$

Setelah mengetahui nilai-nilai M_{ka} dan M_{kb} dapat menghitung gaya-gaya M_x dan N_x yang menimbulkannya. Jika W = momen-perlawanan dan F = luas-tampang :

$$\sigma_a = \frac{M_{hb}}{W} = \frac{M_x}{W} + \frac{N_x}{F}$$

$$\sigma_b = \frac{M_{ha}}{W} = -\frac{M_x}{W} + \frac{N_x}{F}$$

$$\sigma_a - \sigma_b = 2\frac{M_x}{W}\ ;\ M_x = \tfrac{1}{2}(\sigma_a - \sigma_b)\,.\,W$$

$$\sigma_a + \sigma_b = 2\frac{N_x}{F}\ ;\ N_x = \tfrac{1}{2}(\sigma_a + \sigma_b)\,.\,F$$

Di sini di muka σ_a dan σ_b harus diberi tanda + atau – jika menghitung dengan bilangan, dan tanda + untuk tekan serta tanda – untuk tarik.

Cara demikian ini sering dipergunakan pada bangunan beton-bertulang untuk menentukan tulangnya (kekuatan-normal exsentris).

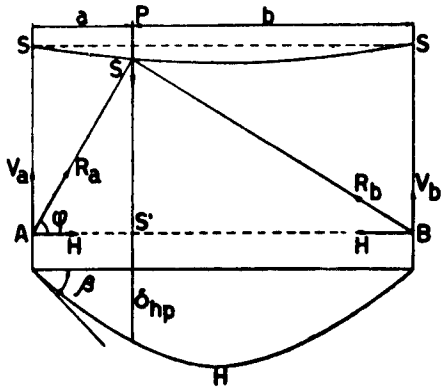
§ 20 Garis-S.

Reaksi-reaksi-pangkal R_a dan R_b memotong garis-kerja muatan P di sesuatu titik S.

$$V_a = P\frac{l-a}{l}\ ;\ V_b = P\,.\,\frac{a}{l}\ ;\ H = P\frac{\delta_{hp}}{\delta_{hh}} = P.\eta$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{V_a}{H} = \frac{l-a}{l\eta}$$

$$SS' = a\operatorname{tg}\varphi = \frac{a(l-a)}{l\eta} = \frac{a(l-a)}{l}\cdot\frac{\delta_{hh}}{\delta_{hp}}$$



Gambar VI, 14

$a = 0;\ \delta_{hp} = 0;\ \eta = 0,$ jadi $\dfrac{a(l-a)}{l\eta}$ bernilai tak tertentu.

$$[SS']_{a=o} = \left[\frac{\dfrac{da(l-a)}{da}}{l\dfrac{d\eta}{da}}\right]$$

$$\left[\frac{da(l-a)}{da}\right]_{a=o} = [l-2a]_{a=o} = l$$

$$\left[\frac{d\eta}{da}\right]_{a=o} = \left[\frac{1d}{\delta_{hh}}\cdot\frac{\delta_{hp}}{da}\right]_{a=o} = \frac{1}{\delta_{hh}}\cdot\operatorname{tg}\beta$$

$$[SS']_{a=o} = \frac{l}{l\operatorname{tg}\beta}\delta_{hh} = \delta_{hh}\operatorname{cotg}\beta$$

Di sini β berarti sudut antara garis-singgung dan garis-penutup pada garis δ_{hp} di titik A. Pada busur parabol dengan $H \approx \frac{3}{4}P\dfrac{a(l-a)}{(1+\mu)lf}$ (§ 15) atau $\eta = \frac{3}{4}\dfrac{a(l-a)}{(1+\mu)lf}$ menjadi :

$$SS' = \frac{a(l-a)}{l\eta} = \frac{a(l-a)}{l}\cdot\frac{4}{3}\frac{lf(1+\mu)}{a(l-a)} = (1+\mu)\tfrac{4}{3}f = \text{tetap.}$$

Jadi tempat-geometri titik S adalah garis lurus setinggi $(1+\mu)\frac{4}{3}f$ di atas pangkal ($// AB$).

Tempat-geometri titik S ini disebutkan garis-S yang pada umumnya berupa garis-bengkok (kurve).

Setelah garis-S ini tergambar, dengan segera kita dapat mengetahui R_a serta R_b, dan dengan begitu juga H. Kita hanya menguraikan saja muatan P menurut garis-garis AS dan BS.

Pada pelengkung separoh lingkaran terdapat (lihat § 18) :

$H = P\ \sin^2\alpha/(1+\mu)\pi\ \approx\ P\ \sin^2\alpha/\pi$, jika μ diabaikan

$V_a = \frac{1}{2}\ P(1+\cos\alpha);\ x = r(1-\cos\alpha).$

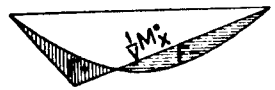
$SS' = x\ V_a/H = \pi\,r(1+\cos\alpha)\,(1-\cos\alpha)/2\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\pi\,r$, tetap.

Maksud garis S ialah antara lain supaya dapat melihat secara tepat, bagian-bagian mana menerima momen positif/negatif.

§ 21. Bentuk pelengkung yang terhemat.

Apabila garis-tekan bersatu padu dengan sumbu busur, seluruh busur hanya menahan kekuatan normal pribadi dan tegangan terdapat :

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{H\sec\alpha}{F}$$



Gambar VI, 15

Jika tebal pelengkung di dimensi sehingga $F = F_o\sec\alpha$ atau $\dfrac{F}{\sec\alpha} = F_o$ = tetap, maka di seluruh bangunan terdapat $\sigma = \dfrac{H}{F}$ = tetap. Busur demikian ini bersifat, bahwa proyeksi-vertikal tampangnya tinggal tetap.

Oleh karena bangunan menahan muatan bergerak pula, kejadian tersebut di atas tak selalu mungkin.

Jumlah muatan tetap adalah G dan muatan bergerak adalah terbagi rata sebesar $p\ (t/m')$. Kita mengusahakan supaya pada sesuatu tampang tercapai bahwa max $M^+ = max\ M^-$, sebab dengan begitu kokoh tampang kita pergunakan sepenuh-penuhnya (paling effektif).

Kita berusaha supaya sumbu-busur bersatu-padu dengan garis tekan yang ditimbulkan oleh G serta muatan penuh sebesar $\alpha p\ (t/m')$ dengan $\alpha < 1$. Pada kedudukan muatan demikian ini, busur tak menahan momen dan seluruhnya hanya menahan kekuatan-normal.

Kita mempelajari bidang-pengaruh momen untuk sesuatu tampang X (yang dilukiskan oleh kombinasi gari-H dan garis $\frac{1}{y} M_x^o$).

F^+ = luas bidang pengaruh di bagian momen-positif.
F^- = luas bidang pengaruh di bagian momen- negatif

Setelah muatan αp dihilangi, bangunan menahan momen yang di-akibatkan oleh muatan-tetap G itu, yaitu sebesar M_{Xg} pada tampang X ini.

Menghilangi muatan αp dibagian F^+ berarti menimbulkan momen - negatif sebesar αp F^+. y, dan menghilangi muatan αp di bagian F^- menyebabkan momen-positif sebuah αp F^- y. Jadi $M_{xt} = -\alpha p F^+ y + \alpha p F^- y = -\alpha py\ (F^+ - F^-)$ Max. $M_x^{\pm}$ terjadi apabila di bagian F^+ dimuati penuh dengan pt/m' dan akan terdapat :

$$Max\ M_x^{\pm} = -\alpha py(F^+ - F^-) + pyF^+ = py\ \{-\alpha(F^+ - F^-) + F^+\}$$

Supaya max M_x^- tercapai, daerah F^- harus dimuati penuh dengan p, jadi max $M_x^- = -\alpha py(F^+ - F^-) - pyF^- = -py\ \{\alpha(F^+ - F^-) + F^-\}$

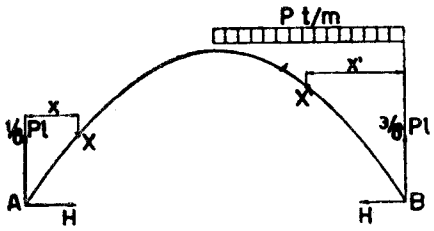
Kemudian supaya max M_x^+ dan max M_x^- sama *nilai mutlaknya,*

$$-\alpha(F^+ - F^-) + F^+ = \alpha(F^+ - F^-) + F^-$$
$$F^+ - F^- = 2\alpha(F^+ - F^-)$$
$$\alpha = \tfrac{1}{2}$$

Jadi bentuk busur ditentukan sedemikian rupa, hingga sumbunya bersatu padu dengan garis tekan yang ditimbulkan oleh muatan (G+ + ½pl) yaitu muatan tetap (G) disertai dengan muatan penuh terbagi rata ½pl.

§ 22. Tampang terbahaya.

Kita ambil pula pelengkung parabol dengan $\frac{ds}{EI} \infty \frac{dx}{EI}$, dan menurut §15 terdapat



Gambar VI, 16

$$H = \frac{5}{(1+\mu)8} P. \frac{a(l-a)(l^2+la-a^2)}{l^3 f},$$

atau dengan mengabaikan tekanan ($\mu = 0$);

$$H = \frac{5P}{8l^3 f} a(l-a)(l^2 + la - a^2) =$$
$$= \frac{5P}{8l^3 f} (a^4 - 2la^3 + l^3 a)$$

Muatan sekarang diambil terbagi rata q.

Di dalam pendapat di atas, besaran a dijadikan variabel dan P di ganti $dP = qda$. Jika bidang muatan terbagi rata ini mulai dari titik sejauh c_1 dari A dan berakhir di titik c_2 dari A, maka

$$H = \frac{5q}{8l^3 f} \int_{c_1}^{c_2} (a^4 - 2la^3 + l^3 a) da$$

Untuk $c_1 = 0$ dan $c_2 = l$ (muatan penuh)

$$H = \frac{5q}{8l^3 f} \int_o^l (a^4 - 2la^3 + l^3 a) da = \tfrac{1}{8} q \frac{l^2}{f}\ (\S\ 12,\ 1)$$

Untuk $c_1 = 0$ dan $c_2 = \frac{1}{2}l$.

$$H = \frac{5q}{8l^3 f} \int_o^{\frac{1}{2}l} (a^4 - 2la^3 + l^3 a) da =$$
$$= \frac{5q}{8l^3 f} [\tfrac{1}{5}a^5 - \tfrac{1}{2}la^4 + \tfrac{1}{2}l^3 a^2]_o^{\frac{1}{2}l} = \tfrac{1}{16} q \frac{l^2}{f}$$

Pendapat belakangan ini terdapat separonya dari pendapat pertama, yang mudah dimengerti dan diduga semua (oleh karena keadaan simetris).

Kedudukan bangunan busur yang paling tidak aman sebagai akibat dari muatan bergerak terbagi rata p (t/m'), ialah apabila busur dimuati penuh sebelah, umpamanya bagian kanan (gambar VI, 16).

$$V_a = \tfrac{1}{8} pl;\ V_b = \tfrac{3}{8} pl;\ H = \tfrac{1}{16} p \frac{l^2}{f}\ \text{(lihat atas)}$$

Pada suatu tampang X sejauh $x < \frac{1}{2}l$ dari A momennya terdapat :

$$M_x = M_x^o - Hy = \tfrac{1}{8} pl.x - \tfrac{1}{16} p \frac{l^2}{f} . x(l-a)4 \frac{f}{l^2}$$

$$= -\tfrac{1}{8}plx + \tfrac{1}{4}px^2 = \tfrac{1}{8}p(-lx + 2x^2)$$

Nilai ini menjadi extrem, jika $\frac{dM_x}{dx} = 0$ atau $-l + 4x = 0$, jadi $x = \tfrac{1}{4}l$.

$$(M_x)_{x=\frac{1}{4}l} = \tfrac{1}{8}p(-\tfrac{1}{4}l^2 + \tfrac{1}{8}l^2) = -\tfrac{1}{64}pl^2 \quad \text{(extrem negatif)}$$

Momen positif extrem akan terdapat di sebelah kanan (bagian yang dimuati).

Pada titik X' sejauh $x' < \tfrac{1}{2}l$ dari B terdapat :

$$M_{x'} = M^o_{x'} - Hy = \tfrac{3}{8}px'l - \tfrac{1}{2}p(x')^2 - \tfrac{1}{16}pl^2 \cdot x'(l - x')4\frac{f}{l^2} =$$

$$= \tfrac{1}{8}p\{lx' - 2(x')^2\}; \frac{dM'_x}{dx'} = 0;\ x' = \tfrac{1}{4}l$$

$$\text{Max } M^+_{x'} = \tfrac{1}{8}p(\tfrac{1}{4}l^2 - \tfrac{1}{8}l^2) = +\tfrac{1}{64}Pl^2 \quad \textbf{(extrem positif)}$$

Sekarang mempelajari jika muatan bergerak itu terpusat, P. Max M^+_x terdapat di mana muatan P berdiri, yaitu sejauh x dari A. Di dalam rumus H di atas tadi, a diganti dengan x dan kemudian rumus disederhanakan menurut pendapat di dalam § 15 terakhir, jadi

$$H = \tfrac{3}{4}\frac{P}{lf}x(l-x)$$

$$M_x = M^o_x - Hy = \frac{P}{l}x(l-x) - \tfrac{3}{4}\frac{P}{lf}x(l-x)y$$

Oleh karena $y = x(l-x)4\frac{f}{l^2}$, maka $x(l-x) = \frac{y}{4f}l^2$

$$M_x = \frac{P}{l}\cdot\frac{y}{4f}\cdot l^2 - \tfrac{3}{4}\frac{P}{lf}\cdot\frac{y^2}{4f}l^2 = P\frac{l}{4f}\left(y - \tfrac{3}{4}\frac{y^2}{f}\right)$$

Letak muatan sekarang diukur dengan y, yaitu tingginya di atas garis AB. Supaya M_x menjadi maximum, letak P ditentukan sehingga :

$$\frac{dM_x}{dy} = 0$$

$$1 - \tfrac{3}{2}\frac{y}{f} = 0,\ y = \tfrac{2}{3}f$$

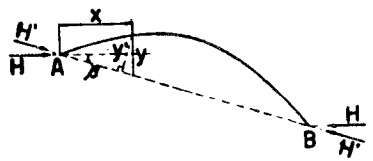
$$x(l-x)4\frac{f}{l^2} = \tfrac{2}{3}f$$

$$x^2 - lx + \tfrac{1}{6}l^2 = 0$$

$x = \tfrac{1}{2}l \pm l\sqrt{\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6}} = \tfrac{1}{2}l \pm \tfrac{1}{6}l\sqrt{3}$, jadi sejauh $\tfrac{1}{6}l\sqrt{3} \approx 0{,}3l$ disebelah kanan dan kiri dari puncak.

Ini berarti tampang-tampang sejauh $\tfrac{1}{6}l$ dari pangkal.

Menurut pendapat-pendapat di atas tadi ini, tampang yang berbahaya letaknya sejauh $\tfrac{1}{6}l - \tfrac{1}{4}l$ dari pangkal.



Gambar VI, 17

§23. Pelengkung tak simetris.

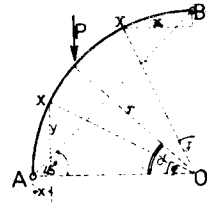
Garis AB membentuk sudut β dengan garis mendatar.

$$H'y' = Hy$$

Jadi jika kita menghitung besaran H yang bekerja mendatar), kita boleh memakai ordinat-ordinat vertikal, hanya saja harus diukur dari garis AB, sedang absis x tetap diukur mendatar. Dengan begitu tetap berlaku.

$$H = \frac{\int M^o_x y\,ds/EI}{(1+\mu)\int y^2 ds/EI}$$

Sebagai contoh kita ambil pelengkung seperempat lingkaran dengan EI tetap, dan titik 0 sebagai titik tengahnya, sedang garis penghubung OA terletak mendatar, jadi 0 B vertikal (gb VI, 17a)



Gambar VI, 17a

$X = r(1-\cos\varphi)$; $y = r\sin\varphi - r(1-\cos\varphi)$

$= r(\sin\varphi + \cos\varphi - 1)$; $\delta_{hhm} = \int y^2\,ds/EI = (r^3/EI)$

$$\int_0^{\pi/2} (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi - 2\sin\varphi - 2\cos\varphi)d\varphi$$

$= r^3(\pi - 3)/EI.$

$$\delta_{hhn} = \int_o^{\pi/2} \cos^2\varphi \; ds/EF = \pi r/4EF; \quad \mu = \delta_{hhn} \,/\, \delta_{hhm} = i^2/r^2 \; (4\pi - 12).$$

Beban P yang letaknya ditentukan dengan perantaraan.

$$V_a^\circ = P \cos\alpha; \quad V_b^\circ = P\,(1 - \cos\alpha)$$

Cabang kiri : $M_x^\circ = V_a\, x = Pr \cos\alpha\,(1-\cos\varphi)$; $y = r(\sin\varphi + \cos\varphi - 1$

Cabang kanan: $M_x^\circ = V_b.x = Pr\,(1-\cos\alpha)\sin\varphi$; $y = r\,(\cos\varphi + \sin\varphi - 1)$

$$\delta_h^\circ = M^\circ\, y\, ds/EI = (Pr^3/EI)\{\cos\alpha \int (1-\cos\varphi)(\sin\varphi + \cos\varphi - 1)d\varphi +$$

$$+ (1-\cos\alpha) \int \sin\varphi\,(\cos\varphi + \sin\varphi - 1)\,d\varphi\}$$

$$H = \delta_h^\circ \,/\, \delta_{hh}; \quad \angle BA0 = \angle A = 45^\circ$$

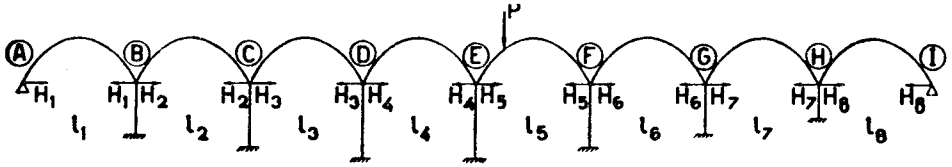
$$V_a = V_a^\circ + H \operatorname{tg}\angle A = V_a^\circ + H; \quad V_b^\circ - H.$$

Kiri : $M_x = V_a x - H\, r \sin\varphi$ dengan $x = r(1-\cos\varphi)$.

Kanan: $M_x = V_b x - H\, r \cos\varphi$ dengan $x = r \sin\varphi$.

§24. Deretan pelengkung di atas beberapa pilar.

Pilar penahan busur yang langsing itu kenyal ke arah mendatar, sehingga kepalanya dapat bergerak. Apabila reaksi-reaksi mendatar pada busur–



Gambar VI, 18

busur tidak sama besarnya, kepala pilar akan beralih mendatar sehingga bentang busur berobah. Robahan panjang pilar ke arah vertikal itu kecil sekali, dan boleh diabaikan akibatnya.

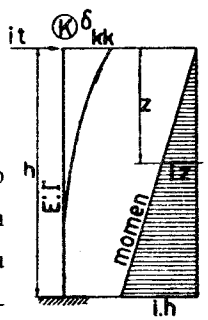
Seperti telah diuraikan di dalam § 11, perpanjangan pada bentang busur sebanyak $+\Delta l$ menimbulkan H yang negatif :

$$H_{\Delta l} = -\frac{EI_o.\Delta l}{(1+\mu)\int y^2(I_o/I)ds} = -\frac{EI_o}{\delta'_{hh}}.\Delta l$$

Sekarang kita akan mempelajari peralihan kepada pilar K. kekuatan mendatar sebesar 1t, menyebabkan geseran sebanyak $\delta_k = 1 \,.\, \delta_{kk} = \delta_{kk}$.

$$\delta_{kk} = \int_o^h \frac{M_z \,.\, dz}{E'I'}.z = \int_o^h \frac{z^2}{E'I'}\,dz$$

$$\delta'_{kk} = EI_o\delta_{kk} = \frac{E}{E'} \int_o^h z^2 \frac{I_o}{I'}\,dz$$



Gambar VI, 18a

Di sini modulus kenyal bahan pilar E' dianggap berlainan dengan dito bahan busur E, dan momen inersianya yang dianggap pula tidak tetap pada suatu pilar ditulis I', supaya dapat dibeda-bedakan dengan momen inersianya pelengkung yang mungkin tidak tetap juga (I). Selanjutnya I_o berarti momen inersia sesuatu tampang puncak busur.

Di dalam contoh menurut gambar VI, 18 semua busur serupa dan sebangun, jadi sebagai akibat dari muatan tetap (berat sendiri) reaksi-reaksi H sama besarnya dan kepala-kepala pilar tak akan bergeser. Keadaan akan berobah jika salah satu busur, misalnya busur kelima dimuati, Ini akan mendesak kepala-kepala tihang E dan F keluar, desakan mana terjalar kepada semua pilar antara. Berhubung dengan ini, bentang-bentang busur busur mendapat perobahan Δl, yang menimbulkan reaksi-reaksi H juga– pada busur-busur yang tidak dimuati. Perletakan-perletakan ujung (A dan I) dianggap tak dapat beralih.

Kita mulai dengan pelengkung pertama (AB).

Peralihan kepala pilar B sejauh δ_b = robahan panjang bentang l_1 sebanyak Δl_1. Selanjutnya robahan-robahan panjang bentang dianggap positif

$$EI_o.\delta_b = EI_o(H_1 - H_2)\delta_{bb} = (H_1 - H_2)\delta'_{bb}, \text{ dengan } \delta'_{bb} = \frac{E}{E'}\int_o^{h_b} z^2\left(\frac{I_o}{I'}\right)dz$$

$$EI_o.\Delta l_1 = -H_1.\delta'_{hh1} \text{ dengan } \delta'_{hh1} = \int_o^{l_1} y^2\left(\frac{I_o}{I}\right)ds$$

$$(H_1 - H_2)\delta'_{bb} = -H_1\delta'_{hh1}$$

$$H_1(\delta'_{hh1} + \delta'_{bb}) = H_2\delta'_{bb}$$

$$H_1 = \frac{\delta'_{bh}}{\delta'_{hh1} + \delta'_{bb}} H_2 = \mu_b H_2 \text{ atau } \mu_b = \frac{\delta'_{bh}}{\delta'_{hh1} + \delta'_{bb}}$$

Pelengkung kedua : $\Delta l_2 = \delta_b + \delta_c$ dehgan. $EI_o . \Delta l_2 = EI_o(\delta_b + \delta_c)$

$$EI_o . \Delta l_2 = - H_2 . \delta'_{hh2} \text{ dengan } \delta'_{hh2} = \int_o^{-l/2} y^2 \left(\frac{I_o}{I}\right) ds$$

$$EI_o . (\delta_b + \delta_c) = (H_2 - H_1)\delta'_{bb} + (H_2 - H_3)\delta'_{cc} \text{ dengan}$$

$$\delta'_{cc} = EI_o \delta_{cc} = \frac{E}{E'} \int_o^{h_c} z^2 \left(\frac{I_o}{I'}\right) dz$$

$$(H_2 - H_1)\delta'_{bb} + (H_2 - H_3)\delta'_{cc} = - H_2 \delta'_{hh2}$$

$$(H_2 - \mu_b H_2)\delta'_{bb} + (H_2 - H_3)\delta'_{cc} = - H_2 \delta'_{hh2}$$

$$H_2\{(1 - \mu_b)\delta'_{bb} + \delta'_{cc} + \delta'_{hh2}\} = H_3 . \delta'_{cc}$$

$$H_2 = \mu_c H_3 \text{ dengan } \mu_c = \frac{\delta'_{cc}}{\delta'_{hh2} + (1 - \mu_b)\delta'_{bb} + \delta'_{cc}}$$

Pelengkung ketiga : $\Delta l_3 = \delta_c + \delta_d$

$$(H_3 - H_2)\delta'_{cc} + (H_3 - H_4)\delta'_{dd} = - H_3 \delta'_{hh3}$$

$$H_3\{\delta'_{hh3} + (1 - \mu_c)\delta'_{cc} + \delta'_{dd}\} = H_4 \delta'_{dd}$$

$$H_3 = \mu_d H_4 \text{ dengan } \mu_d = \frac{\delta'_{dd}}{\delta'_{hh3} + (1 + \mu_c)\delta'_{cc} + \delta'_{dd}}$$

Busur ke empat : $H_4 = \mu_e H_5$ dengan $\mu_e = \dfrac{\delta'_{ee}}{\delta'_{hh_4} + (1 - \mu_d)\delta'_{dd} + \delta'_{ee}}$

Busur terakhir (ke delapan):

$H_8 = \mu_h . H_7 = \dfrac{\delta'_{hh}}{\delta'_{hh_8} + \delta'_{hh}} . H_7$ (bandingkan dengan μ_b pada busur pertama)

Di sini perlu diperhatikan, bahwa besaran δ'_{hh} itu mengenai pilar H dan δ'_{hh_8} mengenai busur kedelapan. Selanjutnya:

$$H_7 = \mu_g H_8 = \frac{\delta'_{gg}}{\delta'_{hh_7} + (1 - \mu_h)\delta'_{hh} + \delta'_{gg}} H_8$$

$$H_6 = \mu_f H_5 = \frac{\delta'_{ff}}{\delta'_{hh_6} + (1 - \mu_g)\delta'_{gg} + \delta'_{ff}} H_5$$

$$\Delta l_5 = (H_5 - H_4)\delta_{ee} + (H_5 - H_6)\delta_{ff}$$

$$= H_5\{(1 - \mu_e)\delta_{ee} + (1 - \mu_f)\delta_{ff}\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Apabila kepala-kepala tihang E dan F tak dapat bergeser, muatan P menimbulkan dibusur EF :

$$H_5^o = P \frac{\delta'_{hp}}{\delta'_{hh_5}} = \frac{\int_o^{l_5} M_x^o y (I_o/I) ds}{(1 + \mu) \int_o^{l_5} y^2 (I_o/I) ds}$$

seperti biasa

Oleh karena bentang busur bertambah dengan Δl_5, reaksi sendi mendatar dikurangi dengan atau ditambahi dengan $- \dfrac{\Delta l_5}{\delta_{hh}}$ dan sebagai hasil sama dengan H_5 yang dimaksud di atas tadi.

Jadi $H_5 = H_5^o - \dfrac{\Delta l_5}{\delta_{hh_5}} = H_5^o - \dfrac{EI_o \Delta l_5}{EI_o \delta_{hh_5}} = H_5^o - \dfrac{EI_o \Delta l_5}{\delta'_{hh_5}}$

$$EI_o . \Delta l_5 = - H_5 \delta'_{hh_5} + H_5^o \delta'_{hh_5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$EI_o . \Delta l_5 = H_5\{(1 - \mu_e)\delta'_{ee} + (1 - \mu_f)\delta'_{ff}\} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$H_5 = \frac{\delta'_{hh_5}}{\delta'_{hh_5} + (1 - \mu_e)\delta'_{ee} + (1 - \mu_f)\delta'_{ff}} H_5^o$$

$$H_5 = H_5^o \left(1 - \frac{(1 - \mu_e)\delta'_{ee} + (1 - \mu_f)\delta'_{ff}}{\delta'_{hh_5} + (1 - \mu_e)\delta'_{ee} + (1 - \mu_f)\delta'_{ff}}\right) = H_5^o(1 - \alpha_5)$$

Jadi terdapat suku koreksi:

$$\alpha_5 = \frac{(1 - \mu_e)\delta'_{ee} + (1 - \mu_f)\delta'_{ff}}{(\delta'_{hh_5} + 1 - \mu_e)\delta'_{ee} + (1 - \mu_f)\delta'_{ff}}$$

terhadap busur dengan pangkal-pangkal yang tak dapat berobah.

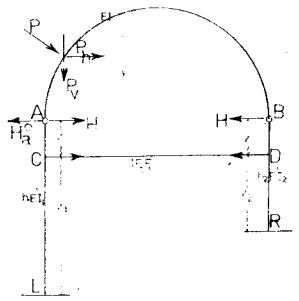
Sesudah itu, kita dapat menghitung H_4, H_3 .... H_2, H_1; H_6, H_7 dan H_8 oleh karena koeffisien-koeffisien μ itu besaran-besaran yang terketahui.

Selanjutnya, pilar harus cukup kokoh untuk menahan akibat dari selisih antara nilai-nilai H di kiri dan di kanannya.

Jika A juga dapat bergerak, maka $\Delta l_1 = \delta_a + \delta_b = H_1 \delta_{aa} + (H_1 - H_2)\delta_{bb}$.

§ 25. Pilar dengan batang tarik (gb VI, 19)

Kedua-dua pilar mempunyai I tetap masing-masing, yaitu I_1, dan I_2. dengan modulus-kenyal E'



Gambar VI, 19

Gaya P diuraikan ke dalam komponenta vertikal P_v dan mendatar P_h. Sementara perletakan B dianggap rol, jadi $H_a^\circ = -P_h$ (bekerja ke arah luar terhadap pelengkung).

$H_a = H + H_a^\circ = H - P_h$; $H_b = H$ (ke dalam)

$\delta_h^\circ - H\delta_{hh} = H_a \delta_{aa} + H_b \delta_{bb} - S\delta_{ac} - S\delta_{bd}$ ..... (1)

$H_a \delta_{ca} + H_b \delta_{db} - S(\delta_{cc} + \delta_{bd}) = Sl/E_s F_s$ ..... (2)

$H(\delta_{hh} + \delta_{aa} + \delta_{bb})$ $S(\delta_{ac} + \delta_{bd}) = \delta_h^\circ + P_h \delta_{aa}$ ..... (3)

$-H(\delta_{ca} + \delta_{ab}) + S(\delta_{cc} + \delta_{dd} + i/E_s F_s) = -P_h \delta_{ca}$ ..... (2)

$\delta_h^\circ = \int M_x^\circ y\, ds/EI$; $\delta_{hh} = (1+\mu) \int y^2\, ds/EI$

$\delta_{ac} = \delta_{ca} = z_1^3 / 3E'I_1 + z_1^2 z/2E'I_1$; $\delta_{bd} = \delta_{db} = z_2^3 / 3E'I_2 + z_2^2 z/2E'I_2$

$\delta_{cc} = z_1^3 / 3E'I$; $\delta_{dd} = z_2^3 / 3E'I_2$.

Kejadian khusus, batang tarik dipasang antara sendi-sendi A dan B.

Ini berarti $S = H$; $\delta_{ac} = \delta_{aa}$; $\delta_{bd} = \delta_{bb}$

$S(\delta_{hh} + l/E_s F_s) = \delta_h^\circ + P_h \delta_{aa}$.

Tetapi jika batang-tarik ada di bawahnya andas-andas pelengkung , $H \neq S$.

§ 26. Sendi terletak tinggi.

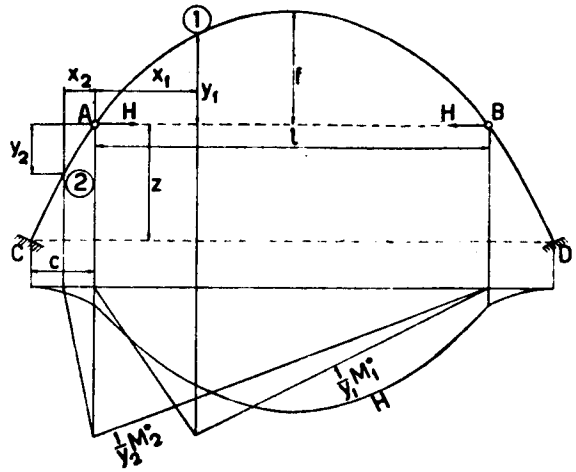
Bangunan seperti ini terjadi apabila muka air tinggi letaknya, dan oleh karena itu sendi-sendi harus ditempatkan cukup tinggi supaya terhindar dari air. Bagian-bagian di bawah sendi itu seolah-olah meneruskan busur dan oleh karena agak dapat bergerak, robahan-robahan bentuk padanya juga harus dimasukkan di dalam hitungan.

$$\delta_{hh} = (1+\mu) \int_C^D y^2 ds/EI \text{ atau}$$

$$\delta'_{hh} = EI_o \delta_{hh} = (1+\mu) \int_C^D y^2 \left(\frac{I_o}{I}\right) ds$$

$$P\delta'_{hp} = EI_o P\delta_{hp} = \int_C^D M_x^o y \left(\frac{I_o}{I}\right) ds$$

Di sini harus diingat, bahwa ordinat-ordinat diukur dari garis penghubung antara kedua dua titiksendi AB, jadi positif untuk bagian-bagian di atas-garis AB ini dan negatif untuk di bawahnya.



Gambar VI, 20

Selanjutnya juga harus diperhatikan perjalanan garis $\bar{M}_x^o$ untuk sesua tu kedudukan muatan.

Selama P berdiri di antara A dan B, maka M_x^o untuk tampang di-antara C dan A ada $V_a.x$ yang negatif nilainya. Jika jarak antara A dan P itu

$a < l$, $V_a = P\dfrac{l-a}{l}$ dan untuk bagian CA terdapat :

$M_x^o = V_a x = P\dfrac{l-a}{l}x$ (jika untuk x diisi nilai negatif, dengan sendiri nya hasil M_x juga negatif).

Untuk a = 0 (P berdiri di A), $M_x^o = Px$ (berlaku untuk bagian CA) dan $P\delta'_{hp} = \int_C^A M_x^o y \dfrac{I_o}{I} ds = P\int_C^A xy \dfrac{I_o}{I} ds$, yang positif nilainya, oleh

karena y juga negatif, jadi hasil xy menjadi positif

Apabila P berdiri sejauh a di kiri A, untuk bagian C sampai tempat P terdapat $M_x^o = P(x - a)$, di mana $x \leqslant a$ (nilai aljabar).

$\delta_{hp} = \int_a^c (x - a)y \frac{I_o}{I} ds$, jika = jarak mendatar antara A dan C

Sebagai contoh CABD adalah parabol menurut persamaan : y = $= x(l - x)4 \frac{f}{l^2}$ dengan x bernilai mulai dari – c hingga (l + c), dan se lanjutnya $\frac{I^o}{I} ds \infty dx$.

$$\delta_{hh} = (1 + \mu) \int_{-c}^{l+c} y^2 dx = (1 + \mu) \left(\int_o^l y^2 dx + 2 \int_o^c y^2 dx \right) =$$

$$= (1 + \mu) \cdot \tfrac{8}{15} f^2 + 16 \frac{f^2}{l^4} (\tfrac{1}{3} l^2 c^3 - \tfrac{1}{2} l c^4 + \tfrac{1}{5} c^5) =$$

$$= (1 + \mu) \cdot \tfrac{8}{15} \frac{f^2}{l^4} (l^5 + 10 l^2 c^3 - 15 l c^4 + 6 c^5) \text{ dan } \mu \infty \frac{i_0^2 (l + 2c)}{\int y^2 dx}$$

P berdiri sejauh a di kiri A. $M_x^o = P(x - a)$ pada bagian CA di sebelah kiri P; di lain-lain tempat, $M_x^o = 0$.

$$\delta_{hp} = \int_a^c (x - a) y dx = \int_a^c (x - a) . x(l - x) 4 \frac{f}{l^2} dx, \text{ dan dengan } a = 0$$

(P diatas A): $\delta_{hp} = 4 \frac{f}{l^2} \int_o^c (x - a) x (l - x) dx$.

Jadi ordinat H di bawah A (dan B) tidak lagi nol.

Berhubung dengan apa yang dijelaskan di atas ini, dapatlah dimengerti lukisan garis-pengaruh H menurut gambar VI, 20 Di situ juga dilukiskan garis-garis pengaruh momen di tampang 1 dan tampang 2;

$M_1 = \left(\frac{1}{y_1} M_1^0 - H \right) y_1$ dan $M_2 = \left(\frac{1}{y_2} M_2^0 - H \right) y_2$, dengan mengingat bahwa M_2^0 serta y_2 itu negatif nilainya, jadi – Hy_2 bernilai positif.

Jadi di bagian di mana ordinat $\frac{1}{y_2} M_2^0 >$ ordinat H, nilai M negatif adanya (berlawanan dengan M_1).

Jika salah satu dari dua cepitan (C dan D) diganti dengan sendi (misalnya D), bangunan menjadi statis-tertentu (busur tiga-sendi). Selama P ada di kiri B, R melalui D dan B (jadi terketahui garis kerjanya) dan

R melalui titik potongan antara garis DB dan garis kerja P. Jika P berdiri di kanan B, R_a melalui A dan B.

Tetapi kejadian ini tak akan terdapat di dalam praksis, oleh karena tujuan kita ialah menyingkiri bangunan sendi yang kena air.

Apabila C dan D sendi juga, bangunan menjadi labil.

C. PORTAL DENGAN DUA SENDI

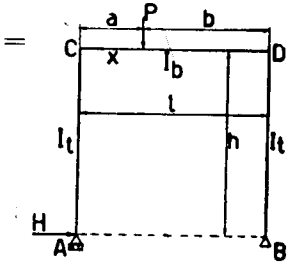
§27. Portal lurus simetris.

Bangunan semacam ini terutama menahan momen, oleh karena garis tekan muatan menyimpang jauh dari sumbu bangunan. Lagi pula, tekanan normal pada tihang tidak berhasrat menggeser perletakan, jadi hitungan cukup saksama jika akibat tekanan seluruhnya diabaikan (μ=0)

$$\delta_{hh} = \int y^2 ds/EI = 2 \int_o^h y^2 dy/EI_t + \int_o^l h^2 dx/EI_b =$$

$$= \tfrac{2}{3} h^3/EI_t + lh^2/EI_b$$

$$\frac{h}{l} \frac{I_b}{I_t} = k$$



$\delta'_{hh} = \frac{1}{l} EI_b . \delta_{hh} = \tfrac{2}{3} kh^2 + h^2 = (\tfrac{2}{3} k + 1) h^2 =$

$\tfrac{1}{3}(2k + 3) h^2$

Gambar VI, 21

Di sini kita boleh mengingat apa artinya $\int y^2 ds$ dan $\int h^2 dx$.

$\int_o^h y^2 ds$ = momen inersia batang AC atau BD terhadap garis AB, jadi $= \tfrac{1}{3} h^3$.

$\int_o^l h^2 ds$ = momen inersia batang CD terhadap garis AB, jadi = lh^2

Apabila memperhatikan suku μ (akibat tekanan normal), jadi terdapat

$$\mu = \frac{l/EF_b}{\delta_{hh}} = \frac{I_b/F_b}{\delta_{hh}^1} = \frac{i_b^2}{\tfrac{1}{3}(2k + 3) h^2} = \frac{(i_b/h)^2}{\tfrac{1}{3}(2k + 3)} \ll 1, \text{ dimana}$$

F_b = luas tampang balok CD.

a. Muatan vertikal P sejauh a dari C.

$P\delta_{hp} = \int M_x^o y \, ds/EI = \frac{1}{EI_b} \int_o^l M_x^o \, hdx$, dan apakah arti $\int_o^l M_x^o \, hdx$?

$\int_o^l M_x^o hdx = h \int_o^l M_x^o dx =$ statis momennya bidang momen (di susunan statis tertentu) terhadap garis AB.

= Luas bidang idem kali h

= ½ $Pab.h$ (bidang momen ini ⊥ bidang gambar)

Bidang M_X^o positif sebagai gaya mendatar ke kanan (moment-area method)

$$\delta_{hp} = \frac{1}{EI_b}\tfrac{1}{2}ab.h;\ \delta'_{hp} = \frac{1}{l}EI_b\delta_{hp} = \tfrac{1}{2}\frac{abh}{l}$$

$$H = P\frac{\delta'_{hp}}{\delta'_{hh}} = \frac{\frac{1}{2}abh}{\frac{1}{3}lh^2(2k+3)}P = \frac{3}{2}\frac{a(l-a)}{lh(2k+3)}P =$$

$$= \tfrac{3}{2}\frac{M^o_{max}}{(2k+3)h} = \frac{M^o_{max}}{(\frac{4}{3}k+2)h}$$

$$M_c = -Hh = -\tfrac{3}{2}\frac{a(l-a)}{l(2k+3)}P$$

(Bandingkan dengan pendapat di dalam bab IV § 34).

$$M_d = M_c$$

Dengan hasil H di atas ini, kita dapat melukiskan dengan mudah garis pengaruhnya jika a kemudian dibuat variabel, jadi ordinat H adalah $f(a)$ yang bersifat parabol.

Rumus di atas tadi boleh juga dipakai jika muatan itu terbagi, dengan ordinat q_a (yang mungkin tak tetap nilainya, dan mungkin $f(a)$ pula). Dengan begitu besaran P diganti dengan $dP = q_a da$ dan H =

$= \dfrac{3}{2(2k+3)lh}\displaystyle\int_{c_1}^{c_2} a(l-a)q_a da$, jika bidang muatan mulai dari titik sejauh c_1 dari C sampai titik sejauh c_2 dari C.

Ambil $q_a = q$ (tetap) dan $c_1 = 0$ serta $c_2 = l$ (muatan penuh terbagi-rata

$$H_{q,\,penuh} = \frac{3}{2(2k+3)lh}\int_o^l a(l-a)da = \frac{\frac{1}{4}ql^2}{(2k+3)h} = \frac{\frac{1}{8}ql^2}{(k+1\frac{1}{2})h} = \frac{M^o_{max}}{(k+1\frac{1}{2})h}$$

$$M_c = M_d = \frac{-\frac{1}{8}ql^2}{k+1\frac{1}{2}} = -\frac{M^o_{max}}{k+1\frac{1}{2}}$$

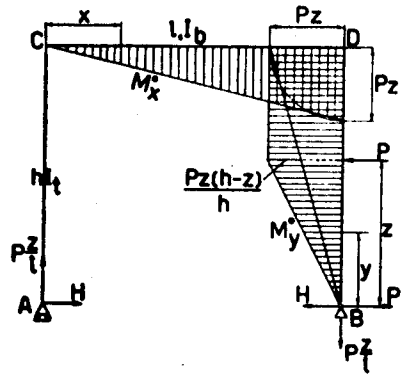
Juga terdapat secara langsung :
Statis momen bidang M_x^o terhadap $AB = \frac{1}{12}ql^3h$, dan

$$H = \frac{\frac{1}{12}ql^2h}{\delta'_{hh}} = \frac{\frac{1}{4}ql^2}{(2k+3)h}$$

b. Muatan mendatar P setinggi z di atas AB.

Di sini P bekerja di tihang kanan, dan yang kita ganti dengan rol ialah perletakan kiri (A). Jadi apabila P bekerja pada tihang kiri, sendi kanan diganti dengan rol.

Kita melukiskan perjalanan momen di dalam susunan statis-tertentu.



Gambar VI, 22

$$V_a^o = -V_b^o = P\frac{z}{l}$$

$$H_b^o = -P$$

Perjalanan garis M^o pada balok : $M_x^o = V_a^o x$ (segitiga dengan max. ordinat Pz)

Idem pada tihang BD: $M^o_{y\le z} = P\frac{z}{h}y + P\frac{h-z}{h}y = P_y$.

$$M_{y\ge z} = Pz$$

δ_h^o = statis momen bidang $\dfrac{M^o}{EI}$ terhadap garis AB =

$$= \frac{1}{EI_b}\cdot\tfrac{1}{2}Pzlh + \frac{1}{EI_t}\cdot\tfrac{1}{3}Pzh^2 + \frac{1}{EI_t}\cdot\tfrac{1}{6}Pz(h^2-z^2) = P\delta_{hp}$$

$$\delta'_{hp} = \frac{1}{l}EI_b.\delta_{hp} = \tfrac{1}{2}hz + \tfrac{1}{3}khz + \tfrac{1}{6}k\frac{z(h^2-z^2)}{h} =$$

$$= \tfrac{1}{6}hz\{(3-z^2/h^2)k+3\} \text{ atau } \tfrac{1}{6}hz\{3(k+1)-kz^2/h^2\}$$

$$H = P\frac{\delta'_{hp}}{\delta'_{hh}} = \frac{\{(3-z^2/h^2)k+3\}}{2(2k+3)}\frac{z}{h}\cdot P \text{ atau } \frac{3(k+1)-kz^2/h^2}{2(2k+3)}\cdot\frac{z}{h}\cdot P$$

Reaksi-reaksi sendi menjadi:

$$V_a = V_a^o = P\frac{z}{h}\ ;\ H_a = H$$

$V_b = V_b^o = -P\frac{z}{h}$; $H_b = H - P$ (negatif, atau bekerja ke luar).

Muatan penuh terbagi rata, q; resultanta $=hq$; bekerja di tengah-tengah BD (gb. 22a)

$$V_a^o = \tfrac{1}{2}q\frac{h^2}{l}\ ;\ V_b^o = -\tfrac{1}{2}q\frac{h^2}{l}\ ;\ H_b^o = -qh$$

$M_x^o = V_x^o . x = \frac{1}{2}q\frac{h^2}{l}x$ dengan ordinat-maximum di-D sebesar $\frac{1}{2}qh^2$.

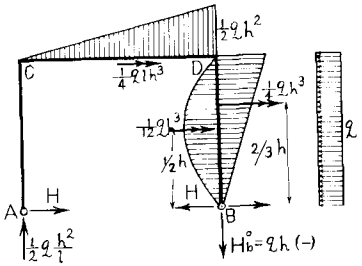
$M_y^o = \frac{1}{2}qh.y + (\frac{1}{2}qhy - \frac{1}{2}qy^2)$, bagian terakhir yang dikurung ini berupa parabol dengan ordinat-maximum $\frac{1}{8}qh^2$.

$$\delta_h^o = \frac{1}{EI_b}\cdot\tfrac{1}{2}qh^2\cdot\tfrac{1}{2}l\cdot h + \frac{1}{EI_t}(\tfrac{1}{6}qh^4 + \tfrac{1}{24}qh^4) =$$

$$= \frac{1}{EI_b}\tfrac{1}{4}qlh^3 + \frac{1}{EI_t}\tfrac{5}{24}qh^4$$

$$\frac{1}{l}EI_b\delta_h^o = \tfrac{1}{24}qh^3(6+5k)$$

$$H_{q,\,penuh} = \frac{\frac{1}{24}qh^3(6+5k)}{\frac{1}{3}(2k+3)h^2} = \frac{5k+6}{8(2k+3)}\cdot qh$$



Gambar VI, 23

Juga terdapat dengan mengerjakan integrasi menurut pendapat berasal dari P serta mengganti P dengan $dP = qdz$.

$$H_{q,\,penuh} = \frac{q}{2(2k+3)h}\int_o^h \left\{3(k+1)z - k\frac{z^3}{h^2}\right\}dz =$$

$$= \frac{\frac{5}{4}k + \frac{3}{2}}{2(2k+3)}\cdot qh = \frac{5k+6}{8(2k+3)}qh$$

Cara dengan integrasi ini lebih mudah, jika bentuk bidang muatan tak begitu sederhana. Sebagai contoh, muatan berupa segitiga dengan ordinat-maximum q_b di B dan nol di D.

$$q_z = \frac{h-z}{h}q_b,\ dP = q_z dz = q_b\frac{(h-z)}{h}\cdot dz$$

$$H = \frac{q_b}{2(2k+3)h^2}\int_o^h \left\{3(k+1)z - k\frac{z^3}{h^2}\right\}(h-z)dz = \frac{\frac{9}{20}k + \frac{1}{2}}{2(2k+3)}q_b h =$$

$$= \frac{9k+10}{20(2k+3)}\cdot q_b h$$

Pendapat di atas tadi (muatan P) juga boleh dihitung menurut hukum tiga momen.

$M_c' = M_d' = M = Hh$ diambil sebagai statis kelebihan.

Kepala-kepala tihang bergeser ke kiri sejauh δ.

Titik C: $\frac{1}{3}Mh/EI_t + \frac{1}{2}Ml/EI_b = \frac{1}{6}Pz\,.\,l/EI_b + \delta/h$

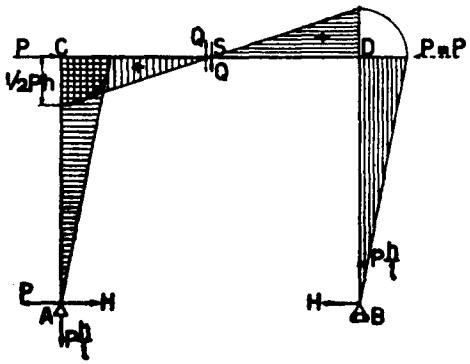
Titik D: $\frac{1}{3}Mh/EI_t + \frac{1}{2}Ml/EI_b = \frac{1}{3}Pzl/EI_b + \frac{1}{3}Pzh/EI_t +$
$+ \frac{1}{6}Pz(h^2 - z^2)/EI_t h - \delta/h$

Setelah dilipatkan dengan $6\frac{EI_b}{l}$:

$$(2k+3)M = Pz\ \ldots\ + \frac{6EI_b}{l}\cdot\delta/h$$

$$(2k+3)M = 2Pz + 2Pkz + Pkz\frac{(h^2-z^2)}{h^2} - \frac{6EI_b}{l}\cdot\delta/h$$

$$2(2k+3)M = 3Pz + 2Pkz + Pkz\frac{h^2-z^2}{h^2} =$$



Gambar VI, 24

$$= \left\{3(k+1) - k\frac{z^2}{h^2}\right\}z\ \ P$$

$$M = \frac{\{3(k+1) - kz^2/h^2\}z}{2(2k+3)}\cdot P$$

(nilai mutlak)

$M_c = -M$; $M_d = Pz - M$

$$M = \frac{M}{h} = \frac{\{3(k+1) - kz^2/h^2\}z}{2(2k+3)h}\cdot P$$

$$\frac{6}{l}EI_b\cdot\frac{\delta}{h} = (2k+3)M - Pz =$$

$$\left\{\tfrac{3}{2}(k+1)z - \tfrac{1}{2}k\frac{z^2}{h^2} - 1\right\} Pz \quad \text{(untuk menghitung } \delta\text{)}$$

Kejadian khusus: P bekerja di kepala tihang (gambar VI, 23). Kita mengisi $z = h$ dan mendatar :

$$H = \frac{3(k+1)-k}{2(2k+3)}P = \frac{2k+3}{2(2k+3)}P = \tfrac{1}{2}P$$

Oleh karena P bekerja pada tihang kiri, sendi kanan diganti dengan rol. Kita juga dapat menghitung secara langsung berdasarkan atas alasan simetris.

Kekuatan P menimbulkan di titik tengah balok (titik S) gaya momen sebesar $\alpha_m . P$ dan kekuatan normal $\alpha_n P$. Kekuatan $P' = P$ bekerja pada kepala D ke kiri akan menimbulkan juga momen $= \alpha_m . P' = \alpha_m . P$ dan kekuatan normal $\alpha_n . P$ di titik S tadi, oleh karena keadaan simetris.

Jika P dan P' bekerja bersama-sama momen di S menjadi $2\alpha_m . P$, dan kekuatan normal $= 2\alpha_n . P$.

Akan tetapi oleh karena P dan P' itu sama besarnya dan berlawanan arahnya serta garis-garis kerjanya bersatu padu dengan sumbu balok C, maka seluruh bangunan tak menahan momen, jadi $M_s = 2\alpha_m P = 0$ atau $\alpha_m = 0$ dan $2\alpha_n P = P$ atau $\alpha_n = \frac{1}{2}$ (ini betul jika akibat perpanda – kan pada CD diabaikan).

Jadi kekuatan P tak akan menimbulkan momen di titik S dan hanya kekuatan-normal $\frac{1}{2}P$. Kita sekarang mempelajari bagian ACS. Dititik A be – kerja reaksi-vertikal $V_a = -P\frac{h}{l}$ (ke bawah). Menurut sarat seimbang. di - S harus ada kekuatan vertikal ke atas $Q = P\frac{h}{l}$, yang menimbulkan momen di C sebesar $Q.\frac{1}{2}l = \frac{1}{2}Ph = M_c$.

Oleh karena $M_c = Hh$, menjadi $H = \frac{M_c}{h} = \frac{1}{2}P$;

$$H_a = \tfrac{1}{2}P - P = -\tfrac{1}{2}P;\ H_b = H = \tfrac{1}{2}P$$

Atau juga: H = kekuatan normal di $S = \frac{1}{2}P$ (jumlah gaya mendatar di - bagian SDB harus nol)

Jika mempergunakan statis momen bidang $\frac{M^o}{EI}$ terhadap AB, demikian.

Balok CD: $M_x^o = P\frac{h}{l}x$ (x di- ukur dari D ke kiri).

Tihang AC: $M_y^o = Py$

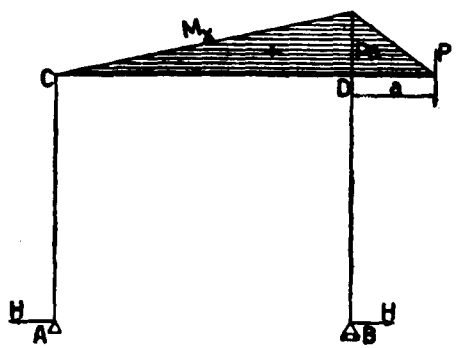
$\delta_h^o = \frac{1}{2}Ph^2 . l/EI_b + \frac{1}{3}Ph^3/EI_t =$

$P\delta_{hp}$

$\frac{1}{l}EI_b\delta_h^o = \frac{1}{2}Ph^2 + \frac{1}{3}Pkh^2 =$

$\frac{1}{6}Ph^2(2k+3) = P\delta'_{hp}$

$H = P\frac{\delta'_{hp}}{\delta'_{hh}} = \frac{\frac{1}{6}(2k+3)h^2}{\frac{1}{3}(2k+3)h^2}.P = \frac{1}{2}P$



Gambar VI, 25

c. Muatan di luar balok (gb VI, 25)

$M_x^o = -\frac{x}{l}.Pa$; $M_y^o = 0$; $P\delta_{hp} = -\frac{1}{EI_b}Pa.\frac{1}{2}.lh = -\frac{1}{EI_b}\frac{1}{2}Plha$

$P\delta'_{hp} = -\frac{1}{2}Pha$

$H = P\frac{\delta'_{hp}}{\delta'_{hh}} = -\frac{3}{2}.\frac{a}{(2k+3)h}P = \frac{3}{2}\frac{M_d^o}{(2k+3)h}$. Hasil terakhir ini dipakai jika pada ujung D ada momen luar sebesar M_d^o.

d. Momen-konsol M = P.a (gb VI, 26)

F = luas bidang-momen, dianggap sebagai gaya-mendatar ke kanan

y = jarak garis beratnya dari garis AB (moment-area method).

$F_1 = P_a$ (h–z); $y_1 = \frac{1}{2}$ (h + z)

$F_2 = \frac{1}{2}$ pal; $y_2 = h$

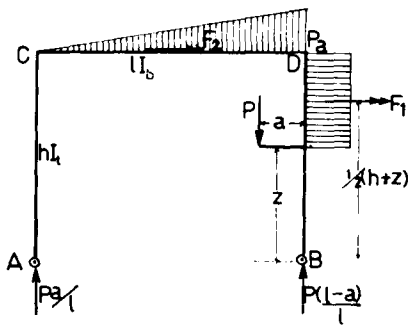
$\delta_h^\circ = \Sigma\, Fy/EI =$

$(P/EI_t)\ a(h-z)(h+z)/2 + (P/EI_b)\ alh/2$

$(\delta_h^\circ)' = \delta_h^\circ\, EI_b/l =$

$= P.\frac{1}{2}\,ha\,\{k(1 - z^2/h^2) + 1\}$

$H = P.\dfrac{\{3\ \ k(1 - z^2/h^2) + 1\}\ a}{2(2\ k + 3\ )\ h}$



Gambar VI, 26

Momen di tengah-tengah CD (titik S) :

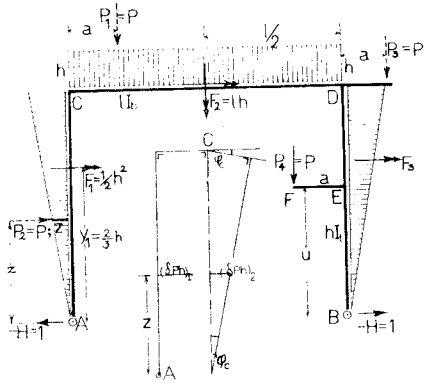
$$M_s = \tfrac{1}{2} Pa - Hh = Pa \frac{(3z^2/h^2 - 1)k}{2(2k+3)}$$

$$MD = Pa - Hh = Pa \frac{\{k(3z^2/h^2 + i) + 3\}}{2(2k+3)}$$

§ 28. Menggunakan hukum Maxwell (gb. VI, 27a)

Kita mengerjakan gaya H = – 1 (keluar) pada perletakan yang kita ganti dengan rol, jadi bekerja sebagai beban.

Bidang-bidang momen akibat ini dianggap sebagai gaya-gaya mendatar ke kanan.



Gambar VI, 27a

$F_1 = F_3 = \tfrac{1}{2} h^2$. $y_1 = y_3 = 2/3\ h$

$F_2 = lh$. $y_2 = h$

$\delta_{hh} = \Sigma\ Fy / EI = 2h^3/3E\ I_t + lh^2/El_b$.

$\delta'_{hh} = \delta_{hh}\ El_b/l = (2/3\ k + 1)\ h^2$

a) Beban P_1 vertikal sejauh a dari C

$H = P_1\ \delta_{hp} / \delta_{hh} = P_1\ \delta_{ph} / \delta_{hh}$.

δ_{ph} = ordinat lentur batang CD di tempat P berdiri Sekarang bidang momen akibat H = – 1 itu dianggap sebagai gaya vertikal ke bawah yang menghasilkan reaksi-reaksi perletakan C = D = ½ F_2 = ½ lh.

$\delta'_{ph} = \delta_{ph}\ El_b/l = \tfrac{1}{2} ha - \tfrac{1}{2} ha^2/l = \tfrac{1}{2} a(l-a)\ h/l$.

$$H = P_1\ \delta'_{ph} / \delta'_{hh} = \frac{3\ a\ (l-a)}{2\ (2k+3)\ lh} P_1.$$

b. Beban mendatar P_2 Ini bekerja ke arah dalam pada tihang AC setinggi z di atas A. Bidang-momen F_1 (pada batang AC) dianggap sebagai bidang muatan mendatar // P. Batang AC sementara dianggap terjepit sebelah sempurna di C yang ujung bebasnya di A di bebani dengan H = 1 keluar.

Ordinat lentur di P_2 terdapat $(\delta_{ph})_1 = (F_1\ z - \tfrac{1}{2} z^2.\ 1/3z) / EI_t =$
$= (\tfrac{1}{2} h^2 z - 1/6\ z^3)/EI_3$. Ini diukur terhadap garis vertikal yang melalui titik A.

Tetapi di samping itu, ujung C berputar sudut akibat momen pada batang CA, yaitu sebesar $\varphi_d = \tfrac{1}{2} F_2/El_b = lh/2\ EI_b$ yang diikuti oleh batang CA. Ini menghasilkan $(\delta_{ph})_2 = z\ \varphi_d = lhz/2El_b$.

Jadi $\delta_{ph} = (\delta_{ph})_1 + (\delta ph)2 = (\tfrac{1}{2} h^2 z - 1/6\ z^3) / El_t + lhz/2El_b$.

$\delta'_{Ph} = \delta_{ph}\ El_b / l = khz\ (\tfrac{1}{2} - 1/6\ z^2/h^2) + \tfrac{1}{2} hz = 1/6z\left\{(3\text{-}z^2/h^2)k+3\right\}$

$$H = \frac{\{(3\text{-}z^2/h^2)k + 3\}}{2(2k+3)}\ z/h \quad P_2 = H_b\ ;\ H_a = H - P \text{ (keluar)}.$$

Penjelasan lain : Luas bidang moment/EI akibat dari H = 1 itu dianggap sebagai muatan mendatar yang menghasilkan reaksi- perletakan di A sebesar $h^2/2EI_t + lh/2EI_b$, sehingga momen di P_2 terdapat

$$(h^2/2EI_t + lh/2EI_b) - \tfrac{1}{2}z^2.1/3\ z/EI_t, \text{ dst.}$$

c. Beban vertikal P_3 di luar bentang C D. sejauh a dari D

$\delta_{ph} = -a\varphi_d = -\tfrac{1}{2} lh\ a/El_b$ (ke atas); $\delta'_{ph} = -\tfrac{1}{2} ha$.

$H = -3a/\ 2(2k+3)\ h.\ P_3$ (bekerja ke arah luar).

d. Momen-Konsol $M = P_4\ a$.

Konsol EF = a ada pada tihang BD setinggi u dari B

Jika D itu jepit sempurna dan B ujung bebas, maka pertama sudut

$$\varphi_e = (\tfrac{1}{2} h^2 - \tfrac{1}{2} u^2) / EI_t$$

Pada batang DC (terdapat $\varphi_d = lh/2EI_b$. Yang di ikuti oleh tihang DB.

$\delta_{ph} = a\varphi_e + a\varphi_d = (h^2 - u^2)\, a/2EI_t + lhu/2EI_b$

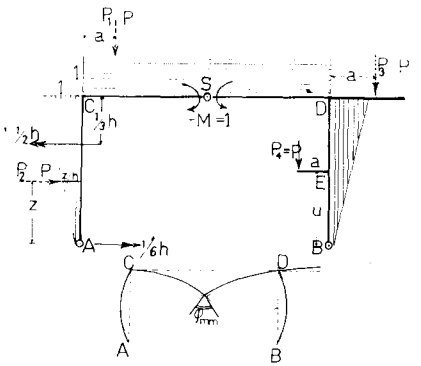
$\delta'_{ph} = \delta_{ph}\, EI_b/l = \frac{1}{2}\, ha \left\{ k\,(1 - u^2/h^2) + 1 \right\}$

$$H \quad \frac{3\left\{ k(1-u^2/h^2) + 1 \right\} a}{2(2k+3)\,h} \cdot P_4$$

Cocokkanlah dengan pendapat-pendapat di dalam §27.

§ 28a. Portal tigasendi sebagai susunan dasar (gambar VI, 27b).

Kita mengadakan sendi di AS (misalnya tengah-tengah CD) Momen di-situ $M_s = M$ menjadi gaya statis kelebihan.



Gambar VI, 27b

Kita mengerjakan momen M = –1 di S yang menghasilkan bidang-bidang momen serta garis-garis lentur seperti terlukis

Jika ujung-ujung C dan D itu jepit sempurna, maka terdapat putaran-pu taran sudut $\varphi_{sc} = \varphi_{sd} = 1/2Ei_b$ (moment area).

Ujung-ujung tihang C dan D masing-masing berputar sudut:

$\varphi_c = \varphi_d = h/3EI_t$ yang juga diikuti oleh batang-batang CS dan DS.

Jadi $\varphi_{mm} = \varphi_c + \varphi_{sc} + \varphi_{sd} + \varphi_d = 2h/3EI_t + l/EI_b$.

$\varphi'_{mm} = \varphi_{mm}\, EI_b/l = 2/3\ k + 1$, bandingkan dengan $\delta_{hh} = (2/3k+1)h^2$

a) Beban vertikal P_1 sejauh a dari C

$M = P_1\, \varphi'_{mp} / \varphi_{mm} = P_1 \delta'_{pm} / \varphi_{mm}$ dengan pengertian, bahwa

δ'_{pm} = ordinat lentur di tempat P_1 sebagai akibat M = –1 itu.

$\delta'_{pm} = \varphi_c . a^2 + a^2/2EI_b = ha/3EI_t + a^2/2EI_b$.

$\delta''_{pm} = \delta'_{pm}\, EI_b/l = a(1/3\ k + \frac{1}{2}\ a/l) = (2kl + 3a)\ a/6l$.

$$M = P_1 \cdot \frac{(2kl + 3a)a}{2(2k+3)l}.$$

Di dalam susunan dasar terdapat $H_o = M^o_s / h = P_1\ a/2h$.

Akibat M terdapat $H_m = -M/h = P_1 \dfrac{(2kl + 3a)a}{2(2k+3)\,lh}$

$$H = H_c + H_m = P_1 \cdot \frac{(2k+3)\,la - (2kl+3a)a}{2\,(2k+3)\,lh} = P\,\frac{3a\,(l-a)}{2\,(2k+3)lh}$$

b) P_2 mendatar ke kanan setinggi z di atas A.

$\delta'_{pm} = -1/EI_t \cdot (1/6\ hz - 1/6\ z^3/h) = -(h - z^2/h)\ z/6EI_t$

(berlawanan dengan arah P_2).

$\delta''_{pm} = -kz\ (1 - z^2/h^2)/6EI_t$

$$M = -\frac{kz\,(1 - z^2/h^2)}{2\,(2k+3)} \cdot P_2$$

$H_o = P_2 \cdot z/2h$; $H_m = -M/h$.

$$H = H_o + H_m = P_2 \cdot \frac{(2k+3)z + kz\,(1-z^2/h^2)}{2(2k+3)\,h} = P_2 \cdot \frac{z\,k(3-z^2/h^2)+3}{2\,(2k+3)}$$

c) P_3 sejauh a di kanan D.

$\delta''_{pm} = -1/3\ ka$; $\quad M = -P_3 \cdot \dfrac{ka}{2k+3}$

$H_o = -P_3 a\ /\ 2h$; $H_m = -M/h$.

$$H = H_o + H_m = -P_3 \cdot \frac{a(2k+3) - 2ka}{2(2k+3)\,h} = -P_3 \cdot \frac{3a}{2(2k+3)\,h}$$

d) Momen konsol P_4. a pada tihang BD.

$\delta''_{pm} = \varphi_e a = a/EI_t\ (1/6\ h - \frac{1}{2}\ u^2/h)$; $\delta''_{pm} = 1/6ka\ (1 - 3u^2/h^2)$

$$M = P_4\ \frac{ka\ (1 - 3u^2/h^2)}{2\ (k + 3)}$$

$H_o = P_4 \cdot a/2h.$

$$H = H_o + H_m = P_4 \cdot \frac{a(2k+3)+ka\ (1-3u^2/h^2)}{2\ (\ 2k + 3\ )\ h} = P_4\ \frac{3a\ k(1-u^2/h^2)+1}{2(2k + 3\ )\ h}$$

Pandangan lain. Kita juga dapat menggunakan cara dengan faktor-faktor pengaruh dalam α_m.

α_m – tihang = – y/h: α_m – balok = – 1; $\varphi_{mm} = \int \alpha^2_m\ ds/EI =$

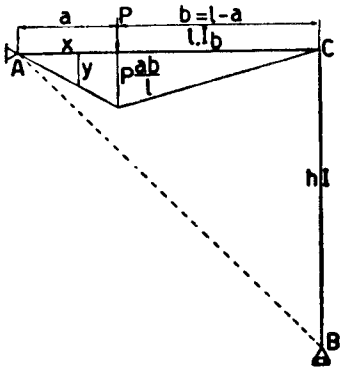
$= 2h/3EI_t + 1/EI_b$.

Pada portal tiga sendi menghitung besaran H_o akibat pembebanan, dan $M^\circ_x = (M^\circ_x)_o - H_o.y$. Di sini $(M^\circ_x)_o$ berarti momen pada portal di atas sendi dan rol. Sesudah itu menghitung :

$\varphi^\circ_m = \int \alpha_m\ M^\circ_x\ ds/EI$ dan $M = \varphi^\circ_m\ /\ \varphi_{mm}$.

§ 29. Portal buntung.

a. Muatan vertikal P, berdiri sejarak a dari A. Sendi B sekarang dijadikan rol, dan ordinat-ordinat diambil terhadap garis AB. jadi



Gambar VI, 28a

$$y = \frac{h}{l} \cdot x$$

$$\delta_{hh} = \int y^2 ds/EI = \int_o^l \left(\frac{h}{l}\right)^2 x^2 dx/EI_b +$$

$$+ \int y^2 dy/EI_t = \tfrac{1}{3}\ \frac{lh^2}{EI_b} + \tfrac{1}{3}\ \frac{h^3}{EI_t}$$

$$\delta'_{hh} = \delta_{hh} \cdot \frac{EI_b}{l} = \tfrac{1}{3}h^2 + \tfrac{1}{3}kh^2 =$$

$$= \tfrac{1}{3}(k + 1)h^2$$

$$P\delta_{hp} = \int M^\circ_x y\ \frac{ds}{EI} = \frac{P}{EI_b}\left(\int_o^a \frac{x(l - a)}{l}\ y\ dx + \int_a^l \frac{a(l - x)}{l}\ y\ dx\ \right) =$$

$$= \frac{Ph}{EI_b l^2}\left(\int_o^a (l - a)x^2 dx + \int_a^l a(l - x)x dx\right) = \frac{Ph}{EI_b l} \cdot \tfrac{1}{6}a(l^2 - a^2)$$

$$\delta'_{hp} = \delta_{hp} \cdot \frac{EI_b}{l} = \tfrac{1}{6}\ \frac{h}{l^2} \cdot a(l^2 - a^2)$$

$$H = P\ \frac{\delta'_{hp}}{\delta'_{hh}} = \tfrac{1}{2}P\ \frac{a(l^2 - a^2)}{(k + 1)l^2 h}$$

δ_{hp} atau δ'_{hp} boleh dihitung secara geometri, yaitu dengan menghitung statis-momennya bidang $\frac{M^\circ_x}{EI}$ terhadap AB (moment-area method). Yang ada M°_x hanya pada bagian balok AC, jadi EI berarti EI_b. Garis berat bidang M°_x melalui titik sejauh $\frac{1}{3}(b - a)$ dari P atau sejauh

$$x_o = \tfrac{1}{3}(b - a) + a = \tfrac{1}{3}(l + a) \text{ dari } A.$$

Ordinat titik ini, $y_o = \frac{h}{l}\ x_o = \frac{1}{3}\ \frac{h}{l}\ (l + a)$. Luas bidang $M^\circ_x =$

$= P\ \frac{ab}{l} \cdot \frac{1}{2}l = \frac{1}{2}Pab = \frac{1}{2}Pa(l - a)$, dan statis-momennya terhadap AB menjadi $\frac{1}{2}Pa(l - a) \cdot \frac{1}{3}\ \frac{h}{l}\ (l + a) = \frac{1}{6}P\ \frac{h}{l}\ (l^2 - a^2)\ a = S_o$

$$P\delta_{hp} = \frac{1}{EI_b}\ S_o \text{ dan } \delta'_{hp} = \delta_{hp} \cdot \frac{EI_b}{l} = \frac{1}{l} \cdot \frac{S_o}{P} = \tfrac{1}{6}\ \frac{h}{l^2}\ (l^2 - a^2)\ a$$

Kita juga boleh menggunakan persamaan tiga momen, yang mudah sekali dikerjakan. oleh karena titik C tak dapat beralih.

$\frac{1}{3}M_c(l/EI_b + h/EI_t) = \frac{1}{6}Pa(l^2 - a^2)\ /EI_b l$; dilipatkan dengan EI_b/l:

$$\tfrac{1}{3}M_c(1 + k) = \tfrac{1}{6}P\ \frac{a(l^2 - a^2)}{l^2}$$

$$M_c = \tfrac{1}{2}P\ \frac{a(l^2 - a^2)}{(k + 1)l^2} \text{ dan } H = \frac{M_c}{h} = \tfrac{1}{2}P\ \frac{a(l^2 - a^2)}{(k + 1)l^2 h}$$

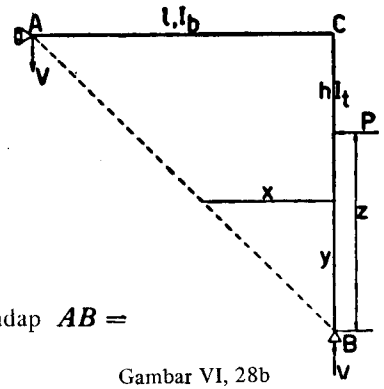
Muatan penuh terbagi rata q. Besaran P diganti dengan $dP = qda$

$$H_{q,\ penuh} = \tfrac{1}{2}\ \frac{q}{(k + 1)l^2 h} \int_o^l a(l^2 - a^2) da = \frac{\frac{1}{8}ql^2}{(k + 1)h}$$

b. Muatan mendatar P setinggi z di atas B, jadi bekerja pada tihang BC.

Berhubung dengan ini perletakan A dijadikan rol dan sebagai gaya statis kelebihan dipilih sekarang reaksi vertikal V, Absis diukur dari titik B;

$$x = \frac{l}{h} \cdot y$$



$$\delta_{vv} = \int x^2 ds/EI = \int_o^h \frac{l^2}{h^2} y^2 \frac{dy}{EI_t} + \int_o^l x^2 \frac{dx}{EI_b} = \tfrac{1}{3}l^2 h/EI_t + \tfrac{1}{3}l^3/EI_b$$

$$\delta'_{vv} = \delta_{vv} \cdot EI_b/l = \tfrac{1}{3}(k+1)l^2$$

S^o = statis momennya bidang M_y^o terhadap AB =

$$= P \cdot \tfrac{1}{2}z(h-z) \cdot \tfrac{1}{3}(h+z)l/h$$

Gambar VI, 28b

$$\delta_{vp} = \frac{S_o}{EI_t} \text{ dan } \delta'_{vp} = \delta_{vp} \cdot \frac{EI_b}{l} = \frac{k}{h} \cdot \tfrac{1}{2}z(h+z) \cdot \tfrac{1}{3}(h+z)\frac{l}{h} = \tfrac{1}{6}kz\frac{(h^2-z^2)l}{h^2}$$

$$V = P\frac{\delta'_{vp}}{\delta_{vv}} = \frac{kz(h^2-z^2)}{2(k+1)h^2l} \cdot P;\ M_c = -Vl = -\frac{kz(h^2-z^2)}{2(k+1)h^2}P =$$

$$= -\frac{k}{2(k+1)} \cdot \frac{(h^2-z^2)}{h^2} \cdot Pz$$

Dicocokkan dengan hasil menurut persamaan tiga momen

$$\tfrac{1}{3}M_c\left(\frac{h}{EI_t} + \frac{l}{EI_b}\right) = \tfrac{1}{6}P\frac{z(h-z^2)}{EI_t h}$$

$$\tfrac{1}{3}M_c(k+1) = \tfrac{1}{6}Pk\frac{z(h^2-z^2)}{h^2}$$

$$M_c = \frac{k}{2(k+1)} \cdot \frac{h^2}{(h^2-z^2)} \cdot Pz \text{ dan } V = \frac{1}{l}M_c = \frac{k}{2(k+1)} \cdot \frac{z(h^2-z^2)}{lh^2} \cdot P$$

Muatan penuh terbagi rata, q.

$$M_c = -\frac{kq}{2(k+1)h^2}\int_o^h z(h^2-z^2)dz = -\frac{k}{(k+1)} \cdot \tfrac{1}{8}qh^2 \text{ dan}$$

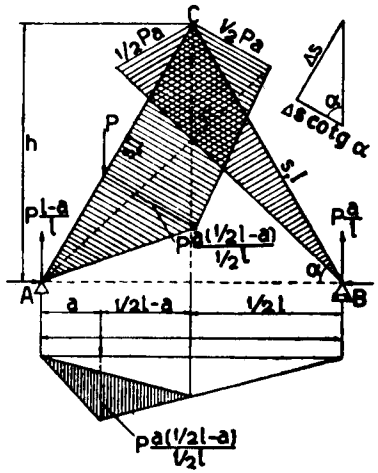
$$V_{q\ penuh} = \frac{k}{2(k+1)}\tfrac{1}{8}q\frac{h^2}{l}$$

Bidang muatan berupa segi tiga dengan ordinat q_b di B dan nol di C.

$$q_z = \frac{h-z}{h}q_b$$

$$M_c = -\frac{k}{2(k+1)} \cdot \frac{q_h}{h^3}\int_o^h z(h^2-z^2)(h-z)dz = -\frac{k}{2(k+1)} \cdot \tfrac{7}{120}q_b h^2$$

$$\text{dan } V = \frac{k}{2(k+1)} \cdot \tfrac{7}{120}q_b\frac{h^2}{l}$$



Gambar VI, 29

§ 30. Portal segi-tiga simetris

$$ds = \frac{dx}{\cos\alpha} = dx\frac{s}{\frac{1}{2}l} = \frac{dy}{\sin\alpha} = dy\frac{s}{h}$$

$$\delta'_{hh} = EI\delta_{hh} = 2\left(\int_o^h y^2 ds + \frac{I}{F}\int_o^s \cos^2\alpha ds\right)$$

$$= 2\left\{\int_o^h y^2\frac{s}{h}dy + i^2 s\left(\frac{\frac{1}{2}l}{s}\right)^2\right\} =$$

$$= 2\left(\tfrac{1}{3}sh^2 + \tfrac{1}{4}i^2\frac{l^2}{s}\right) =$$

$$= \tfrac{2}{3}sh^2\left(1 + \tfrac{3}{4}\frac{i^2}{h^2} \cdot \frac{l^2}{s^2}\right) =$$

$$= \tfrac{2}{3}sh^2(1+\mu) \text{ dengan } \mu = \tfrac{3}{4}\frac{i^2}{h^2} \cdot \frac{l^2}{s^2}$$

Di sini akibat tekanan (faktor μ). diperhitung, sebab garis tekan tak menyimpang begitu jauh dari sumbu bangunan.

a. Muatan vertikal P. berdiri sejarak mendatar a dari titik A.

$$V_a = P\frac{l-a}{l}; \quad V_b = P\frac{a}{l}$$

Kaki BC menahan momen yang berjalan segi tiga dengan puncak di titik C sebesar $M_c'' = P\frac{a}{l} \cdot \frac{1}{2}l = \frac{1}{2}Pa$ (yaitu di dalam susunan statis – tertentu).

$$M_p^o = V_a \cdot a = P\frac{l-a}{l}$$

Bidang momen pada kaki AC (susunan statis tertentu) berbangun segi empat, yang boleh dibagi dalam dua segi tiga (lihat gambar). Salah satu segi tiga ini mempunyai tinggi puncak (ordinat puncak) $P\frac{a(\frac{1}{2}l-a)}{\frac{1}{2}l}$ yaitu ordinat puncak pada balok dengan bentang ½l, yang dimuati di titik-sejauh a dari titik perletakannya.

$P\delta_{hp} = EI\,P\delta_{hp}$ = statis momennya bidang momen pada susunan statis tertentu terhadap garis AB.

$$\delta_{hp} = \tfrac{1}{2}s \cdot \frac{a(\frac{1}{2}l - a)}{\frac{1}{2}l} \cdot \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}l + a)\operatorname{tg}\alpha + 2 \cdot \tfrac{1}{2}s \cdot \tfrac{1}{2}a \cdot \tfrac{2}{3}h =$$

$$= \tfrac{2}{3}\frac{sh}{l^2}\,a(\tfrac{1}{4}l^2 - a^2) + \tfrac{1}{3}\,sha = \tfrac{1}{6}sha\left\{3 - \left(\frac{a}{\frac{1}{2}l}\right)^2\right\}$$

$$H = P\frac{\delta'_{hp}}{\delta'_{hh}} = \frac{1}{(1+\mu)4}\,\frac{\{3 - (a/\frac{1}{2}l)^2\}}{h}\,aP$$

$$M'_c = -Hh = -\frac{1}{(1+\mu)4}\left\{3 - \left(\frac{a}{\frac{1}{2}l}\right)^2\right\}Pa$$

$$M_c = M^o_c + M'_c = \frac{-1 + (a/\frac{1}{2}l)^2 + 2\mu}{4(1+\mu)}\,.\,Pa = -\left(\frac{1 - (a/\frac{1}{2}l)^2 - 2\mu}{4(1+\mu)}\right)Pa$$

Jika P berdiri di puncak, jadi $a = \frac{1}{2}l$ dan $\frac{a}{\frac{1}{2}l} = 1$, menjadi :

$H = \frac{1}{2(1+\mu)}\,\frac{\frac{1}{2}l}{h}\,P = \frac{1}{(1+\mu)} \cdot \frac{1}{2}P\operatorname{cotg}\alpha$. Dan jika $\mu = 0$, menjadi $H = \frac{1}{2}P\operatorname{cotg}\alpha$, sedang $V_a = V_b = \frac{1}{2}P$ dan $H_a = H$.

R_a membentuk sudut dengan AB sebesar $arc\,.\,\operatorname{tg}\frac{V_a}{H_a} = arc\operatorname{tg}\alpha = \alpha$.

Ini berarti, bahwa R_a dan R_b bersatu padu dengan kaki-kaki bangunan jadi bangunan tak menahan momen, Hasil ini juga cocok dengan pendapat M_c di atas, jika $\mu = 0$, yang menghasilkan pula $M_c = 0$ (bab III § 4,3).

Sebagai susunan statis tertentu kita juga boleh ambil busur tiga sendi dengan secara mengadakan sendi juga dipuncak C. Berhubung dengan ini, - momen di C, yaitu M_c diambil sebagai gaya kelebihan.

Di dalam susunan statis tertentu terdapat: $H^o = \frac{1}{2}P\frac{a}{h}$; kekuatan normal sebagai akibat dari H^o ini ada $N^o_h = H^o\cos\alpha$, dan selanjutnya Hanya tekanan yang berasal dari H^o ini akan diperhitung di dalam persamaan deformasi, jadi kekuatan normal yang berasal dari V_a dari V_b tak diperhitung- Ini sesuai dengan cara seperti dijalankan dahulu, yang hanya memperhitungkan akibat tekanan dari H.

Setelah nanti M_c diadakan, momen ini menimbulkan ΔH sebesar $\frac{M_c}{h}$ dan gaya normal menekan sebesar

$$\Delta N = \Delta H\cos\alpha = \frac{M_c}{h} \cdot \frac{\frac{1}{2}l}{s} = \tfrac{1}{2}M_c \cdot \frac{l}{sh}$$

Perpandakan yang ditimbulkan oleh $H = H^o + \Delta H$ ada

$$\Delta s = (N^o_h + \Delta N)\frac{s}{EF} = (H^o + \Delta H)\cos\alpha\,\frac{s}{EF} =$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}P\,\frac{a}{h} + \frac{M_c}{h}\right)\frac{\frac{1}{2}l.}{s} \cdot \frac{s}{EF} = \frac{(\frac{1}{4}Pa + \frac{1}{2}M_c)l}{EF_h}$$

Ini menyebabkan putaran sudut kaki AC sebanyak

$$\gamma = \frac{\Delta s\operatorname{cotg}\alpha}{s} = \Delta s\,.\,\frac{\frac{1}{2}l}{sh} = \frac{(\frac{1}{8}Pa + \frac{1}{4}M_c)l^2}{EF\,sh^2}$$

Persamaan tiga momen:

$$\tfrac{2}{3}M_c\,\frac{s}{EI} = \tfrac{1}{6}\,\frac{P}{EI}\,\frac{sa(\frac{1}{4}l^2 - a^2)}{(\frac{1}{2}l)^2} - 2\gamma =$$

$$= \tfrac{1}{6}P\,\frac{s}{EI}\,a\left\{1 - \left(\frac{a}{\frac{1}{2}l}\right)^2\right\} - \frac{\frac{1}{4}Pl^2a}{EF\;sh^2} - \frac{\frac{1}{2}M_cl^2}{EF\;sh^2}$$

$$\tfrac{2}{3}M_c = \tfrac{1}{6}Pa\left\{1 - \left(\frac{a}{\frac{1}{2}l}\right)^2\right\} - \tfrac{1}{4}\,\frac{i^2}{h^2}\,,\,\frac{l^2}{s^2}\,Pa - \tfrac{1}{2}\,\frac{i^2}{h^2} \cdot \frac{l^2}{s^2} \cdot M_c$$

Kita mengingat: $\mu = \frac{3}{4}\,\frac{i^2}{h^2} \cdot \frac{l^2}{s^2}$

$$M_c = \tfrac{1}{4}Pa\left\{1 - \left(\frac{a}{\frac{1}{2}l}\right)^2\right\} - \tfrac{1}{2}\mu Pa - \mu M_c$$

$$M_c(1+\mu) = \tfrac{1}{4}\left\{1 - \left(\frac{a}{\frac{1}{2}l}\right)^2 - 2\mu\right\}Pa$$

Di dalam persamaan ini, M_c diambil nilai mutlaknya, sedang arah kerjanya negatif. Untuk menyesuaikan dengan cara di atas harus ditulis sekarang

$$M_c = -\frac{1 - (a/\frac{1}{2}l)^2 - 2\mu}{4(1+\mu)}\,Pa = -\Delta H.h$$

$$\Delta H = \frac{1 - (a/\frac{1}{2}l)^2 + 2\mu}{4(1+\mu)}\,P\,\frac{a}{h}\,,\ \text{sedang}\ H'' = \tfrac{1}{2}P\,\frac{a}{h}$$

$$H = H^o + \Delta H = \frac{3 - (a/\frac{1}{2}l)^2}{4(1+\mu)}\,P\,\frac{a}{h}$$

Muatan terbagi rata q, penuh di atas satu kaki:

$$H = \frac{q}{4(1+\mu)h}\int_o^{\frac{1}{2}l}\left\{3-\left(\frac{a}{\frac{1}{2}l}\right)^2\right\}a\,da = \frac{5}{64(1+\mu)}\cdot q\,\frac{l^2}{h}$$

$$M_c = \tfrac{1}{16}ql^2 - Hh = -\frac{1-4\mu}{64(1+\mu)}\,ql^2 \text{ atau}$$

$$M_c = -\frac{2}{4(1+\mu)}\int_o^{\frac{1}{2}l}\left\{1-\left(\frac{a}{\frac{1}{2}l}\right)^2-2\mu\right\}da = -\frac{1-4\mu}{64(1+\mu)}\,ql^2$$

b. Muatan mendatar P setinggi z di atas AB. Perjalanan hitungan tak berobah, kita cukup dengan mengadakan penggantian-penggantian didalam pendapat di atas sedemikian; a diganti dengan z dan $(\frac{1}{2}l)^2$ dengan h^2.

$$H = \frac{\left(3-\frac{z^2}{h^2}\right)}{4(1+\mu)}\,P\frac{z}{h}\;;\; M_c = M_c^o - Hh = \tfrac{1}{2}Pz - \frac{\left(3-\frac{z^2}{h^2}\right)}{4(1+\mu)}\cdot Pz =$$

$$= -\frac{\left(1-\frac{z^2}{h^2}-2\mu\right)}{4(1+\mu)}\,Pz$$

Jika $z = h$ (P bekerja di C) menjadi $H = \dfrac{1}{2(1+\mu)}\,P$

$V_a = -V_b = -P\dfrac{h}{l} = -\tfrac{1}{2}P$ tg α. Jika $\mu = 0$, $H_a = -P + H =$

$= -\tfrac{1}{2}P$ dan $H_b = H = \tfrac{1}{2}P$

$R_a = -R_b = -\tfrac{1}{2}P\sqrt{1+\text{tg}^2\,\alpha} = -H\sec\alpha$, yang berarti bahwa garis tekan bersatu padu dengan sumbu bangunan atau momen di seluruh bangunan = nol (tanda – berarti menarik) atau dengan pendek P diuraikan, menurut sumbu-sumbu kaki.

§ 31. Portal simetris dengan kaki serong.

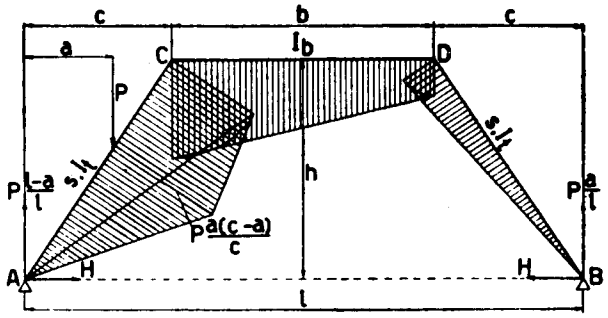
$$k = \frac{s}{b}\cdot\frac{I_b}{I_t}$$

$$\delta_{hh} = \tfrac{2}{3}\frac{sh^2}{EI_t} + \frac{bh^2}{EI_b}$$

$$\delta'_{hh} = \delta_{hh}\frac{EI_b}{b} =$$

$$= (\tfrac{2}{3}k+1)h^2 =$$

$$= \tfrac{1}{3}(2k+3)h^2$$



Gambar VI, 30

a. Muatan vertikal P di atas kaki, sejarak mendatar a < c dari titik-A. Untuk sesuatu tampang sejauh x > a dari A atau sejauh

$$(l-x) < (l-a) \text{ dari } B,\; M_x^o = V_b(l-x) = P\frac{a}{l}(l-x),$$

jadi bertanding lurus dengan $(l-x)$.

$$M_d^o = P\frac{a}{l}c;\; M_c^o = P\frac{a}{l}(l-c);\; M_p^o = P\frac{a}{l}(l-a) = \frac{a}{c}\,M_c^o + \frac{Pa(c-a)}{c}$$

Kita bekerja dengan statis-momen bidang $\dfrac{M_c^o}{EIP}$ terhadap garis AB.

$$\delta_{hp} = \frac{1}{EI_t}\left\{\tfrac{1}{3}sh\frac{a}{l}(l-c) + \tfrac{1}{3}sh\frac{a}{l}c + \frac{1sh}{6c^2}a(c^2-a^2)\right\} + \frac{1}{EI_b}\tfrac{1}{2}bh\frac{a}{l}(c+l-c)$$

$$\delta'_{hp} = \delta_{hp}\cdot\frac{EI_b}{b} = \tfrac{1}{6}\left\{3(k+1) - k\frac{a^2}{c^2}\right\}ha$$

$$H = P\frac{\delta'_{hp}}{\delta'_{hh}} = \frac{3(k+1)-ka^2/c^2}{2(2k+3)}\,\frac{a}{h}\,P;\; M_c = M_c^o - Hh;\; M_d = M_d^o - Hh$$

Pada $a = c$, $H = \dfrac{(2k+3)}{2(2k+3)}\,\dfrac{c}{h}\,P = \tfrac{1}{2}P\dfrac{c}{h}$

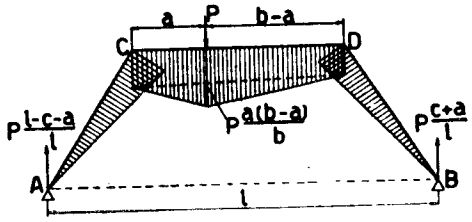
Muatan penuh di atas satu tiang terbagi rata, q.

$$H_{q\ penuh} = \frac{q}{2(2k+3)h}\int_o^c\left\{3(k+1)a - k\frac{a^3}{c^2}\right\}da = \frac{5k+6}{8(2k+3)}\cdot q\,\frac{c^2}{h}$$

Muatan vertikal P di atas balok CD, sejauh a dari C.

$$V_a = P\frac{(l-c-a)}{l}\;;\; V_b = P\frac{(c+a)}{l}$$

$$M_c^o = V_a\cdot c = P\frac{(l-c-a)}{l}\,c$$



Gambar VI, 31

$$M_d^o = V_b c = P\frac{(c+a)}{l}c$$

$$\delta_{hp} = \frac{1}{EI_t}\left\{\tfrac{1}{3}s\frac{(l-c-a)}{l}ch + \tfrac{1}{3}s\frac{(c+a)}{l}ch\right\} +$$

$$+\frac{1}{EI_b}\left\{\tfrac{1}{2}bh\frac{(l-c-a)}{l}c + \frac{(c+a)}{l}c + \tfrac{1}{2}a(b-a)h\right\}$$

$$\delta'_{hp} = \delta_{hp}\frac{EI_b}{b} = \tfrac{1}{3}kch + \tfrac{1}{2}ch + \tfrac{1}{2}a\frac{(b-a)}{b}h =$$

$$= \tfrac{1}{6}\left\{(2k+3)c + 3a\frac{(b-a)}{b}h\right\}$$

$$H = P\frac{\delta'_{hp}}{\delta'_{hh}} = \frac{(2k+3)c + 3(a/b)(b-a)}{2(2k+3)h}P = \frac{(2k+3)c + 3(a/b)(1-a/b)b}{2(2k+3)h}$$

Untuk $a = o$ (P di atas C), $H = \tfrac{1}{2}P\frac{c}{h}$ (bandingkan di atas dengan $a = c$)

$$H_{q\ penuh} = \frac{q}{2(2k+2)h}\int_o^b\left\{(2k+3)c + 3\frac{a}{b}(b-a)\right\}da =$$

$$= \tfrac{1}{2}q\frac{bc}{h} - \frac{\tfrac{1}{2}qb^2}{2(2k+3)} = \tfrac{1}{2}q\frac{b^2}{h}\left\{\frac{c}{b} + \frac{1}{2(2k+3)}\right\}$$

c. **Muatan mendatar P setinggi Z di atas AB.** Kita dapat memakai rumus δ'_{hp} di dalam keadaan a jika besaran a diganti dengan z dan c dengan h.

$$H = \left\{\frac{3(k+1) - kz^2/h^2}{2(2k+3)}\right\}\frac{z}{h}P;\quad H_{q\ penuh} = \frac{5k+6}{8(2k+3)}qh$$

Dengan $z = h$, $H = \tfrac{1}{2}P$.

§31a. Menggunakan hukum Maxwell (gb. VI,32)

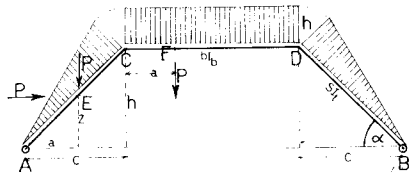
Kita mengerjakan lagi gaya H = – 1 pada perletakan yang kita ganti dengan-rol (§ 28). Ini menimbulkan

$M'_c = M'_d = h.$

$\delta_{hh} = 2/EI_t.\ ½\ sh.\ 2/3\ h + 1/EI_b.\ bh.h$

$\delta'_{hh} = \delta_{hh}\ EI_b/b = (2/3\ k + 1)\ h^2$

jika $k = (s/b)(I_b/I_t)$



Gambar VI, 32

$H = P\ \delta_{hp}/\ \delta_{hh} = P\ \delta_{ph}/\ \delta_{hh} = P\ \delta'_{ph}/\ \delta'_{hh}.$

a) Beban vertikal P di E sejauh a dari A

Ordinat momen (akibat H = – 1) di E = a/c. h dan

AE = a/c.s; $\varphi_c = bh/2EI_b$ (balok CD).

$\delta_{ph} = 1/EI_t.\ (½\ sh\ a - ½.\ \frac{a}{c}.s.\frac{a}{c}h.1/3\ a) + bha/2EI_b =$

$= (sha)\ /\ EI_t\ (½ - 1/6\ a^2\ /\ c^2) + bha/2EI_b$

$\delta'_{ch} = \delta'_{ph}$ di titik C = hc (1/3 k + ½).

b) Beban mendatar RP di E (ke kanan).

Sekarang diperlukan z = jarak vertikal dari E sampai A Huruf a di dalam pendapat di atas diganti dengan huruf z

$\delta'_{ph} = hz\ (½k - 1/6\ kz^2\ /\ h^2 + ½).$

Pada z = h terdapat : $\delta'_{ph} = h^2\ (1/3\ k + ½) = ½\ \delta'_{hh}.$

Jadi H = ½ P

c) Beban vertikal P sejauh a b dari C.

$\delta_{ph} = \delta_{ch} + (½\ bha - ½\ ha^2)\ EI_b$ dengan $\delta'_{ch} = (hc(1/3 + ½),$ (lihat soal a)

$\delta'_{ph} = hc\ (1/3\ k + ½) + ½\ bha\ (1 - a/b).$

Jika P berdiri di C, mengisi a = 0.

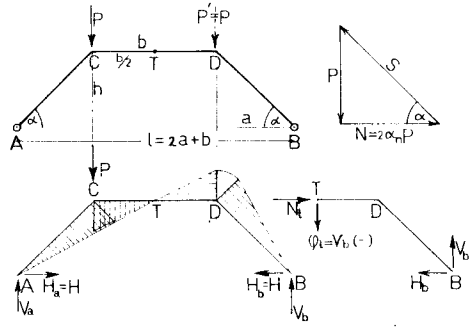
§ 31b. Alasan simetri (gb. VI, 33)

Kita mengerjakan beban vertikal P di ujung C. Pada penampang T di- tengah - tengah palang CD terdapat :

gaya – normal $N_t = \alpha_n P.$

momen $M_t = \alpha_m P.$

peralihan tempat $\delta_t = \delta_{tp} P.$



Gambar VI, 33

Kemudian beban P dihapus, dan membebani ujung D dengan gaya - bertikal P' = P (berarti memindah P dari C ke D). Berdasarkan alasan **simetri**, kita mem peroleh :

$$N_t = \alpha_n P = \alpha_n P;\ N_t = \alpha_m P;\ \delta_t = \delta_{tp} P' = \delta_{tp} P.$$

Sekarang kedua-kedua gaya P dan P' itu di kerjakan bersama waktu. Oleh karena kejadiannya simetris (P = P'), maka ujung-ujung tihang tidak akan bergoyang, berarti bangunan tidak mengalami deformasi (kecuali deformasi robahan - panjang yang selalu boleh diakibatkan), sehingga dimana-mana tidak ada momen. Berhubung dengan ini, reaksi-reaksi perle takan A dan B arah - kerjanya berimpit dengan tihang-tihangnya sedang $V_a = V_b = P$ (simetri), Jadi $V_a = A \sin \varphi$; $H = A \cos \varphi$; $V_a \cot g\ \varphi = P\ a/h$ yang dilimpahkan sebagai gaya normal pada palang CD.

Satu sama lain mendapatkan :

$N_t = 2\alpha_n\ P = Pa/h = P \cot g\ \varphi$; $\alpha_n = \frac{1}{2} \cot g\ \varphi = a/2h$.

$M_t = 2\ \alpha_m\ P = 0$; $\alpha_m = 0$

$\delta_t = 2\ \delta_{tp}\ P = 0$; $\delta_{tp} = 0$

Jadi sebagai akibat dari beban vertikal P di C terdapat :

$N_t = \alpha_n\ P = \frac{1}{2}\ P \cot g\ \varphi = P\ a/2\ h.$

$M_t = 0$, titik T tidak naik/turun.

Kita pelajari "free - body" TDB yang di titik T menerima beban mendatar $N_t = Pa/2h$. Untuk mengimbanginya, diperlukan reaksi $H_b = N_t = Pa/2h$ (ke arah dalam), $V_b = Pa/l$ ($\Sigma M_A = 0$);

Secara mempelajari free - body TCA kita mendapat menurut analogi:

$H_a = N_t = P_a/2h$ (ke dalam juga).

Jadi $H = H_a = H_b = P_a/2h = P\ \frac{1}{2} \cot g\ \varphi$ (ke arah dalam).

Jika P bekerja mendatar, ke kanan umpamanya, maka menurut alasan simetri yang telah diuraikan dalam § 27, b dulu, terdapat :

$H_a = H_b = \frac{1}{2}$ P masing-masing bekerja berlawanan dengan P.

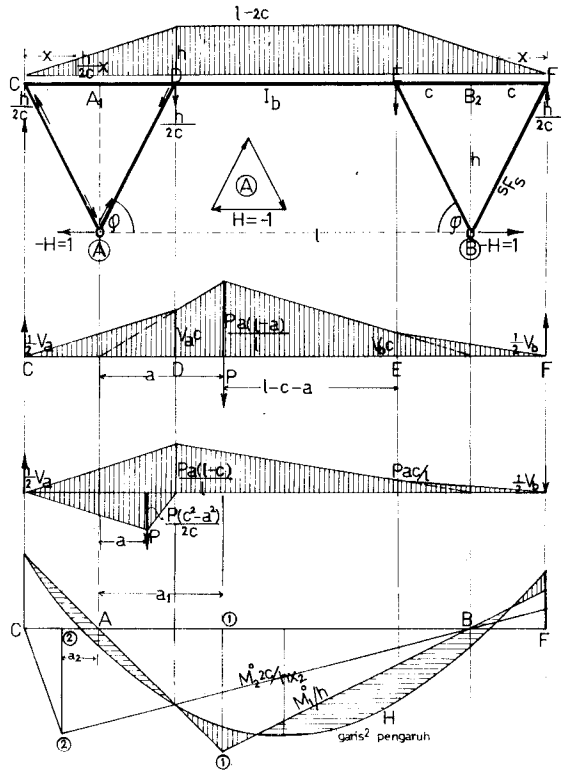
Beban serong di C dapat diuraikan ke dalam komponenta-komponenta P_v (vertikal) dan P_h mendatar.

P_v menghasilkan $H_a = H_b = P_v . a/2h$ (ke dalam jika P_v ke bawah).

P_h mengakibatkan $H_a = H_b = \frac{1}{2} P_h$ 9 berlawanan dengan P_h).

§32. Portal dengan tihang-tihang rangkap (gb. VI, 34)

Kita menggunakan cara dengan faktor-faktor pengaruh - dalam, yaitu α_m pada balok CDEF dan α_n hanya pada tihang-tihangnya saja. Salah satu perletakan - diganti rol, kemudian mengerjakan gaya H = – 1 di situ (keluar).



Gambar VI, 34

Ini mengakibatkan gaya-gaya normal tekan pada tihang-tihang AC dan BF, dan tarik tihang-tihang AD dan BE, masing-masing sebesar $\frac{1}{2} \sec \varphi\ (\pm \alpha_n)$

Kejadian ini menimbulkan gaya-gaya vertikal $V_c = V_f = \frac{1}{2} tg\ \varphi$ ke atas dan $V_d = V_c = \frac{1}{2} tg\ \varphi$ ke bawah pada balok CF. Dengan demikian terdapat : $\alpha_m = \frac{1}{2} x\ tg\ \varphi = h\ x/2c$ pada bagian-bagian CD dan FE.

$\alpha_m = h$ pada bagian DC (mengisi $x = 2c$).

$$\delta_{hhm} = \int \alpha_m^2\ ds/EI = 1/EI_b\ \left(2 \int_0^c (hx/2c)^2\ dx + (l-2c)\ h^2\right) =$$

$$= h^2\ (l - 2/3\ c)\ /\ EI_b$$

$\delta_{hhn} = \int \alpha_n^2 \, ds/EF = 4s/EF_s \; (\tfrac{1}{2} \sec\varphi)^2 = s^3/c^2 EF_s$

$\delta_{hh} = \delta_{hhm} + \delta_{hhn} = (1+\mu)\, \delta_{hhm}$

$\delta'_{hh} = \delta_{hh}\, EI_b = h^2 \; (l - 2/3\, c) + s^3 \; (F_b/F_s)(1_s^2/c^2) = (1+\mu)\,(l - 2/3c)$

$H = \delta^\circ_h / \delta_{hh} = (\delta^\circ_h)' / \delta'_{hh}$

$(\delta^\circ_h)' = \delta^\circ_h EI_b = \int \alpha_m M^\circ_x \, dx.$

Untuk bagian-bagian CD dan FE dengan $\alpha_m = hx/2c$, besaran ini menjadi $(\delta^\circ_h)' = (h/2c) \int M^\circ_x . x dx$ = (h/2c) kali statis – momennya bidang M°_x terhadap titik C atau titik F.

Pada bagian DE dengan $\alpha_m = h$ berarti $(\delta^\circ_h)' = h \int M^\circ_x$ = h kali luas bidang-M°_x di antara D dan E.

Satu sama lain dapat dijalankan dengan "moment - area:"

a) Beban P sejauh a $>$ c di kanan titik A′ (jadi di antara D dan E).

$M^\circ_d = \tfrac{1}{2} V_a . 2c = V_a . c; \quad M^\circ_e = \tfrac{1}{2} V_b . 2c = V_b . c; \; V_a = P(l-a)/l; \; V_b = P_a/l.$

$(\delta^\circ_h) = \int_C^D \alpha M^\circ_x \, dx + \int_F^E \alpha_m M^\circ_x \, dx + \int m M^\circ_x \, dx = I + II + III$

$I + II = (h/2c)(V_a c^2 . 4/3\, c + V_b c^2 . 4/3\, c) = 2/3\, P_c\, 2h.$

$III = \tfrac{1}{2} P h/l \; \{(a-c)(l-a)(c-a) + a(l-c-a)(c+d-a)\} =$

$= \tfrac{1}{2} P h/l \; \{(l-a)(a^2-c^2) + a(l-a)^2 - c^2\}$

$= \tfrac{1}{2} Ph\,(la - a^2 - c^2).$

$(\delta^\circ_h)' = Ph\{(2/3c^2 + \tfrac{1}{2}(la - a^2 - c^2)\} = P_h\{1/6\, c^2 + \tfrac{1}{2}(l-a)a.\}$

Pendapat ini hanya berlaku selama $c < a < l - c$ (jadi sepanjang DE saja).

Dengan hukum **Maxwell.** berdasarkan bidang momen akibat H = –1.

Jika balok CF dipotong-potong di D dan di E, maka ujung-ujung D dan E pada bagian-bagian DC dan EF berputar sudut masing-masing sebesar $\gamma = 2c/3EI_b$ yang diikuti oleh tihang-tihangnya.

Jadi boleh dianggap bahwa sumbu CD berputar sejauh γ mengelilingi titik A_1

Dengan begitu titik D turun sejauh $\gamma_c = 2c^2/3EI_b$ terhadap A_1 dan titik E juga sekian terhadap B_1.

Sekarang kita mempelajari bagian A_1B_1 yang sepanjang DE = l = 2c dimuati dengan bidang – momen berordinat tetap = h. Ini menyebabkan tu runnya titik - pegangan P sejauh (h/EI_b)

$\tfrac{1}{2}(l - 2c)(a+c) - \tfrac{1}{2}(a-c)^2 = (h/EI_b)\, \tfrac{1}{2}(la - a^2).$

Ini ditambahkan pada turunnya titik D menghasilkan :

$\delta'_{ph} = EI_b \; \delta_{ph} = h \; \{2/3\, c^2 + \tfrac{1}{2}(1a - a^2 - c^2)\}.$

Pada c = a menjadi ch $(\tfrac{1}{2} l - 1/3\, c)$.

b) Beban P sejauh a $<$ c dari A_1 (di antara C dan D).

Tetap = $V_a = P(l-a)/l$ dan $V_b = Pa/l$.

$M^\circ_d = \tfrac{1}{2} V_a . 2c - P(c-a) = (P/l)(l-a)\, c - l(c-a) = P(l-c)\, a/l.$

$M^\circ_e = \tfrac{1}{2} V_b . 2c = P\, ca/l.$

Di tempat P berdiri, $M^\circ_p = \tfrac{1}{2} V_a (c+a) = P(l-a)(c+a)/2l.$

Bidang M°_x di antara C dan D terdiri dari dua segitiga masing-masing dengan panjang-alas = 2c, yang satu tingginya = $M^\circ_d = P(l-c)\, a/l$ dan yang lainnya = $P(c+a)(c-a)/2c = P(c^2 - a^2)/2c$.

Jarak titik-beratnya dari C berturut-turut ada 2/3. 2c = 4/3 c dan $1/3\{2c + (a+c)\} = 1/3\,(3c + a)$.

Statis - momennya bidang-bidang ini terhadap titik C:

$P.c\{(l-c)\, a/l. \; 4/3c + (c^2 - z^2)/2c. \; 1/3\,(3c+a)\} =$

$P\{(l-c)a/l. \; 4/3\, c^2 + 1/6\,(c^2 - s^2)(3c+a)\}$

Statis momennya bidang M°_x di atas EF terhadap F = $P(c^2 a/l)$. 4/3 c.

P/l ca – 4/3 c^2 h kali luas bidang M°_x pada bagian DE = ½ h (l – 2c)

$(M^\circ_e + M^\circ_d) = \tfrac{1}{2} Ph\,(l - 2c)a$

$(\delta^\circ_h)' = P\, h/2c \{(l-c)\, a/l. \; 4/3\, c^2 + 1/6\,(c^2 - a^2)(3c+a) + ca/c. \; 4/3\, c^2\}$

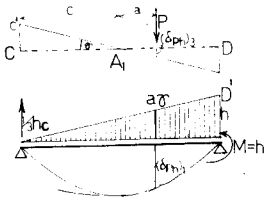
$+ \tfrac{1}{2} Ph\,(l - 2c)a = Ph\,\{2/3\, ca + 1/12\,(c^2 - a^2)(3 + a/c) + \tfrac{1}{2}(l - 2c)\, a\}.$

Pada a = c, menjadi P c h $(\tfrac{1}{2} l - 1/3\, c)$, cocok dengan pendapat di atas.

Pada a = o, terdapat ¼ Pc^2h; M°_x berbentuk segitiga dengan CD sebagai alas nya dan tingginya = ½ Pc.

Pada a = – c (P di atas C) terdapat Pch $(1/3c - \tfrac{1}{2} l)$.

Dengan hukum Maxwell (gb. VI, 35).
Kita tinjau batang CD yang dibebani dengan bidang - momen akibat dari - H = –1 itu, berordinat nol di C dan h di D.



Gambar VI, 35

Ini menimbulkan lenturan di tempat P berdiri sejauh :

$(\delta_{ph})_1 = (h/EI_b)\ \{1/3\ c\ (c + a) - 1/6\ (a+c) / 2c\ (a+c)^2\} = (h/EI_b c)$

$\{\ 1/3\ c^2 - 1/12\ (a^2 + 2ca + c^2)\} = (h/12EI_b c)(\ c + a)\ (c - a)\ (3c + a)$

$= (h/12EI_b c)\ (c^2 - a^2)\ (\ 3c + a).$

Kemudian mempelajari batang A_1B_1 yang dibebani dengan bidang momen - sepanjang DE = l – 2c dengan ordinat tetap = h.

Ini mengakibatkan $(\delta_{ph})_2 = (h/EI_b).\ ½\ (l - 2c)a.$

Di samping itu masih ada putaran sudut $\gamma = 2ch/3EI_b$ (lihat atas) yang-menghasilkan $(\delta_{ph})_3 = \gamma a = 2cha/3EI_b.$

dijumlahkan menjadi

$$\delta'_{ph} = EI_b\ \delta_{ph} = (\delta_{ph})'_1 + (\delta_{ph})'_2 + (\delta_{ph})'_3 =$$

$$h\{2/3\ ca + 1/12\ (c^2 - a^2)\ (3 + a/c) + ½\ (l - 2c)\ a\}$$

Setelah gaya H itu terdapat pada sesuatu pembebanan, maka kita dapat juga mempelajari balok terusan CDEF yang diletakkan di atas titik-titik C, D, E, dan F. Di dalam susunan statis-tertentu, kita menghitung dulu besar-an-besaran V_a dan V_b, kemudian $V^\circ_c = V^\circ_d = ½\ V_a$ dan V°_e dan $V^\circ_f = ½\ V_b$, Sesudah H terdapat, menghitung : $V'_c = -½\ H\ tg\ \varphi$, $V'_d + ½\ H\ tg\ \varphi$

$V'_e = ½\ H\ tg\ \varphi$ dan $V'_f = -½\ H\ tg\ \varphi$, sedang $tg\ \varphi = h/c$.

Selanjutnya : $V_c = V^\circ_c + V'_c$; $V_d = V^\circ_d + V'_d$; $V_e = V^\circ_e + V'_e$; $V_f = V^\circ_f + V'_f$.

Pada akhirnya menghitung momen-momen peralihan M_d dan M_e

Garis-garis pengaruh momen.

1. Momen di titik 1 di antara D dan E sejauh a, dari A_1

   $M_1 = M^\circ_1 - Hh = (M^\circ_1/h - H)\ h.$

   Garis pengaruh M°_1/h – berupa segitiga dengan ordinat puncak sebesar a $(l-a)$ $/lh$ atau ordinat fiktif = a_1/h di bawah A.

2. Momen di titik 2 antara C dan D sejauh a_2 dari A_2

   $M_2 = M^\circ_2 + V'_c\ (c + a_2) = M^\circ_2 - H\ (h/2c)\ (c+a_2) = (M^\circ_2.\ 2c/(c+a)h - H).$

   $$\frac{(c+a_2)\ h}{2c}$$

   Ordinat M°_2 di bawah titik 2 sendiri = $½\ V_a\ (c + a_2) = (l - a_2)$

   $(c + a_2)/2l.$

   Nilai a_2 diberi tanda positif jika diukur ke kanan dari A_1 dan negatif jika ke - kiri.

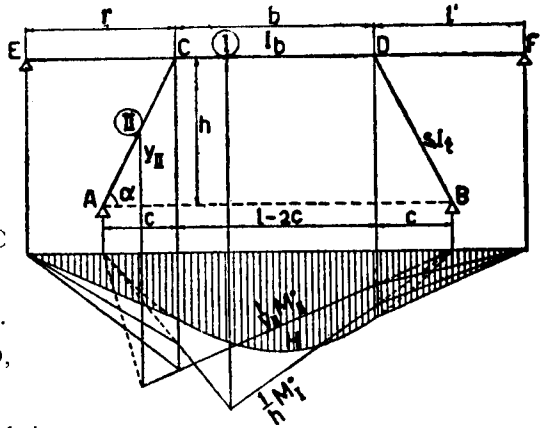
   Jika P berdiri di C maka $V^\circ c = ½\ Va - P$ sedang $Va = P\ (l+c)\ l$. Ordinat M°_2 di situ menjadi $-(l+c)\ (c+a_2)\ /\ 2\ l$ dan M°_2 $2c/\ (c + a_2)h = (l + c)\ c/\ lh.$

§33. Portal dengan balok.

Pada titik-titik hubungan antara balok dan portal (titik-titik C dan D) diadakan sendi, selanjutnya dapat dibandingkan dengan § 31.

$\delta'_{hh} = \frac{1}{3}(2k + 3)h^2$

Selama P berdiri di antara C dan D, rumus di dalam § 27, kejadian b dapat dipergunakan. Pada kedudukan P di luar CD, H tergantung kepada nilai V_c atau V_d dan selanjutnya memakai rumus tersebut tadi dan dengan a = o,



Gambar VI, 36

dan P = V_d, jadi

$$H = \tfrac{1}{2}V_c \cdot \frac{c}{h} \text{ atau } \tfrac{1}{2}V_d \cdot \frac{c}{h}$$

Nilai V_c bertanding lurus dengan jarak antara P dan E, jadi garis pengaruh H antara E dan C berjalan lurus dengan ordinat nol di E; begitu juga tentang garis pengaruh H bagian DF.

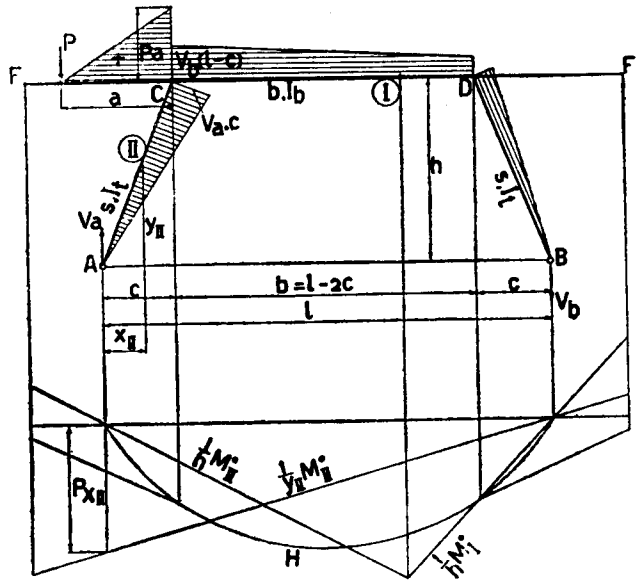
Pada gambar VI, 34 terlihat: garis-H, garis $\frac{1}{h} M_I^o$ dan $\frac{1}{y_{II}} M_{II}^o$.

Nilai M_{II}^o bertanding lurus dengan V_a, jadi mempunyai puncak di C.

$$M_I = \left(\frac{M_I^o}{h} - H\right) h \text{ dan } M_{II} = \left(\frac{M_{II}^o}{y_{II}} - H\right) y_{II}$$

§ 34. Portal dengan konsol.

$$\delta'_{hh} = \tfrac{1}{3}(2k + 3)h^2 \text{ (lihat atas)}$$



Gambar VI, 37

Pada kedudukan P sejauh a < b, di kanan, C tetap berlaku seperti di dalam § 31, b;

$$H = \frac{(2k + 3)c + 3(a/b)(1 - a/b)^b}{2(2k + 3)h} P$$

serta dengan $a = o$, $H = \frac{1}{2}P\frac{c}{h}$. Sekarang P berdiri di kiri C sejauh a.

$$V_a = \frac{(l + a - c)}{l} P \text{ dan } V_b = -\frac{(a - c)}{l} P$$

$$M_{ca}^o = V_a \cdot c = P\frac{(l + a - c)}{l} c;\ M_{cd}^o = M_{ca}^o - Pa = -P\frac{(l - c)(a - c)}{l} =$$

$$= V_b(l - c);\ M_{db}^o = M_{dc}^o = V_b c = -P\frac{(a - c)}{l} c$$

$P\delta_{hp} = \frac{1}{EI}$ statis momennya bidang M^o terhadap AB =

$$= \frac{1}{EI_t} \cdot \tfrac{2}{3}h \cdot \tfrac{1}{2}s \cdot (M_{ca}^o + M_{db}^o) + \frac{1}{EI_b} \cdot h \cdot \tfrac{1}{2}b(M_{cd}^o + M_{dc}^o) =$$

$$= P\left\{\frac{1}{EI_t} \cdot \tfrac{1}{3}hsc - \frac{1}{EI_b} \cdot \tfrac{1}{2}bh(a - c)\right\}$$

$$\delta'_{hp} = \frac{1}{b} EI_b \cdot \delta_{hp} = \tfrac{1}{3}khc - \tfrac{1}{2}h(a - c) = \tfrac{1}{6}\{(2k + 3)c - 3a\}h$$

$$H = P\frac{\delta'_{hp}}{\delta'_{hh}} = \frac{(2k + 3)c - 3a}{2(2k + 3)h}, \text{ serta dengan } a = o \text{ menjadi}$$

$$H = \tfrac{1}{2}P\frac{c}{h} \text{ (lihat atas)}$$

Jika P berdiri di atas A, atau $a = c$, maka

$$H = \frac{2k}{2(2k + 3)} \frac{c}{h} P, \text{ jadi } > o$$

$H = o$ jika $(2k + 3)c - 3a = o$; $a = \tfrac{1}{3}(2k + 3)c = c + \tfrac{2}{3}kc > c$

Bilamana P berdiri di atas A, $V_a = P$ dan $V_b = o$ yang berarti bahwa $M^o = o$ pada bagian CDB.

Selanjutnya lihat gambar garis-garis pengaruh

$$H, \frac{1}{h} M_I^o \text{ dan } \frac{1}{y_{II}} M_{II}^o$$

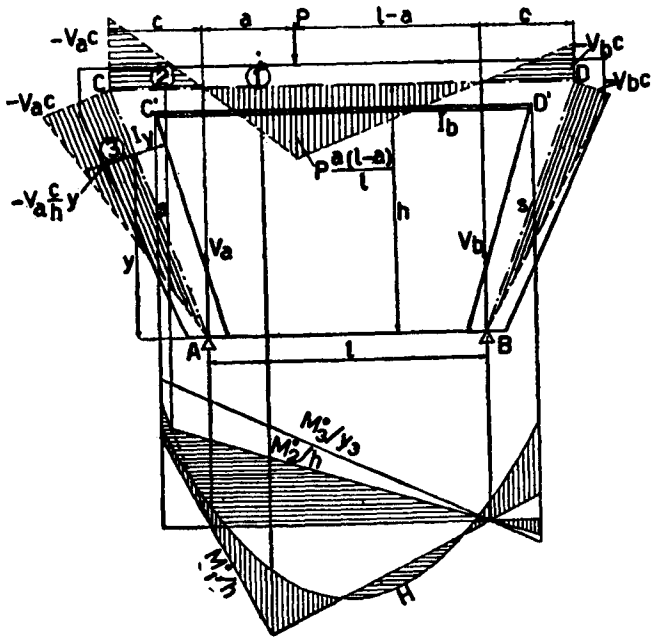
§ 35. Portal serong keluar

Momen inersia tihang sekarang tidak tetap lagi, tebal di kepala adalah t_1 dan di kaki (bawah) ada t_o, sedang $t_1 - t_o = mh$ dan $t_1 = \gamma\, t_o$.

$$y = \frac{1}{m}(t_1 - t_o);\ t_o/mh = (\gamma - 1)^{-1}$$

$$1/EI_o = \gamma^3/EI_1$$

Mengingat Bab IV H § 48 rumus (3a), kita mendapat :



Gambar VI. 38

$$\int y^2\, ds/EI_y = \frac{s}{h}\int y^2\, ds/EI_y = \frac{sh^2}{EI_1}\frac{\gamma^3}{(\gamma-1)^3}\left\{\tfrac{1}{2}(1-1/\gamma)\,(1/\gamma-3)+lg\ \gamma\right\} = \frac{sh^2}{EI_1}\cdot A$$

Ini kita tulis : $\frac{1}{3}\frac{sh^2}{EI_m}$ jadi $I_m = I_1/3A$

jadi $\int_o^h y^2\frac{ds}{EI_y} = \frac{1}{3}\frac{sh^2}{EI_m}$.

$$\delta_{hh} = 2\int_o^h y^2\frac{ds}{EI_y} + \frac{(l+2c)h^2}{EI_b} = \tfrac{2}{3}\frac{sh^2}{EI_m} + \frac{Lh^2}{EI_b},\ \text{sedang}\ \frac{s}{L}\cdot\frac{I_b}{I_m} = k$$

$$\delta'_{hh} = \delta_{hh}\cdot\frac{EI_b}{L} = (\tfrac{2}{3}k+1)h^2$$

Pada muatan P sejauh a dari A terdapat

$M^o_y = -V_a\cdot\frac{c}{h}y$ untuk tihang AC dan $M^o_y = -V_b\cdot\frac{c}{h}y$ untuk tihang BD. M^o_{balok} berupa segi tiga, positif di antara A dan B, dan negatif di luarnya.

$P\delta_{hp}$ = statis momen bidang $\frac{M^o}{EI}$ terhadap garis AB =

$$= -(V_a+V_b)\frac{c}{h}\cdot\int_o^h y^2\frac{ds}{EI_y} - \tfrac{1}{2}(V_a+V_b)c^2\frac{h}{EI_b} + \tfrac{1}{2}Pa(l-a)\frac{h}{EI_b} =$$

$$= P\left\{-\frac{c}{h}\cdot\frac{s}{h}\int_o^h y^2\frac{dy}{EI_y} - \tfrac{1}{2}\frac{c^2h}{EI_b} + \tfrac{1}{2}\frac{a(l-a)h}{EI_b}\right\} =$$

$$= P\left\{-\frac{c}{h}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\frac{sh^2}{EI_m} - \tfrac{1}{2}\frac{c^2h}{EI_b} + \tfrac{1}{2}\frac{a(l-a)h}{EI_o}\right\}$$

$$\delta'_{hp} = \delta_{hp}\frac{EI_b}{L} = \left(-\tfrac{1}{3}k\frac{c}{L} - \tfrac{1}{2}\frac{c^2}{L} + \tfrac{1}{2}\frac{a(l-a)}{L}\right)h$$

Jadi H itu melulu fungsi a; di sini a diberi nilai negatif jika P berdiri di kiri A dan $(l-a)$ menjadi dengan sendirian negatif jika $a > l$ (P di kanan B). Berhubung dengan ini, H bernilai negatif jika P berdiri diatas A atau B ($a = o$, atau $l - a = o$), dan seterusnya apabila P ada di luar AB.

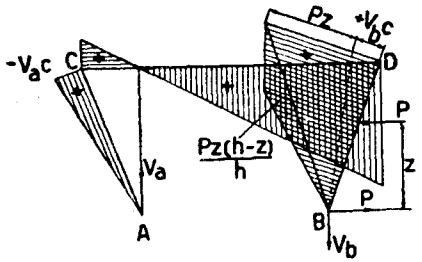
Oleh karena lantai lalu lintas berakhir di C' dan D', maka garis-garis pengaruh berakhir di situ juga, Di gambar VI 36 dilukiskan garis-garis pengaruh :

$$H,\ \frac{1}{h}\ M^o_1,\ \frac{1}{h}\ M^o_2\ \text{dan}\ \frac{1}{y_3}\cdot M^o_3.$$

Muatan mendatar P setinggi z di atas AB; Bidang-bidang M terlihat di gambar VI, 37.

$V_a = -V_b = P\frac{z}{l}$. Oleh karena keadaan simetris, akibat dari bi -

dang momen tihang AC' dihapuskan oleh akibat bagian bidang momen tihang BD yang berupa segitiga dengan tinggi $-V_b c = +P\frac{z}{l}c$.



Gambar VI, 39

Bidang momen tihang terdiri dari $\Delta BDB'$ dengan tinggi $D'B' = Pz$ serta ordinat $Pz\frac{y}{h} = P\frac{z}{h}y$.

Tinggi ordinat $\Delta BB'P'$ bagian bawah dengan $y \leqslant z$ ada $P\frac{(h-z)}{h}y$ dan bagian atas untuk $y \geqslant z$, ada $P\frac{z}{h}.(h-y)$. Tebal tihang di tempat P. adalah $t_z = \gamma' t_o$.

$$P\delta_{hp} = P\frac{z}{h}\int_o^h \frac{y^2 ds}{EI_y} + P\frac{(h-z)}{h}\int_o^z y^2\frac{ds}{EI_y} + P\frac{z}{h}\int_z^h (h-y)y\frac{ds}{EI_y} -$$

$$-\tfrac{1}{2}P\frac{z}{l}c^2\frac{h}{EI_h} + \tfrac{1}{2}P\frac{z}{l}(l+C)^2\frac{h}{EI_h}$$

$$\int_o^h y^2\frac{ds}{EI_o} = \tfrac{1}{3}\frac{sh^2}{EI_m}$$

$$\int_o^z y^2 ds/EI_y = \frac{s}{h}\int_{t_o}^{t_z} y^2\,dy/EI_y = \frac{sh^2}{EI_1}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^3\left\{\tfrac{1}{2}(1-1/\gamma')\,(1/\gamma'-3) + \right.$$

$$\left. + \lg\gamma'\right\} = \frac{sh^2}{EI_1}, B = \tfrac{1}{3}\frac{sh^2}{EI_m}\cdot\frac{B}{A}.$$

$$\int_z^h (h-y)y\frac{ds}{EI_y} = h\int_z^h \frac{yds}{EI_y} - \int_z^h y^2\frac{ds}{EI_y}\,;\int_z^h y^2\frac{ds}{EI_y} = \frac{s}{h}\int_{t_2}^{t_1} y^2 dy/EI_y = \frac{sh^2}{EI_1}$$

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^3\left\{\tfrac{1}{2}(1/\gamma'-1/\gamma)\,(1/\gamma'+1/\gamma-4) + \lg\gamma/\gamma'\right\} = \frac{sh^2}{EI_1}.C = \tfrac{1}{3}\frac{sh^2}{EI_m}\cdot\frac{C}{A}.$$

$$h\int_z^h y\frac{ds}{EI_y} = h\,\frac{s}{h}\cdot\int_{t_0}^{t_1}\frac{(t-t_o)dt}{t^3/EI_y} = \frac{s}{EI_l}\cdot\frac{\gamma^3}{(\gamma-1)^2}\cdot h^2\cdot t_o\left\{\frac{1}{t_o} - \frac{1}{t_z} - \tfrac{1}{2}t_o\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{t_o^2} - \frac{1}{t_z^2}\right)\right\} = \frac{sh^2}{EI_1}\frac{\gamma^3}{(\gamma-1)^2}\cdot\frac{1}{2(\gamma^1)^2}(\gamma^1-1)^2 = \frac{sh^2}{EI_1}\cdot\tfrac{1}{2}\frac{\gamma^3}{(\gamma^1)^2}\cdot\frac{(\gamma^1-1)^2}{(\gamma-1)^2} =$$

$$= \frac{sh^2}{EI_1}D = \tfrac{1}{3}\frac{sh^2}{EI_m}.D/A.$$

$$\delta'_{hp} = \left[\tfrac{1}{3}k\{z + (h-z)\,B/A + z(C/A - D/A) - \tfrac{1}{2}\frac{z}{l}\cdot\frac{c^2}{L} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(l+c)^2}{lL}z\right]h$$

$$= \{\tfrac{1}{3}k\,z\,(1 - B/A - C/A + D/A) + \tfrac{1}{2}z + h\,B/A\}\,h = f(z).$$

$$H = P\frac{\delta'_{hp}}{\delta'_{hh}}$$

Pendapat ini berguna akan menghitung akibat dari tekanan tanah sebesar $\gamma_t(h'-z)\,\mathrm{tg}^2(45° - \tfrac{1}{2}\varphi)\ \mathrm{t/m^2} = \psi(h'-z)$, jika γ_t = berat jenis tanah dan φ = sudut talud tanah; z diukur dari garis AB; h' = tinggi urugan tanah.

$$H = \frac{1}{\delta'_{hh}}\tfrac{1}{2}b\int_o^{h'}(h'-z)\,f(z)\,dz$$

Di sini b berarti lebar dinding penahan tanah. Pendapat hitungan tekanan tanah ini agak terlalu banyak oleh karena dinding penahan tak berdiri tegak lurus.

§36. Portal dengan batang tarik.

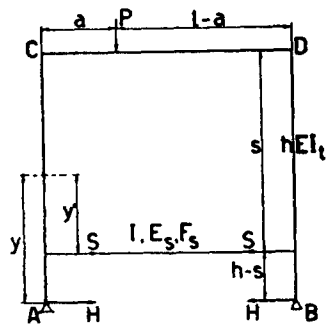
$$\frac{h}{l}\cdot\frac{I_b}{I_t} = k\,;\frac{s}{l}\cdot\frac{I_b}{I_t} = k'$$

Ordinat terhadap AB = y dan terhadap batang-tarik: $y' = y - (h-s)$

$$\delta'_{hh} = (\tfrac{2}{3}k+1)h^2 = \tfrac{1}{3}(2k+3)h^2$$

$$\delta'_{ss} = (\tfrac{2}{3}k'+1)s^2 + \frac{E}{E_s}\cdot\frac{F_b}{F_s}\cdot i_b^2 =$$

$$(1+\mu)\cdot\tfrac{1}{3}(2k'+3)s^2$$



Gambar VI, 40

$$\delta_{hs} = \delta_{sh} = \int yy' \frac{ds}{EI} = \frac{2}{EI_t}\int yy'dy + \frac{1}{EI_b} hsl$$

$$\int yy'dy = \int y(y - h + s)dy = [\tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{2}hy^2 + \tfrac{1}{2}sy^2]_{(h-s)}^{h} = [\tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{2}y^2(h-s)]_{h-s}^{h} =$$
$$= \tfrac{1}{3}h^3 - \tfrac{1}{2}h^2(h-s) + \tfrac{1}{6}(h-s)^3 = \tfrac{1}{2}hs^2 - \tfrac{1}{6}s^3 = \tfrac{1}{6}s^2(3h - s)$$

$$\delta_{hs} = \delta_{sh} = \frac{1}{3EI_t} s^2(3h - s) + \frac{1}{EI_b} hsl$$

$$\delta'_{hs} = \delta'_{sh} = \delta_{hs} \cdot \frac{EI_b}{l} = \tfrac{1}{3}s^2(3k - k') + hs$$

a. Muatan Vertikal P.

$$P\delta_{hp} = \frac{P}{EI_b} \cdot \tfrac{1}{2} \frac{a(l-a)}{l} \cdot l \cdot h = \frac{P}{EI_b} \cdot \tfrac{1}{2}a(l-a)h$$

$$\delta'_{hp} = \tfrac{1}{2}a(l-a)\frac{h}{l} \qquad \delta'_{sp} = \tfrac{1}{2}a(l-a)\frac{s}{l}$$

Persamaan-persamaan :

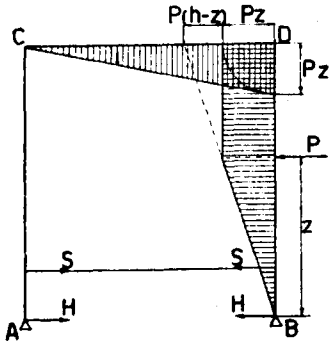
$$H\delta'_{hh} + S\delta'_{hs} = P\delta'_{hp} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$H\delta'_{sh} + S\delta'_{ss} = P\delta'_{sp} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dengan ini H dan S dapat dihitung. Kemudian:

$$M_c = -(Hh + Ss); M_{tiang} = -(Hy + Sy^1); M_d = M_c; M_{balok} = M^o_{blk} - M_c$$

b. Muatan mendatar P setinggi z di atas AB

$$\delta_{hp} = \frac{1}{EI_t}\left\{\int_o^h y^2dy - \tfrac{1}{2}(h-z)^2\left(h - \frac{h-z}{3}\right)\right\} + \frac{1}{EI_b}\tfrac{1}{2}zlh =$$
$$- \frac{1}{EI_t}\{\tfrac{1}{3}h^3 - \tfrac{1}{6}(h-z)^2(2h+z)\} +$$
$$+ \frac{1}{EI_b}\tfrac{1}{2}lhz = \frac{1}{EI_t}\tfrac{1}{6}h^2 \cdot z\left(3 - \frac{z^2}{h^2}\right) +$$
$$+ \frac{1}{EI_b}\tfrac{1}{2}lhz$$



Gambar VI, 41

$$\delta'_{hp} = \delta_{hp} \cdot \frac{EI_b}{l} = \tfrac{1}{6}hz\left\{3(k+1) - k\frac{z^2}{h^2}\right\} \text{ (lihat § 24, } b\text{)}$$

$$\delta_{sp} = \frac{1}{EI_t}\int_{h-s}^{h} yy'dy - \tfrac{1}{2}(h-z)^2\left(s - \frac{h-z}{3}\right) + \frac{z}{2EI_b}ls =$$
$$= \frac{1}{EI_t}\{\tfrac{1}{6}s^2(3h-s) - \tfrac{1}{6}(h-z)^2(3s-h+z)\} + \frac{1}{2EI_b}zls =$$
$$= \frac{1}{EI_t}\left\{\tfrac{1}{6}s^2(3h-s) - \tfrac{1}{6}sh^2\left(1 - \frac{z}{h}\right)^2\left(3 - \frac{h}{s} + \frac{z}{s}\right)\right\} + \frac{1}{2EI_b}lsz$$

$$\delta'_{sp} = \delta_{sp}\frac{EI_b}{l} = \tfrac{1}{6}s^2(3k - k') - \tfrac{1}{6}k^1h^2\left(1 - \frac{z}{h}\right)^2\left(3 - \frac{h}{s} + \frac{z}{s}\right) + \tfrac{1}{2}sz$$

$$H\delta'_{hh} + S\delta'_{hs} = P\delta'_{hp} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$H\delta'_{sh} + S\delta'_{ss} = P\delta'_{sp} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$
$$H_a = H; H_b = H - P$$

Kejadian khusus : batang tarik diletakkan antara A dan B, jadi $s = h$.

$$k = k^1; \delta'_{ss} = (1+u)\tfrac{1}{3}(2k+3)h^2 = (1+u)\delta'_{hh}$$
$$\delta'_{hs} = \delta'_{sh} = \tfrac{1}{3}(2k+3)h^2 = \delta'_{hh}$$
$$\delta'_{hp} = \delta'_{sp}; \mu = o; \Delta s = o$$

Persamaan-persamaan menjadi tergantung pada satu sama lain ini berarti bahwa salah satu gaya kelebihan harus hilang; jika H hilang berarti bahwa salah satu dari sendi menjadi rol, dan jika S hilang batang tarik ti-tidak ada.

§ 37. Garis penghubung AB serong.

Ketentuan-ketentuan : AC = h_1 dengan I_{t1}; BE = h_2 dengan I_{t2}; CD = s_1 dengan I_{b1}; DE = s_2 dengan I_{b2}; garis - penghubung AB membentuk sudut φ dengan garis-datar, garis-garis CD dan ED berturut-turut membentuk sudut α_1 dan sudut α_2 dengan garis penghubung CE yang mendatar.

Ordinat-ordinat diukur secara vertikal terhadap garis AB

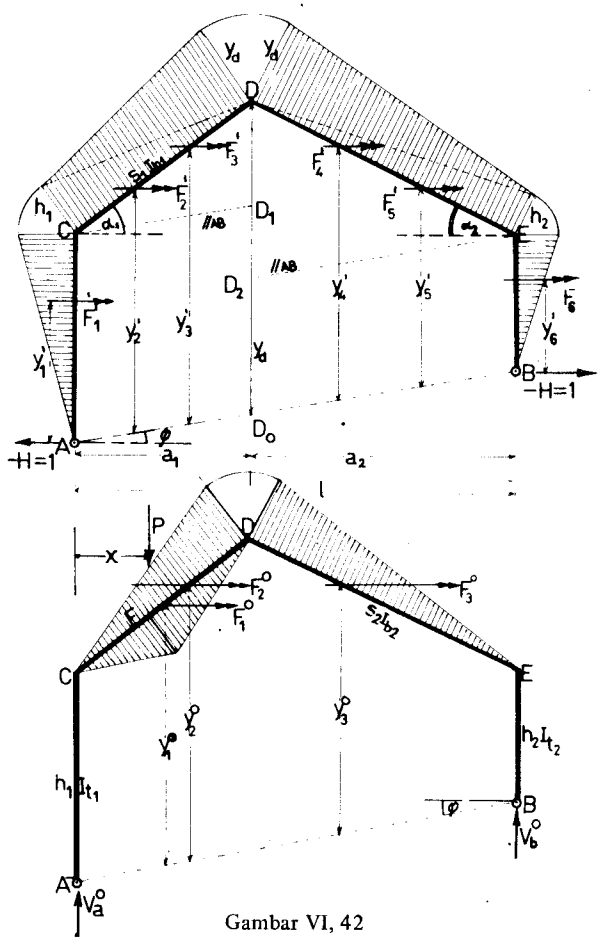
I **Hitungan besaran** δ_{hh}.

a) **Dengan cara geometri** momen - area).

Salah satu perletakan diganti rol dan mengerjakan gaya – H = 1 (keluar). Ini menghasilkan bidang-bidang momen seperti tergambar di sebelah kiri dengan

$M'_c = h_1$, $M'_e = h_2$ dan $M'_d = y_d\, h_1 + x\,(\text{tg}\,\alpha_1 - \text{tg}\,\varphi)$.

$F'_1 = \tfrac{1}{2}\, h_1^2$; $y'_1 = 2/3\; h_1$.



Gambar VI, 42

$F'_2 = \frac{1}{2} s_1 h_1$; $y'_2 = h_1 + 1/3a \ (\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\varphi)$

$F'_3 = \frac{1}{2} s_1 y_d$; $y'_3 = h_1 + 2/3a \ (\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\varphi)$

$F'_4 = \frac{1}{2} s_2 y_d$; $y'_4 = h_2 + 2/3\, a_2 \ (\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\varphi)$

$F'_5 = \frac{1}{2} s_2 h_2$; $y'_5 h_2 + 1/3\, a_2 \ (\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\varphi)$

$F'_6 = \frac{1}{2} h_2^2$; $y'_6 = 2/3\, h_2$.

$\delta_{hh} = \Sigma F'_o y'_o / EI_o = F'_1 y'_1 / EI_{t1}/E + (F'_2 y'_2 + F'_3 y'_3)/EI_{b1} E (F'_4 y'_4 +$

$+ F'_5 y'_5) / EI_{b2} + F'_6 Y'_6 / EI_{t2}$

b) **Secara analisa,** $\delta_{hh} = \int y^2 \, ds/EI$.

Dari titik C kita menarik garis CD_1 // AB dan dari E garis ED_2 // AB, sedang D_1 dan D_2 terletak pada garis vertikal yang melalui titik D.

Pada batang CD kita mengisi ds = dy CD/DD_1 dan pada batang ED menjadi ds = dy. ED/DD_2.

$$\delta_{hh} = \int y^2 \, dy/EI_{t1} + \int y^2 dy(CD/DD_1) / EI_{b1} + \int y^2 dy \ (ED/DD_2) /EI_{b2} + \int y^2 dy/EI_{t2}.$$

II. **Hitungan** δ°_h.

Kita ambil beban vertikal P di titik F sejauh x dari tihang AC (gambar kanan) cara geometri yang termudah.

$V^\circ_a = P\,(l-x)/l$; $V^\circ_b = P\,x\,/\,l$; $M^\circ_d = V^\circ_b . a_2$; $M^\circ_f = P \times (a_1 - x)/a_1$.

$F^\circ_1 = \frac{1}{2} s_1 M^\circ_f$; $y^\circ_1 = h_1 + 1/3\,(a_1 + x)(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\varphi)$.

$F^\circ_2 = \frac{1}{2} s_1 M^\circ_d$; $y^\circ_2 = h_1 + 2/3\, a_1 (\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\varphi)$.

$F^\circ_3 = \frac{1}{2} s_2 M^\circ_d$; $y^\circ_3 = h_1 + 2/3\, a_2 (\operatorname{tg}\alpha_2 \quad \operatorname{tg}\varphi)$,

$\delta^\circ_h = \Sigma F^\circ_y / EI = (F^\circ_1 y^\circ_1 + F^\circ_2 y^\circ_2) /EI_{b2} + F^\circ_3 y^\circ_3 / EI_{b2}$.

Untuk memudahkan pekerjaan, lipatkanlah besaran-besaran EI_{b1}/b_1 sehingga mendapatkan besaran-besaran tetap serta tak berdimensi:

$k_1 = (h_1/s_1)\,(I_{b1}/I_{t1})$; $k_2 = (h_2/s_2)\,(I_{b1}/I_{t2})$; $k = (s_2/s_1)\,(I_{b1}/I_{b2})$

yang dapat dihitung terlebih dahulu.
Lihat Bab VII.

Kejadian khusus. Bentuk simetris serta AB mendatar.
$h_1 = h_2 = h$; $s_1 = s_2 = s$; $I_{t1} = I_{t2} = I_t$; $I_{b1} = I_{b2} = I_b$;
$a_1 = a$. Tinggi titik D di atas garis penghubung CE = z. Jadi $y_d = h + z$

a1 **Cara geometri.**
$F' = \frac{1}{2} h^2$; $y'_1 = 2/3\, h$; $F'_2 = \frac{1}{2} sh$; $y'_2 = h + 1/3\, z$; $F'_3 = 1/3 s(h+z)$;
$y'_3 = h + 2/3\, z$.

$\delta_{hh} = 2\ F'_1\ y'_1\ /\ EI_t + 2\ (F'_2 y'_2 + F'_3 y'_3)/EI_b = (2/EI_t).\ ½h^2.\ 2/3h +$

$(2/EI_b)\ ½\ s\{h\ (h + 1/3\ z) + (h+z)\ (h + 2/3\ z)\}$

$= 2h^3/3EI_t + s(2h^2 + 2\ hz + 2/3\ z^2)/EI_b.$

b1 **Cara Analisa.** Pada batang-batang sarong mengisi $ds = dy.\ s/z.$

$\delta_{hh} = 2 \int y^2\ dy/EI_t + 2\ (s/z) \int y^2\ dy/EI_b = 2h^3/3EI_t +$

$2/3\ s\ \{\ h^2 + (h + z)\ h + (h+2)\ \}\ /EI_b. =$

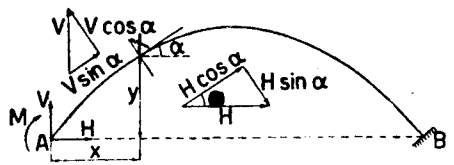
$2h^3/3EI_t + s(2h^2 + 2h^2 z + 2/3\ z^2)\ /\ EI_b.$

$\delta'_{hh} = \delta_{hh}\ EI_b/s = (2/3k + 2 + z/h + 2/3\ z^2\ /\ h^2)\ h^2$ jika $k = (h/s)\ (I_b/I_t).$

D. PELENGKUNG TERJEPIT

§38. **Dengan faktor-faktor pengaruh luar.**

Susunan menjadi statis tertentu jika salah satu perletakan (misalnya A) dihapuskan, jadi ujung busur di situ menggantung. Susunan dasar menjadi busur terjepit sebelah (di B). Untuk memulihkan keadaan, kita harus



Gambar VI, 43

mengadakan tiga jenis gaya reaksi di A, yaitu reaksi mendatar H, reaksi-vertikal V dan reaksi momen (momen jepit) M. Jadi bangunan ada statis tak tertentu berlipat tiga dengan gaya-gaya reaksi H, V dan M sebagai statis kelebihan. Nilai positif untuk H jika bekerja ke dalam, untuk V jika ke atas dan untuk M jika berputar ke kanan (seperti jarum jam).

Kita mempelajari akibat-akibat yang ditimbulkan oleh H, V dan M pada sesuatu tampang X dengan koordinat-koordinat: x dan y.

H menimbulkan:

$$M_{xh} = -H.y;\ N_{xh} = H\cos\alpha \text{ (menekan) dan } Q_{xh} = -H\sin\alpha.$$

V mengakibatkan : $M_{xv} = V.x;\ N_{xv} = V\sin\alpha$ dan $Q_{xv} = V\cos\alpha.$

M menyebabkan: $M_{xm} = M.$

Setelah dijumlahkan menjadi

$$M'_x = -Hy + Vx + M$$
$$N'_x = H\cos\alpha + V\sin\alpha$$
$$Q'_x = -H\sin\alpha + V\cos\alpha$$

Gaya-gaya yang bekerja pada tampang X ini berkehendak memindah serta memutar ujung A. Yang dianggap positif ialah: peralihan mendatar ke dalam, peralihan vertikal ke atas dan putaran sudut ke kanan.

Peralihan mendatar :

$$d'_h = -\int M'_x y\ \frac{ds}{EI} + \int N'_x \cos\alpha\ \frac{ds}{EF} - \int Q'_x \sin\alpha\ \frac{ds}{GF'}$$

Peralihan vertikal :

$$\delta'_v = \int M'_x x\ \frac{ds}{EI} + \int N'_x \sin\alpha\ \frac{ds}{EF} + \int Q'_x \cos\alpha\ \frac{ds}{GF'}$$

Putaran sudut : $\varphi' = \int M'_x\ \frac{ds}{EI}.$

$$\delta'_h = -\int (-Hy + Vx + M)\, y\ \frac{ds}{EI} + \int (H\cos\alpha + V\sin\alpha)\cos\alpha\ \frac{ds}{EF} -$$
$$-\int (-H\sin\alpha + V\cos\alpha)\sin\alpha\ \frac{ds}{GF'} = +H\left(\int y^2\ \frac{ds}{EI} + \right.$$
$$\left. + \int \cos^2\alpha\ \frac{ds}{EF} + \sin^2\alpha \int \frac{ds}{GF'}\right) + V\left(-\int xy\ \frac{ds}{EI} + \right.$$
$$\left. + \int \sin\alpha\cos\alpha\ \frac{ds}{EF} - \int \sin\alpha\cos\alpha\ \frac{ds}{GF'}\right) - \int My\ \frac{ds}{EI} =$$
$$= H\delta_{hh} + V\delta_{hv} + M\delta'_{hm}$$

$$\delta'_v = \int (-Hy + Vx + M)x\ \frac{ds}{EI} + \int (H\cos\alpha + V\sin\alpha)\sin\alpha\ \frac{ds}{EF} +$$
$$+ \int (-H\sin\alpha + V\cos\alpha)\cos\alpha\ \frac{ds}{GF'} =$$
$$= H\left(-\int xy\ \frac{ds}{EI} + \int \sin\alpha\cos\alpha\ \frac{ds}{EF} - \int \sin\alpha\cos\alpha\ \frac{ds}{GF'}\right) +$$
$$+ V\left(\int x^2\ \frac{ds}{EI} + \int \sin^2\alpha\ \frac{ds}{EF} + \int \cos^2\alpha\ \frac{ds}{GF'}\right) + \int Mx\ \frac{ds}{EI} =$$
$$= H\delta_{vh} + V\delta_{vv} + M\delta'_{vm}$$

$$\varphi' = \int (-Hy + Vx + M)\ \frac{ds}{EI} = -H\int y\ \frac{ds}{EI} + V\int x\ \frac{ds}{EI} + M\int \frac{ds}{EI} =$$
$$= H\varphi'_{mh} + V\varphi'_{mv} + M\varphi_{mm}$$

Di sini terbukti pula betulnya hukum Maxwell:

$$\delta_{hv} = \delta_{vh} = -\int xy\,\frac{ds}{EI} + \int \sin\alpha\cos\alpha\,\frac{ds}{EF} - \int \sin\alpha\cos\alpha\,\frac{ds}{GF'}$$

$$\delta'_{hm} = \varphi'_{mh} = -\int y\,\frac{ds}{EI}$$

$$\delta'_{vm} = \varphi'_{mv} = \int x\,\frac{ds}{EI}$$

Selanjutnya :

$$\delta_{hh} = \int y^2\,\frac{ds}{EI} + \int \cos^2\alpha\,\frac{ds}{EF} + \int \sin^2\alpha\,\frac{ds}{GF'}$$

$$\delta_{vv} = x^2\int\frac{ds}{EI} + \int \sin^2\alpha\,\frac{ds}{EF} + \int \cos^2\alpha\,\frac{ds}{GF'}$$

$$\varphi_{mm} = \int\frac{ds}{EI}$$

Sebagai akibat dari muatan luar, pada tampang X ditimbulkan momen sebesar M_x^o, kekuatan normal N_x^o dan kekuatan melintang Q_x^o.

Gaya-gaya ini berhasrat memindah serta memutar tampang A demikian: Arah peralihan ini dianggap positif, jika berlawanan dengan arah kerja reaksi-reaksi kelebihan, jadi mendatar ke luar, vertikal ke bawah dan berputar ke kiri.

Peralihan mendatar : $\delta_h^o = +\int M_x^o\,y\,\frac{ds}{EI} - \int N_x^o\cos\alpha\,\frac{ds}{EF} + \int Q_x^o\sin\alpha\,\frac{ds}{GF'}$

Peralihan vertikal : $\delta_v^o = -\int M_x^o\,x\,\frac{ds}{EI} - \int N_x^o\sin\alpha\,\frac{ds}{EF} - \int Q_x^o\cos\alpha\,\frac{ds}{GF'}$

Putaran sudut : $\varphi^o = -\int M_x^o\,\frac{ds}{EI}$.

Besaran-besaran ini dihitung pada susunan statis tertentu. Supaya tampang tidak beralih serta tidak berputar, diharuskan:

1. $\delta'_h = \delta_h^o$; atau $H\delta_{hh} + V\delta_{hv} + M\delta'_{hm} = \delta_h^o$
2. $\delta'_v = \delta_v^o$; ,, $H\delta_{vh} + V\delta_{vv} + M\delta'_{vm} = \delta_v^o$
3. $\varphi' = \varphi^o$; ,, $H\varphi'_{mh} + V\varphi'_{mv} + M\varphi_{mm} = \varphi_o$

Syarat-syarat mendapatkan persamaan-persamaan :

1. $H\delta_{hh} + V\delta_{hv} + M\delta'_{hm} = \int M_x^o\,y\,\frac{ds}{EI} - \int N_x^o\cos\alpha\,\frac{ds}{EF} + \int Q_x^o\sin\alpha\,\frac{ds}{GF'}$
2. $H\delta_{vh} + V\delta_{vv} + M\delta'_{vm} = -\int M_x^o\,x\,\frac{ds}{EI} - \int N_x^o\sin\alpha\,\frac{ds}{EF} - \int Q_x^o\cos\alpha\,\frac{ds}{GF'}$
3. $H\varphi'_{mh} + V\varphi'_{mv} + M\varphi_{mm} = -\int M_x^o\,\frac{ds}{EI}$

Jika muatan luar itu, seperti yang biasa, bekerja ke bawah maka nilai M_x^o dan Q_x^o itu negatif (balok terjepit sebelah di ujung kanan).

§ 39. **Secara langsung.**

Muatan luar dan gaya-gaya statis kelebihan mengakibatkan pada tampang X :

$$M_x = M_x^o - Hy + V_x + M$$
$$N_x = N_x^o + H\cos\alpha + V\sin\alpha$$
$$Q_x = Q_x^o - H\sin\alpha + V\cos\alpha$$

Titik A tak boleh beralih serta berputar sudut :

1. $-\int M_x\,y\,\frac{ds}{EI} + \int N_x\cos\alpha\,\frac{ds}{EF} - \int Q_x\sin\alpha\,\frac{ds}{GF'} = o$ (Peralihan mendatar)
2. $\int M_x\,x\,\frac{ds}{EI} + \int N_x\sin\alpha\,\frac{ds}{EF} + \int Q_x\cos\alpha\,\frac{ds}{GF'} = o$ (peralihan vertikal)
3. $\int M_x\,\frac{ds}{EI} = o$ (perputaran sudut)

1. $-\int(M_x^o - Hy + Vx + M)y\,\frac{ds}{EI} + \int(N_x^o + H\cos\alpha + V\sin\alpha)\cos\alpha\,\frac{ds}{EF} -$
$$-\int(Q_x^o - H\sin\alpha + V\cos\alpha)\sin\alpha\,\frac{ds}{GF'} = o$$

2. $\int(M_x^o - Hy + Vx + M)x\,\frac{ds}{EI} + \int(N_x^o + H\cos\alpha + V\sin\alpha)\sin\alpha\,\frac{ds}{EF} +$
$$+\int(Q_x^o - H\sin\alpha + V\cos\alpha)\cos\alpha\,\frac{ds}{GF'} = o$$

3. $\int(M_x^o - Hy + Vz + M)\,\frac{ds}{EI} = o$

$$1.\ H\left(\int y^2\frac{ds}{EI}+\int\cos^2\alpha\frac{ds}{EF}+\int\sin^2\alpha\frac{ds}{GF'}\right)+V\left(-\int xy\frac{ds}{EI}+\right.$$
$$\left.+\int\sin\alpha\cos\alpha\frac{ds}{EF}-\int\sin\alpha\cos\alpha\frac{ds}{GF'}\right)-M\int y\frac{ds}{EI}=$$
$$=\int M_x^o\,y\frac{ds}{EI}-\int N_x^o\cos\alpha\frac{ds}{EF}+\int Q_x^o\sin\alpha\frac{ds}{GF'}$$

$$2.\ H\left(-\int xy\frac{ds}{EI}+\int\sin\alpha\cos\alpha\frac{ds}{EF}-\int\sin\alpha\cos\alpha\frac{ds}{GF'}\right)+V\left(\int x^2\frac{ds}{EI}+\right.$$
$$\left.+\int\sin^2\alpha\frac{ds}{EF}+\int\cos^2\alpha\frac{ds}{GF'}\right)+M\int x\frac{ds}{EI}=$$
$$=-\int M_x^o\,x\frac{ds}{EI}-\int N_x^o\sin\alpha\frac{ds}{EF}-\int Q_x^o\cos\alpha\frac{ds}{GF'}$$

$$3.\ -H\int y\frac{ds}{EI}+V\int x\frac{ds}{EI}+M\int\frac{ds}{EI}=-\int M_x^o\frac{ds}{EI}$$

$$1.\ H\delta_{hh}+V\delta_{hv}+M\delta_{hm}=\int M_x^o\frac{ds}{EI}-\int N_x^o\cos\alpha\frac{ds}{EF}+\int Q_x^o\sin\alpha\frac{ds}{GF'}$$

$$2.\ H\delta_{vh}+V\delta_{vv}+M\delta_{vm}=-\int M_x^o\,x\frac{ds}{EI}-\int N_x^o\sin\alpha\frac{ds}{EF}-\int Q_x^o\cos\alpha\frac{ds}{GF'}$$

$$3.\ H\varphi_{mh}+V\varphi_{mv}+M\varphi_{mm}=-\int M_x^o\frac{ds}{EI}$$

§ 40. **Dengan hukum Castigliano.**

Pekerjaan deformasi :

$$U=\int M_x^2\frac{ds}{2EI}+\int N_x^2\frac{ds}{2EF}+\int Q_x^2\frac{ds}{2GF'}$$

Supaya tampang A tak beralih serta tak berputar sudut, maka terdapat :

$$\frac{dU}{dH}=o;\ \frac{dU}{dV}=o\ \text{dan}\ \frac{dU}{dM}=o$$

$$\int M_x\frac{dM_x}{dH}\frac{ds}{EI}+\int N_x\frac{dN_x}{dH}\frac{ds}{EF}+\int Q_x\frac{dQ_x}{dH}\frac{ds}{GF'}=o$$

$$\int M_x\frac{dM_x}{dV}\frac{ds}{EI}+\int N_x\frac{dN_x}{dV}\frac{ds}{EF}+\int Q_x\frac{dQ_x}{dV}\frac{ds}{GF'}=o$$

$$\int M_x\frac{dM_x}{dM}\frac{ds}{EI}=o$$

M_x, N_x dan Q_x diisi seperti yang tertulis di § 39.

$$\frac{dM_x}{dH}=-y;\ \frac{dN_x}{dH}=\cos\alpha;\ \frac{dQ_x}{dH}=-\sin\alpha$$
$$\frac{dM_x}{dV}=x;\ \frac{dN_x}{dV}=\sin\alpha;\ \frac{dQ_x}{dV}=\cos\alpha$$
$$\frac{dM_x}{dM}=1$$

$$1.\ -\int(M_x^o-Hy+Vx+M)x\frac{ds}{EI}+\int(N_x^o+H\cos\alpha+V\sin\alpha)\cos\alpha\frac{ds}{EF}-$$
$$-\int(Q_x^o-H\sin\alpha+V\cos\alpha)\sin\alpha\frac{ds}{GF'}=o$$

$$2.\ \int(M_x^o-Hy+Vx+M)x\frac{ds}{EI}+\int(N_x^o+H\cos\alpha+V\sin\alpha)\sin\alpha\frac{ds}{EF}+$$
$$+\int(Q_x^o-H\sin\alpha+V\cos\alpha)\cos\alpha\frac{ds}{GF'}=o$$

$$3.\ \int(M_x^o-Hy+Vx+M).\frac{ds}{EI}=o$$

Persamaan-persamaan ini tak lain ialah persamaan-persamaan yang terdapat di dalam § 34 tadi.

§ 41. **Dengan faktor-faktor pengaruh dalam.**

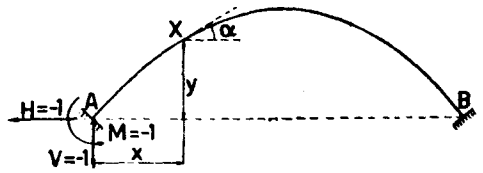
Di ujung A kita mengadakan gaya-gaya sebesar 1 yang arah kerjanya berlawanan dengan arah kerjanya gaya-gaya reaksi kelebihan.

Berdasarkan atas ini kita menentukan faktor-faktor pengaruh dalam berasal dari ketiga-tiga gaya kelebihan itu :

α_{mh}, α_{nh}, α_{qh}

α_{mv}, α_{nv}, α_{qv}

α_{mm}, α_{nm}, α_{qm}



Gambar VI, 44

α_{mh} = faktor pengaruh atas momen berasal dari $H=-1$
α_{nh} = faktor pengaruh atas kekuatan normal berasal dari $H=-1$
α_{qh} = faktor pengaruh atas kekuatan melintang berasal dari $H=-1$
α_{mv} = faktor pengaruh atas momen berasal dari $V=-1$, dst.

PERPUSTAKAAN DAERAH JAWA TIMUR
JL. MENUR PUMPUNGAN No. 32

Dengan mudah kita mendapat :

$\alpha_{mh} = y$; $\alpha_{nh} = -\cos\alpha$ (menarik); $q_{qh} = \sin\alpha$
$\alpha_{mv} = -x$; $\alpha_{nv} = -\sin\alpha$ (menarik); $\alpha_{qv} = -\cos\alpha$
$\alpha_{mm} = -1$; $\alpha_{nm} = -o$; $\alpha_{qm} = o$

1. $$H\left(\int\alpha_{mh}^2\frac{ds}{EI}+\int\alpha_{nh}^2\frac{ds}{EF}+\int\alpha_{qh}^2\frac{ds}{GF'}\right)+V\left(\int\alpha_{mh}\alpha_{mv}\frac{ds}{EI}+\right.$$
$$\left.+\int\alpha_{nh}\alpha_{nv}\frac{ds}{EF}+\int\alpha_{qh}\alpha_{qv}\frac{ds}{GF'}\right)+M\int\alpha_{mh}\alpha_{mm}\frac{ds}{EI}=$$
$$=\int M_x^o\alpha_{mh}\frac{ds}{EI}+\int N_x^o\alpha_{nh}\frac{ds}{EF}+\int Q_x^o\alpha_{qh}\frac{ds}{GF'}$$

2. $$H\left(\int\alpha_{mh}\alpha_{mv}\frac{ds}{EI}+\int\alpha_{nh}\alpha_{nv}\frac{ds}{EF}+\int\alpha_{qh}\alpha_{qn}\frac{ds}{GF'}\right)+V\left(\int\alpha_{mv}^2\frac{ds}{EI}+\right.$$
$$\left.+\int\alpha_{nv}^2\frac{ds}{EF}+\int\alpha_{qv}^2\frac{ds}{GF'}\right)+M\left(\int\alpha_{mv}\alpha_{mm}\frac{ds}{EI}\right)=$$
$$=\int M_x^o\alpha_{mv}\frac{ds}{EI}+\int N_x^o\alpha_{nv}\frac{ds}{EF}+\int Q_x^o\alpha_{qv}\frac{ds}{GF'}$$

3. $$H\int\alpha_{mh}\alpha_{mm}\frac{ds}{EI}+V\int\alpha_{mv}\alpha_{mm}\frac{ds}{EI}+M\int\alpha_{mm}^2\frac{ds}{EI}=\int M_x^o\alpha_{mm}\frac{ds}{EI}$$

1. $$H\left(\int y^2\frac{ds}{EI}+\int\cos^2\alpha\frac{ds}{EF}+\int\sin^2\alpha\frac{ds}{GF'}\right)+V\left(-\int xy\frac{ds}{EI}+\right.$$
$$\left.+\int\sin\alpha\cos\alpha\frac{ds}{EF}-\int\sin\alpha\cos\alpha\frac{ds}{GF'}\right)-M\int y\frac{ds}{EI}=$$
$$=\int M_x^o y\frac{ds}{EI}-\int N_x^o\cos\alpha\frac{ds}{EF}+\int Q_x^o\sin\alpha\frac{ds}{GF'}$$

2. $$H\left(-\int xy\frac{ds}{EI}+\int\sin\alpha\cos\alpha\frac{ds}{EF}-\int\sin\alpha\cos\alpha\frac{ds}{GF'}\right)+V\left(\int x^2\frac{ds}{EI}+\right.$$
$$\left.+\int\sin^2\alpha\frac{ds}{EF}+\int\cos^2\alpha\frac{ds}{GF'}\right)+M\int x\frac{ds}{EI}=$$
$$=-\int M_x^o x\frac{ds}{EI}-\int N_x^o\sin\alpha\frac{ds}{EF}-\int Q_x^o\cos\alpha\frac{ds}{GF'}$$

3. $$-H\int y\frac{ds}{EI}+V\int x\frac{ds}{EI}+M\int\frac{ds}{EI}=-\int M_x^o\frac{ds}{EI}$$

Ketiga-tiga persamaan ini ialah tak lain dengan :

$$H\delta_{hh}+V\delta_{hv}+M\delta'_{hm}=\delta_h^o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$H\delta_{hv}+V\delta_{vv}+M\delta'_{vm}=\delta_v^o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$H\varphi'_{mh}+V\varphi'_{mv}+M\varphi_{mm}=\varphi^o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

§ 42. Penyederhanaan.

Pendapat-pendapat tentang faktor pengaruh luar kita kumpulkan lagi :

$$\delta_{hh}=\int y^2\frac{ds}{EI}+\int\cos^2\alpha\frac{ds}{EF}+\int\sin^2\alpha\frac{ds}{GF'}$$
$$\delta_{hv}=\delta_{vh}=-\int xy\frac{ds}{EI}+\int\sin\alpha\cos\alpha\frac{ds}{EF}-\int\sin\alpha\cos\alpha\frac{ds}{GF'}$$
$$\varphi'_{mh}=\delta_{hm}=-\int y\frac{ds}{EI}$$
$$\delta_{vv}=\int x^2\frac{ds}{EI}+\int\sin^2\alpha\frac{ds}{EF}+\int\cos^2\alpha\frac{ds}{GF'}$$
$$\varphi'_{mv}=\delta'_{vm}=\int x\frac{ds}{EI}$$
$$\varphi_{mm}=\int\frac{ds}{EI}$$

Seperti dahulu, yang kita perhitung hanya deformasi berasal dari lengkungan (momen) dan dari tekanan yang disebabkan oleh H.

Dengan begitu kita mendapat :

$$\delta_{hh}=\int y^2\frac{ds}{EI}+\int\cos^2\alpha\frac{ds}{EF}=(1+\mu)\int y^2\frac{ds}{EI}\ \text{dengan}$$
$$\mu=\frac{\int\cos^2\alpha\,ds/EF}{\int y^2 ds/EI}\approx\frac{\int dx/EF}{\int y^2\,ds/EI}$$
$$\delta_{hv}=\delta_{vh}=-\int xy\frac{ds}{EI};\ \varphi^1_{mh}=\delta'_{hm}=-\int y\frac{ds}{EI}$$
$$\delta_{vv}=\int x^2\frac{ds}{EI};\ \varphi^1_{mv}=\delta'_{vm}=\int x\frac{ds}{EI}$$
$$\varphi_{mm}=\int\frac{ds}{EI}$$
$$\delta_h^o=+\int M_x^o y\frac{ds}{EI};\ \delta_v^o=-\int M_x^o x\frac{ds}{EI};\ \varphi^o=-\int M_x^o\frac{ds}{EI}$$

Besaran-besaran yang senantiasa dipakai ialah $\frac{ds}{EI}$, yang boleh kita anggap seperti "muatan." Berhubung dengan ini $\int \frac{ds}{EI}$ boleh dianggap sebagai "berat" batang yang sumbunya bersatu padu dengan sumbu busur, dan $\frac{ds}{EI}$ dinamakan berat-lengkungan bagian busur sepanjang ds.

Hitungan-hitungan di atas tadi didasarkan atas susunan-koordinat X Y yang titik-asalnya bersatu padu dengan titik A pada busur. Sekarang sebagai titik-asal O pada susunan koordinat XOY kita pilih titik-berat "batang" tersebut di atas, jadi titik berat besaran $\int \frac{ds}{EI}$.

Ini berarti bahwa :

$$\int x \frac{ds}{EI} = o; \int y \frac{ds}{EI} = o \text{ dan } \int xy \frac{ds}{EI} = o$$

Jadi sekarang, sumbu X dan sumbu Y menjadi sumbu-sumbu inersia-utama, dan berhubung dengan ini titik-asal O kita sebut: titik berat-lengkungan. Selanjutnya kita mencapai pula:

$$\delta_{hv} = \delta_{vh} = -\int xy \frac{ds}{EI} = o$$

$$\varphi'_{mh} = \delta'_{hm} = -\int y \frac{ds}{EI} = o$$

$$\varphi'_{mv} = \delta'_{vm} = \int x \frac{ds}{EI} = o$$

Dan kemudian,

$$H\delta_{hh} = \delta_h^o \text{ atau } H = \frac{\int M_x^o\, y\, ds/EI}{(1+\mu)\int y^2\, ds/EI}$$

$$V\delta_{vv} = \delta_v^o \;,, \quad V = -\frac{\int M_x^o\, x\, ds/EI}{\int x^2\, ds/EI}$$

$$M\varphi_{mm} = \varphi^o \;,, \quad M = -\frac{\int M_x^o\, ds/EI}{\int ds/EI}$$

Di dalam mengerjakan hitungan, lebih mudah jika besaran-besaran dilipatkan dengan sesuatu faktor yang tetap, yaitu EI_O, di mana I_O itu momen inersia pada sesuatu tampang, misalnya tampang puncak (atau – pangkal).

$$\delta'_{hh} = EI_o\delta_{hh} = (1+\mu)\int y^2\left(\frac{I_o}{I}\right)ds;\; H = \frac{\int M_x^o y(I_o/I)ds}{(1+\mu)\int y^2(I_o/I)ds}$$

dengan $\mu = \frac{i_o^2 \int \cos^2\alpha(F_o/F)ds}{\int y^2(I_o/I)ds} \simeq \frac{\int i_o^2(F_o/F)ds}{\int y^2(I_o/I)ds}$

$$\delta'_{vv} = EI_o\delta_{vv} = \int x^2\left(\frac{I_o}{I}\right)ds;\; V = -\frac{\int M_x^o(I_o/I)ds}{\int x^2(I_o/I)ds}$$

$$\varphi'_{mm} = EI_o\varphi_{mm} = \int\left(\frac{I_o}{I}\right)ds;\; M = -\frac{\int M_x^o(I_o/I)ds}{\int (I_o/I)ds}$$

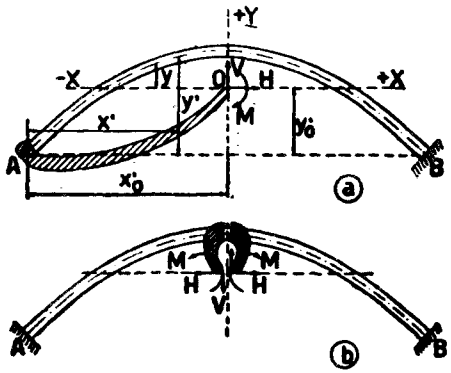
Jika nanti bekerja dengan bilangan-bilangan, jangan lupa memberi tanda minus di muka bilangan M_x^o.

Titik-pegangan gaya-gaya kelebihan H,V dan M juga turut pindah ke titik-asal baru O. Di dalam pikiran kita, kita menghubungkan titik O dan ujung busur A dengan perantaraan "ungkit yang tak terhingga teguhnya" (gambar VI, 43a). Dengan begitu, akibat dari gaya-gaya kelebihan H, V dan M yang bekerja di titik O dapat dilimpahkan kepada semua tampang busur dengan perantaraan ungkit itu. Dan sebagai hasil tetap:

$$M_x = M_x^o - Hy + Vx + M$$

Nilai x dan nilai y boleh jadi + atau –.

Untuk mencapai susunan statis tertentu, kita boleh memotong pelengkung di salah satu tampang (misalnya di puncak, gambar VI 43b), dan sebagai gaya-statis-tak tertentu menjadi gaya-gaya tampang di tempat potongan ini, yaitu gaya normal (berarah mendatar pada tampang puncak), gaya lin-



Gambar VI, 45

tang (arahnya vertikal untuk puncak) dan momen-lengkung. Jadi pada potongan di puncak juga boleh ditulis H, V dan M. Kemudian kedua-dua tampang potongan tadi masing-masing dihubungkan dengan titik asal O dengan perantaraan dua ungkit yang kaku tak terhingga.

Pada ujung-ujung ungkit di O terdapat dua pasang gaya kelebihan yang satu sama lain berlawanan arahnya (sebagai gaya-gaya dalam).

Perbedaan dengan cara menurut gambar VI, 38a terdapat pada nilai M_x^o, sebab susunan dasar (statis-tertentu) sekarang berlainan, yaitu terdiri dari dua bagian busur terpisah yang masing-masing dijepit di pangkalnya.

§ 43. Menentukan letak O.

Kita mengadakan susunan koordinat sementara, yang berasal di titik A misalnya (gambar VI, 43a). Koordinat-koordinat terhadap titik ini kita namakan x' dan y'. Koordinat-koordinat titik asal baru O (titik berat lengkungan) adalah x'_O dan y'_O (terhadap susunan A) yang terdapat demikian :

$$x'_O = \frac{\int x'(I_o/I)ds}{\int (I_o/I)ds} \approx \frac{\Sigma\, x'(I_o/I)\Delta a}{\Sigma (I_o/I)\Delta s}; y'_O = \frac{\int y(I_o/I)ds}{\int (I_o/I)ds} \approx \frac{\Sigma\, y'(I_o/I)\Delta s}{\Sigma (I_o/I)\Delta s}$$

Pendapat-pendapat yang terakhir ini dipakai apabila menjalankan integrasi tidak mungkin atau terlalu susah serta dengan secara membagi-bagi busur di dalam unsur-unsur kecil yang panjangnya = Δs. Besaran-besaran x', y', (I_o/I) diambil pada tengah-tengah unsur. Dengan begitu, rumus-rumus untuk H, V dan M menjadi :

$$H = \frac{\Sigma\, M_x^o y(I_o/I)\Delta s}{(1+\mu)\,\Sigma\, y^2(I_o/I)\Delta s}; V = \frac{-\Sigma\, M_x^o x(I_o/I)\Delta s}{\Sigma\, x^2(I_o/I)\Delta s}; M = \frac{-\Sigma\, M_x^o(I_o/I)\Delta s}{\Sigma (I_o/I)\Delta s}$$

Koordinat-koordinat x dan y diambil terhadap susunan baru yang berasal di O (juga diambil pada tengah-tengah unsur-pelengkung, begitu pula tentang nilai M_x^o).

Pada pelengkung tegak simetris, letak titik O di atas sumbu simetris vertikal, jadi $x'_O = \frac{1}{2}l$ dan selanjutnya kita hanya menghitung y'_O saja.

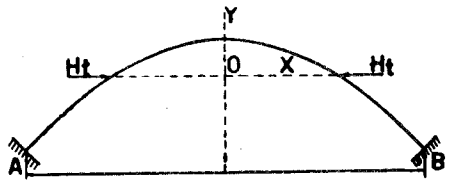
§ 44. Akibat panas.

Seluruh konstruksi naik t°C derajat panasnya. Busur berkehendak memanjang dan mendesak pangkal-pangkalnya keluar serta mendatar. Oleh karena puncak busur dapat naik-turun, maka peralihan vertikal pada pangkal dan juga putaran sudut tak akan ditimbulkan. Jadi hanya menimbulkan gaya reaksi kelebihan mendatar, H_t. Naik derajat panas ini berhasrat memanjangkan bentang busur dengan $t\gamma l$ yang di cegah oleh H_t.

$$H_t \,.\, \delta_{hh} = t\gamma l$$

$$H_t = \frac{t\gamma l}{\delta_{hh}} = \frac{EI_o t\gamma l}{\delta'_{hh}} = \frac{EI_o t\gamma l}{(1+\mu)\int y^2(I_o/I)ds}$$

Dengan begitu kenaikan derajat itu menimbulkan garis-tekan yang bersatu padu dengan sumbu-X. Hasil H_t itu positif untuk kenaikan derajat-panas (t positif) dan negatif untuk sebaliknya. Susut bangunan beton disamakan dengan turun derajat panas sebanyak 15°C (jadi menimbulkan H_t negatif).



Gambar VI, 46

Sekarang peristiwa bahwa derajat-panas tepi bawah $t_b >$ derajat-panas tepi atas t_a.

(Bandingkan §10). Ini mengakibatkan putaran sudut $d\varphi = (t_b - t_a)\gamma \frac{ds}{h}$

atau $d\varphi = \Delta t \,.\, \gamma \,.\, \frac{ds}{h}$ jika $\Delta t = t_b - t_u$ dan h = tebal tampang.

$$(\delta_h)_{\Delta t} = \int y\,d\varphi = \Delta t \,.\, \gamma \int y\,\frac{ds}{h}; H_{\Delta t} = \frac{EI_o \Delta t \,.\, \gamma \int y\,ds/h}{(1+\mu)\int y^2(I_o/I)ds}$$

$$(\delta_v)_{\Delta t} = \int x\,d\varphi = \Delta t \,.\, \gamma \int x\,\frac{ds}{h}; V_{\Delta t} = -\frac{EI_o \Delta t \,.\, \gamma \int x\,ds/h}{\int x^2(I_o/I)ds}$$

$$(\varphi)_{\Delta t} = \int d\varphi = \Delta t \,.\, \gamma \int \frac{ds}{h}; M_{\Delta t} = -\frac{EI_o \Delta t \,.\, \gamma \int ds/h}{\int (I_o/I)ds}$$

Jika tebal pelengkung itu tetap $= h_o$, maka $I_o/I = 1$ dan $\int yds = o$

$$\int xds = o; \int y\frac{ds}{h} = \frac{1}{h_o}\int yds = o; \int x\frac{ds}{h} = \frac{1}{h_o}\int xds = o$$

$$H_{\Delta t} = o;\ V_{\Delta t} = o$$

$$M_{\Delta t} = -\frac{EI_o\Delta t\,.\,\gamma}{h_o} = -\tfrac{1}{2}E\,.\,W_o\,.\,\Delta t\,.\,\gamma,$$ jika W_o = momen perlawanan tampang.

Tegangan lengkung $\sigma_{max} = \pm\dfrac{M_{\Delta t}}{W_o} = \mp\tfrac{1}{2}E\Delta t\gamma$.

Untuk beton umpamanya, $E\,.\,\gamma = 2.10^6.10^{-5}$ kg/cm² = 2 kg/cm².

Jadi $\sigma_{max} = \mp\Delta t$ kg/cm².

§ 45. Salah kedudukan.

Apabila kedudukan salah satu perletakan, misalnya perletakan A, berobah dari semestinya, peristiwa ini menimbulkan tegangan-tegangan extra di dalam bangunan. Sebagai Contoh, bentang bangunan bertambah dengan Δl (jadi hasil dari peralihan mendatar keluar atau negatif), titik A turun sejauh Δv (juga hasil peralihan negatif) dan tampang ujung A berputar sudut sebanyak $\Delta\varphi$ (dianggap ke kanan). Akibat dari peristiwa ini ialah:

$$H_{\Delta l} = \frac{-EI_o\Delta l}{(1+\mu)\int y^2(I_o/I)ds}$$

$$V_{\Delta v} = \frac{-EI_o\Delta v}{\int x^2(I_o/I)ds}$$

$$M_{\Delta\varphi} = \frac{EI_o\Delta\varphi}{\int(I_o/I)ds}$$

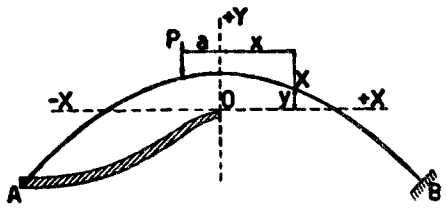
Ini menimbulkan gaya-gaya extra: $\Delta M_x = -H_{\Delta l}\,.\,y + V_{\Delta l}\,.\,x + M_{\Delta}\varphi$;

$\Delta N_x = H_{\Delta l}\cos\alpha + V_{\Delta v}\sin\alpha$; $\Delta Q_x = -H_{\Delta l}\,.\sin\alpha + V_{\Delta v}\,.\cos\alpha$.

§ 46. Garis-garis pengaruh H, V dan M.

Susunan statis-tertentu dipilih pelengkung terjepit sebelah di kanan (B). Muatan vertikal P berdiri sejauh a dari titik berat lengkungan O, dengan mengingat bahwa a diberi nilai negatif apabila P berdiri di kiri O.

Kita mempelajari sesuatu tampang dengan absis x serta ordinat y, dengan mengingat pula bahwa x bernilai negatif untuk tampang-tampang di sebelah kiri O dan y bernilai negatif pada tampang-tampang di bawah O.



Gambar VI, 47

Muatan P menimbulkan di dalam susunan statis tertentu hanya momen-momen pada tampang-tampang di sebelah kanan P, jadi yang mempunyai absis $x > a$ (diambil nilai aljabarnya).

$$M_x^o = -P(x-a)$$

$$\delta_{hp}^o = P\delta_{hp} = \int M_x^o y\frac{ds}{EI} = -P\int_a^{\frac{1}{2}l}(x-a)\,y\frac{ds}{EI}$$ (berarti ke dalam)

$$\delta_v^o = P\delta_{vp} = -\int M_x^o x\frac{ds}{EI} = +P\int_a^{\frac{1}{2}l}(x-a)x\frac{ds}{EI}$$ (berarti ke bawah)

$$\varphi^o = P\varphi_m'\varphi = -\int M_x^o\frac{ds}{EI} = +P\int_a^{\frac{1}{2}l}(x-a)\frac{ds}{EI}$$ (berarti ke kiri).

$$\delta_{hp}' = EI_o\,.\,\delta_{hp} = -\int_a^{\frac{1}{2}l}(x-a)y\left(\frac{I_o}{I}\right)ds$$

$$\delta_{vp}' = EI_o\,.\,\delta_{vp} = +\int_a^{\frac{1}{2}l}(x-a)x\left(\frac{I_o}{I}\right)ds$$

$$\varphi_{mp}' = EI_o\,.\,\varphi_{mp}'' = +\int_a^{\frac{1}{2}l}(x+a)\left(\frac{I_o}{I}\right)ds$$

$$H = \frac{\int M_x^o y(I_o/I)ds}{(1+\mu)\int y^2(I_o/I)ds} = +\frac{P\int_a^{\frac{1}{2}l}-(x-a)y(I_o/I)ds}{(1+\mu)\int y^2(I_o/I)ds} = P\frac{\delta_{hp}'}{\delta_{hh}'}$$

$$V = \frac{-\int M_x^o x(I_o/I)ds}{\int x^2(I_o/I)ds} = P\frac{\int_a^{\frac{1}{2}l}(x-a)\,x(I_o/I)ds}{\int_o^l x^2(I_o/I)ds} = P\frac{\delta_{vp}'}{\delta_{vv}'}$$

$$M = \frac{-\int M_x^o(I_o/I)ds}{\int(I_o/I)ds} = P\frac{\int_a^{\frac{1}{2}l}(x-a)\,(I_o/I)ds}{\int_o^l(I_o/I)ds} = P\frac{\varphi_m''\varphi}{\varphi_{mm}'}$$

a. **Garis-pengaruh H.** Besaran $y\left(\frac{I_o}{I}\right)ds = y\,dw$ dianggap sebagai "muatan"; $\delta'_{hp} = \int_a^{\frac{1}{2}l} -(x-a)y\,\frac{I_o}{I}\,ds = \int_a^{\frac{1}{2}l} -(x-a)\,y\,dw$, berarti "momen" di titik-pegangan P pada pelengkung terjepit di A yang dimuati dengan bidang-muatan dengan ordinat $y\frac{dw}{ds} = y\frac{I_o}{I}$. (δ'_{ph}) Bidang muatan ini kita pikirkan berdiri ⊥ bidang-busur (bidang-gambar) dan mengikuti sumbu pelengkung dengan "lebar" setempat ada $y\frac{I_o}{I}$.

$\delta'_{hh} = \int_o^l y^2\frac{I_o}{I}\,ds = \int_o^l y\,.\,(ydw)$ berarti statis momennya "bidang muatan" tersebut terhadap sumbu X dan ta' dipengaruhi oleh letak P; dan muatan (ydw) dianggap bekerja mendatar.

Jadi perjalanan garis pengaruh H boleh dilukiskan oleh garis-momen pada busur AB terjepit sebelah di A yang dimuati dengan ordinat $y\frac{I_o}{I}$. (yaitu δ'_{ph}).

b. **Garis pengaruh V.** Sekarang $x\frac{I_o}{I}\,ds = x\,dw$ dianggap sebagai muatan, dan $\delta'_{vp} = \int_a^{\frac{1}{2}l}(x-a)\;(x\,dw)$ berarti "momen" di bawah P pada busur terjepit sebelah di A yang dimuati oleh bidang muatan dengan ordinat $\frac{x\,dw}{ds} = x\frac{I_o}{I}(\delta'_{pv})$

Seperti di atas, bidang momen ini dipikirkan ⊥ bidang-busur dengan "lebar" setempat = $x\frac{I_o}{I}$.

$\delta'_{vv} = \int x^2\frac{I_o}{I}\,ds = \int x\,.\,(x\,dw)$ berarti statis momennya bidang-muatan tadi terhadap sumbu-Y dan bernilai tetap serta tak dipengaruhi oleh kedudukan P.

Jadi perjalanan garis-V boleh dilukiskan oleh garis momen pada busur terjepit sebelah di A tadi yang dimuati dengan ordinat $x\frac{I_o}{I}$.

c. **Garis pengaruh M.** Besaran $\frac{I_o}{I}\,ds = dw$ dianggap sebagai muatan" atau bidang $\int_o^l dw = \int_o^l \frac{I_o}{I}\,ds$ dianggap sebagai "bidang muatan".

$\varphi''_{mp} = \int_a^{\frac{1}{2}l}(x-a)dw$ = momen di bawah P pada balok terjepit sebelah di A sebagai akibat dari bidang momen tersebut.

$\varphi'_{mm} = \int_o^l dw =$ luas tampang bidang-muatan tadi yang tetap pula nilainya. Jadi garis-M dapat dilukiskan oleh garis momen pada busur terjepit sebelah di A yang dimuati oleh bidang-muatan dengan ordinat $\frac{dw}{ds} = \frac{I_o}{I}$ tadi.

§47. **Cara grafis.**

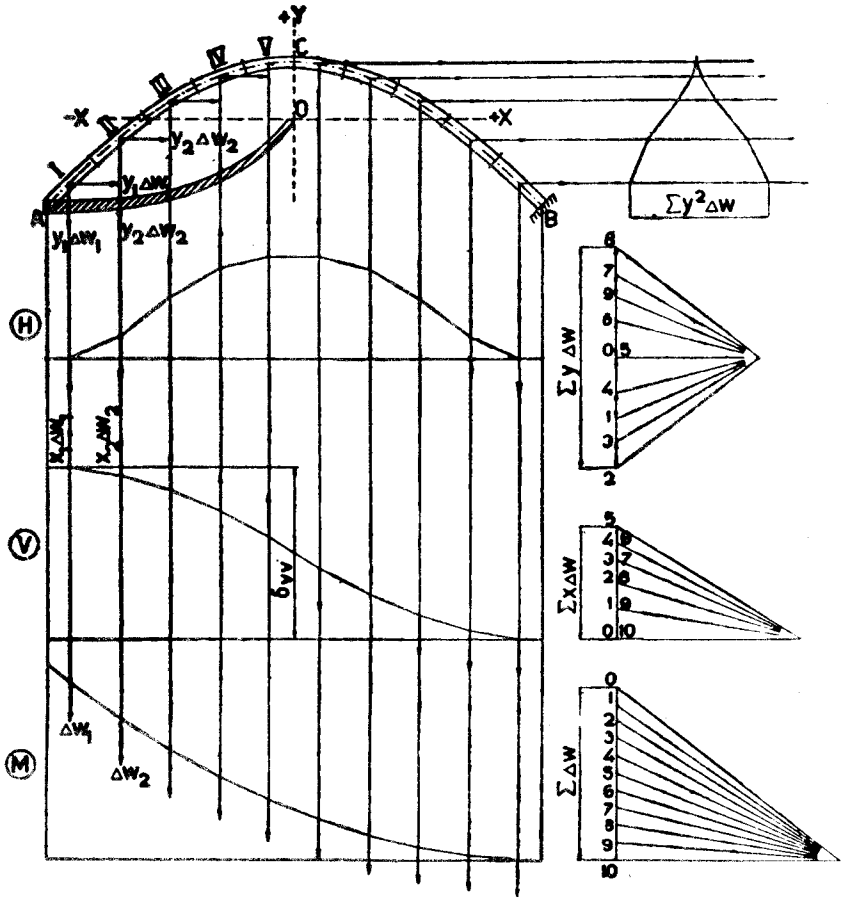
Pelengkung dibagi-bagi di dalam unsur-unsur kecil sepanjang Δs.

$\Delta w = \frac{I_o}{I}\Delta s$; besaran-besaran $x,\ y,\ \frac{I_o}{I}$ diambil di tengah-tengah elemen.

$$\delta'_{hh} = (1+\mu)\,\Sigma\,y^2\Delta w = (1+\mu)\Sigma\,y(y\Delta w);\ \delta'_{hp} = -\int_a^{\frac{1}{2}l}(x-a)\,.\,(y\Delta w)$$
$$\delta'_{vv} = \Sigma\,x^2\Delta w = \Sigma\,x(x\Delta w);\ \delta'_{vp} = \Sigma\,(x-a)\,(x\Delta w)$$
$$\varphi'_{mm} = \Sigma\,\Delta w;\ \varphi''_{mp} = \Sigma\,(x-a)\Delta w$$

Untuk menggambar garis-pengaruh H, besaran-besaran $(y\,.\,\Delta w)$ dianggap sebagai muatan, dengan memperhitung tanda + atau – dimuka y. Jadi jika $y\Delta w$ yang bernilai positif itu digambar sebagai muatan ke atas, maka $y\Delta w$ yang negatif digambar sebagai muatan ke bawah. Poligon-batang pada muatan-muatan ini yang digambar dengan perantaraan gambar-kutub, melukiskan garis δ'_{hp}, atau garis H.

Untuk mengetahui $\Sigma\,y\,.(y\Delta w) = \frac{1}{(1+\mu)}\,.\,\delta'_{hh}$, maka kekuatan-kekuatan $y\,.\,\Delta w$ digambar mendatar dan kemudian menggambar poligon batang yang sisi-sisinya ⊥ radius-kutub pada gambar-kutub tersebut di atas. Jarak mendatar antara kedua-dua sisi penghabisan pada poligon batang ini melukiskan besaran $\Sigma\,y^2\Delta w$.



Gambar VI, 48

Untuk melukiskan garis-V, besaran-besaran $(x \,.\, \Delta w)$ dianggap sebagai muatan dengan mengingat pula tanda-tanda + atau – dimuka x. Kemudian menggambar poligon-batang pada muatan-muatan ini dengan perantaraan gambar kutub pula, poligon-batang mana melukiskan perjalanan δ'_{vp} atau garis-V.

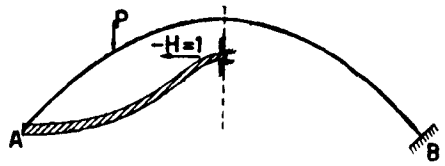
Nilai $\Sigma\, x^3 \Delta w = \delta'_{vv}$ terdapat sebagai jarak vertikal (diukur // sumbu-y) antara kedua-dua sisi-poligon penghabisan

Ketika menggambar garis-pengaruh M, besaran-besaran Δw dianggap sebagai muatan. Poligon-batang pada muatan-muatan ini melukiskan garis φ''_{mp} atau garis pengaruh M juga sedang $\varphi'_{mm} = \Sigma\,\Delta w$ = jumlah muatan muatan Δw ini.

Perlu diingat, bahwa di dalam menggambar satu dan lain, susunan dasar ialah balok AB terjepit sebelah di A.

§ 48. Pandangan lebih lanjut.

a. Garis-pengaruh H. Pekerjaan reaksi H itu ialah mencegah peralihan-mendatar pada ujung busur A. Ujung O pada ungkit A dipegang sehingga hanya dapat bergeser mendatar, jadi tak boleh beralih vertikal dan atau berputar (gambar VI, 49 a).



Gambar VI, 49*a*

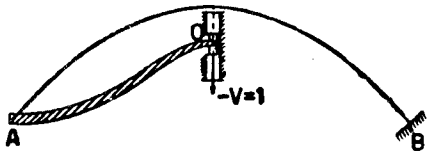
Dengan begitu, kemungkinan bekerjanya reaksi H dilenyapkan. Kemudian mengerjakan di titik O suatu kekuatan mendatar = 1 ke arah luar (atau – H = 1).

Ini menyebabkan, bahwa pada sesuatu tampang-busur X, terjadi gaya momen $M_{xh} = -Hy = y$. Titik di mana nanti muatan P akan berdiri, turun sejauh : 1 . $\delta_{ph} = \delta_{ph}$ yaitu ordinat garis-lentur pada titik itu sebagai akibat dari – H = 1 ini. Seperti telah diketahui, garis-lentur ini boleh dilukiskan oleh garis-momen yang ditimbulkan oleh bidang $\frac{\text{momen}}{EI}$ sebagai muatan. Ordinat bidang momen ini ialah y jadi ordinat muatan yang dimaksud itu ialah $\frac{y}{EI}$.

Muatan P memindahkan titik O atau A mendatar sejauh $P\delta_{hp}$, dan supaya O atau A kembali pada asalnya, kita memerlukan reaksi mendatar H di O sehingga $H\delta_{hh} = P\,.\,\delta_{hp}$, jadi $H = P\,\frac{\delta_{hp}}{\delta_{hh}}$, dan oleh karena menurut Maxwell, $\delta_{hp} = \delta_{ph}$, jadi $H = P\,\frac{\delta_{ph}}{\delta_{hh}}$ boleh dilukiskan oleh besaran δ_{ph} yang berarti ordinat garis-lentur termaksud di atas tadi.

Dengan begitu, kita dapat menarik kesimpulan, bahwa garis-pengaruh H boleh dilukiskan oleh garis-lentur yang ditimbulkan oleh kekuatan –H= 1 setelah kemungkinan bekerjanya dihapuskan. Ini sebetulnya mengulangi lagi hukum-umum yang dulu telah diterangkan pada bab II, §9 mengenai garis mengaruh gaya statis kelebihan.

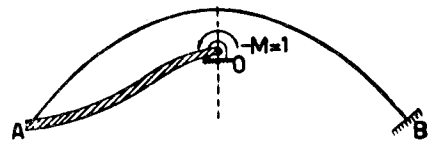
b. Garis pengaruh V. Ujung-ungkit O dipegang, sehingga hanya dapat bergerak vertikal, jadi tidak diperbolehkan bergerak mendatar dan/atau berputar. Ini berarti menghapuskan kemungkinan kerjanya reaksi-vertikal V. Kemudian mengadakan kekuatan = 1 ke bawah di titik O ini (atau mengerjakan –V= 1.) Garis-lentur ditimbulkan oleh ini melukiskan perjalanan garis pengaruh V. Keterangan seperti di atas mengenai garis – H.



Gambar VI, 49*b*

c. Garis pengaruh M. Untuk melenyapkan dapatnya bekerja reaksi M, maka titik O dipegangan dengan sendi sehingga O tak dapat bergerak mendatar dan/atau vertikal, sedang sendi ini memungkinkan berputarnya ungkit OA, jadi juga ujung pelengkung A.

Mengikuti uraian di atas tadi, maka garis pengaruh M dilukiskan oleh garis-lentur setelah di sendi itu kita mengadakan momen = – 1 (atau +1).



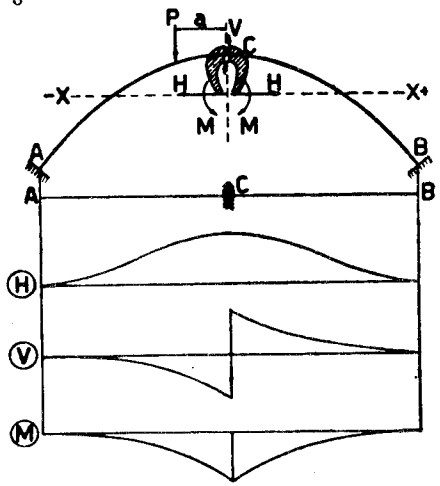
Gambar VI, 49*c*

§ 49. Secara mengadakan potongan di puncak.

Susunan dasar statis tertentu sekarang dua potongan busur AC dan BC yang masing-masing terjepit sebelah di pangkalnya. Rumus-rumus yang telah kita peroleh tetap berlaku.

$\delta'_{kp} = \int_a^{\frac{1}{2}l} -(x-a)\,(ydw)$ berarti momen di bawah P pada bagian busur terjepit sebelah di C yang dimuati dengan ordinat $y\frac{I_o}{I}$.

Oleh karena keadaan simetris, perjalanan garis-H serupa dengan apa yang terjadi di § 42.



Gambar VI, 50

Untuk menentukan garis-pengaruh V, maka $x\frac{I_o}{I}$ dianggap sebagai ordinat muatan.

Oleh karena V berganti tanda setelah melalui titik puncak C, bidang pengaruh V berbangun antimetris.

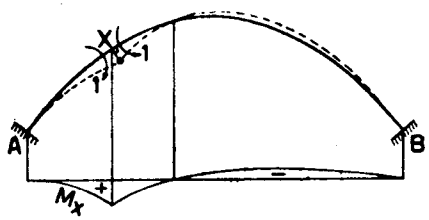
Garis-M berupa simetris juga dengan puncak di C, ordinat-ordinat-nya sama dengan ordinat-ordinat M di bagian BC pada susunan menurut § 47 (bagian kanan gambar VI, 48 terbawah).

§ 50. Garis-garis pengaruh gaya-tampang, M_X, N_X dan Q_X.

Setelah menentukan garis-garis pengaruh H, V dan M kita dapat menghitung M_X, N_X dan Q_X pada sesuatu tampang X untuk tiap kedudukan muatan bergerak P dengan rumus :

$$M_x = M_x^o - Hy + Vx + M$$
$$N_x = N_x^o + H\cos\alpha + V\sin\alpha$$
$$Q_x = Q_x^o - H\sin\alpha + V\cos\alpha$$

Dengan begitu kita dapat menggambar garis-garis pengaruh M_X, N_X serta Q_X. Di dalam praksis garis-garis pengaruh N_X dan Q_X tak usah dipakai, Q_X biasanya kecil nilainya dan tak akan membahayakan. Akibat N_X digabungkan dengan akibat M_X secara menggunakan momen inti (lihat § 17 penghabisan), yaitu M_{ka} untuk momen-inti atas dan M_{kb} untuk momen-inti bawah.



Gambar VI, 51

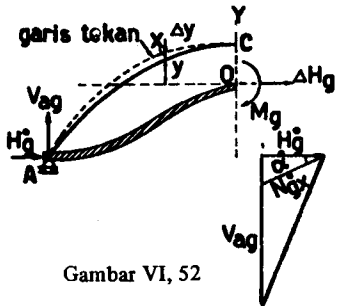
Untuk mengontrol betul tidaknya perjalanan garis M_X, kita menggunakan hukum Maxwell.

Kita menghapuskan kemungkinan bekerjanya M_X di tampang X secara mengadakan sendi di situ dan kemudian mengerjakan ditempat itu gaya-momen = 1. Sesudah itu menggambar dengan kasaran garis lenturnya, yang melukiskan perjalanan garis-pengaruh M_X. Jadi garis pengaruh M_X atau M_{ka} dan M_{kb} yang nanti kita peroleh dengan hitungan harus serupa dengan garis lentur tadi.

Sebagai susunan dasar untuk menggambar garis-lentur tadi, kita juga boleh mengambil balok lurus terjepit pada kedua-dua ujungnya di A dan B.

§ 51. Sumbu-pelengkung dan garis-tekan muatan tetap.

Busur serta muatan tetap G kita ambil tegak-simetris. Garis-tekan yang disebabkan oleh G kita tentukan melalui titik-titik-tengah kedua-dua



Gambar VI, 52

pangkal serta tampang puncak (ini selalu mungkin). Beda antara ordinat garis-tekan dan sumbu-busur adalah Δy yang dianggap positif jika garis-tekan lebih tinggi dari pada sumbu-pelengkung.

Oleh karena keadaan simetris $V_{ag} = \frac{1}{2}G$ dapat diketahui. Perletakan A diganti dengan rol dan dengan begitu bangunan menjadi statis tak tertentu berlipat dua, dengan H_g dan M_g sebagai reaksi statis tak tertentu, yang dianggap bekerja di titik berat lengkungan, O dengan perantaraan ungkit teguh OA.

H_g^o adalah lengan-kutub pada garis-tekan G.

Sebagian dari Hg sebesar Hg° kita pindahkan ke-rol A, kelebihannya sebesar ΔH_g tetap bekerja di O.

$$M_{gx}^o = H_g^o . \Delta y;\ N_{gx}^o = H_g^o \sec \alpha$$

$$M_{gx} = M_{gx}^o - \Delta H_g y + M_g = H_g^o . \Delta y - \Delta H_g . y + M_g$$

$$N_{gx} = N_{gx}^o + \Delta H_g \cos \alpha = H_g^o \sec \alpha + \Delta H_g \cos \alpha$$

Titik A tak boleh beralih : $$\int M_{gx} \frac{y\,ds}{EI} - \int N_{gx} \cos \alpha \frac{ds}{EF} = o \ldots\ldots (1)$$

Titik A tak boleh berputar : $$\int M_{gx} \frac{ds}{EI} = o \ldots\ldots (2)$$

$$H_g^o \int \Delta y . y \frac{ds}{EI} - \Delta H_g \int y^2 \frac{ds}{EI} +$$

$$+ M_g \int y \frac{ds}{EI} - H_g^o \int \frac{ds}{EF} - \Delta H_g \int \cos^2 \alpha \frac{ds}{EF} = o \ldots\ldots (1)$$

$$H_g^o \int \Delta y . \frac{ds}{EI} - \Delta H_g \int y \frac{ds}{EI} + M_g \int \frac{ds}{EI} = o \ldots\ldots (2)$$

Akan tetapi $\int y \frac{ds}{EI} = o$ (akibat dari letaknya titik O), jadi

$$M_g \int y \frac{ds}{EI} = \Delta H_g \int y \frac{ds}{EI} = o$$

$$\Delta H_g \left(\int y^2 \frac{ds}{EI} + \int \cos^2 \alpha \frac{ds}{EF} \right) = H_g^o \left(\int \Delta y . y \frac{ds}{EI} - \int \frac{ds}{EF} \right) \ldots\ldots (1)$$

$$\Delta H_g = \frac{(\int \Delta y \,.\, y\, ds/EI - \int ds/EF)}{(1+\mu)\int y^2\, ds/EI} H_g^o = \frac{\{\int \Delta y \,.\, y(I_o/I)ds - i_o^2 \int (F_o/F)ds\} H_g^o}{(1+\mu)\int y^2 (I_o/I)ds}$$

Reaksi mendatar di A menjadi: $H_{ag} = H_g^o + \Delta H_g$

$$M_g = -\frac{\int \Delta y (I_o/I)ds}{\int (I_o/I)ds} H_g^o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2,$$

Jika sumbu-busur bersatu-padu dengan garis-tekan, maka $\Delta y = o$

$$\Delta H_g = -\frac{i_o^2 \int (F_o/F)ds}{(1+\mu)\int y^2 (I_o/I)ds} H_g^o \text{ sedang } \mu = \frac{i_o^2 \int \cos^2\alpha (F_o/F)ds}{\int y^2 (I_o/I)ds} \infty$$

$$\infty \frac{i_o^2 \int (F_o/F)ds}{\int y^2 (I_o/I)ds}$$

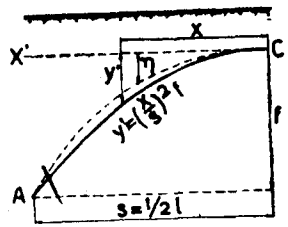
Jadi $\Delta H_g \approx -\frac{\mu}{(1+\mu)} \,.\, H_g^o \infty \; -\mu H_g^o$ (sebab $\mu \ll 1$)

Selanjutnya: $M_g = o$ dan $M_{gx} = -\Delta H_g \,.\, y \infty \frac{\mu}{(1+\mu)} H_g^o . y$ atau $\mu H_g^o y$

Sebagai teladan kita ambil pelengkung parabol, tegak-simetris. Muatan tetap terdiri dari berat sendiri busur dan berat urugan tanah yang di sini muka atasnya dianggap mendatar rata. Berhubung dengan kecilnya beda antara berat-jenis bahan-busur dan berat-jenis tanah dan juga kecilnya berat-sendiri dibandingkan dengan berat muatan tanah, maka boleh dianggap pula bahwa bidang muatan-tetap ini berbangun parabol juga, dengan ordinat di pucak-busur g_o dan ordinat dipangkal $g_a = \lambda g_o$, kedua-dua besaran mana telah diketahui.

Sebagai sumbu-absis kita pilih garis mendatar X′ melalui titik-puncak pelengkung C, jadi nanti ordinat-ordinat diukur terhadap garis ini.

Ordinat-muatan pada titik sejauh x dari C ada



Gambar VI, 53

$$g_x = g_o + \left(\frac{x}{s}\right)^2 (g_a - g_o), \text{ jika } s = \tfrac{1}{2}l$$

$$g_x = g_o\left\{1 + (\lambda - 1)\frac{x^2}{s^2}\right\}$$

Ordinat garis-tekan atau garis-momen (diukur dari X′), $\eta = \int\int g_x dx$

Sebab $Q_x = \int g_x dx$ dan $M_x = \int Q_x dx = \int\int g_x dx$ (nilai mutlaknya).

$$\frac{d\eta}{dx} = \int g_x dx = g_o \int \left\{1 + \lambda - 1)\frac{x^2}{s^2}\right\} dx = g_o \,.\, x\left\{1 + \tfrac{1}{3}(\lambda - 1)\frac{x^2}{s^2}\right\} + C_1$$

Pada $x = o$, $\frac{d\eta}{dx} = o$ (garis-singgung berjalan mendatar), jadi $C_1 = o$.

$$\eta = g_o \int x\left\{1 + \tfrac{1}{3}(\lambda - 1)\frac{x^2}{s^2}\right\} dx = g_o\, x^2 \left\{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{12}(\lambda - 1)\frac{x^2}{s^2}\right\} + C_2$$

Pada $x = o$, $\eta = o$, jadi $C_2 = o$ (garis-tekan melalui titik C)

Pada $x = \frac{1}{2}l = s$, $\eta = f$ (garis-tekan melalui titik A).

$$f = g_o s^2\{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{12}(\lambda - 1)\} = \tfrac{1}{12} g_o \,.\, s^2 (5 + \lambda)$$

$$g_o = \frac{12f}{s^2(5+\lambda)}$$

$$\eta = \frac{12f}{s^2(5+\lambda)} \,.\, x^2 \left\{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{12}(\lambda - 1)\frac{x^2}{s^2}\right\} = \frac{(x/s)^2\{6 + (\lambda - 1)(x/s)^2\}}{5+\lambda} f =$$

$$= \frac{\beta^2\{6 + (\lambda - 1)\beta^2\}}{(\lambda + 5)} f, \text{ jika } \beta = \frac{x}{s}$$

Ordinat sumbu-busur : $y' = \left(\frac{x}{s}\right)^2 f = \beta^2 f$.

$$\Delta y = y' - \eta = \frac{\beta^2 f}{(\lambda - 5)}\{\lambda + 5 - 6 - (\lambda - 1)\beta^2\} = \frac{(\lambda - 1)}{(\lambda + 5)} \,.\, \beta^2(1 - \beta^2) f$$

Δy- maksimum terdapat jika $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan bernilai $\frac{(\lambda - 1)}{(\lambda - 5)} \frac{3}{8} f$.

Jika $\lambda = 1$, jadi $q_o = q_a$ atau muatan menjadi terbagi rata, maka terdapat : $\eta = \beta^2 f = y'$ atau juga $\Delta y = o$. Dengan begitu garis-tekan berimpit dengan sumbu-pelengkung.

Sebagai purba-rencana, ada baiknya jika kita menggunakan rumus tadi untuk sumbu busur, supaya Δy tak begitu besar.

Jika sumbu-sumbu ditentukan menurut persamaan :

$$y' = \frac{(x/s)^2\{6 + (\lambda - 1)(x/s)^2\}}{(\lambda + 5)} f = \frac{\beta^2\{6 + (\lambda - 1)\beta\}}{(\lambda + 5)} f$$

maka persamaan garis tekan dapat dihitung demikian:

$$g_x = g_o + (g_a - g_o)\frac{x^2/s^2\{6 + (\lambda - 1)x^2/s^2\}}{(\lambda + 5)} =$$

$$= g_o\left[1 + \frac{(\lambda - 1)}{(\lambda - 5)} \cdot \frac{x^2}{s^2}\left\{6 + (\lambda - 1)\frac{x^2}{s^2}\right\}\right]$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \int g_x dx = g_o\left[x + 2\frac{(\lambda - 1)}{(\lambda + 5)} \cdot \frac{x^3}{s^2} + \tfrac{1}{5}\frac{(\lambda - 1)^2}{(\lambda + 5)}\frac{x^5}{s^4}\right] + C_1 \text{ dengan}$$

$C_1 = o$ seperti di atas

$$\eta = g_o\left[\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}\frac{(\lambda - 1)}{(\lambda + 5)} \cdot \frac{x^4}{s^2} + \tfrac{1}{30}\frac{(\lambda - 1)^2}{(\lambda + 5)}\frac{x^6}{s^4}\right] + C_2 \text{ dengan } C_2 = o \text{ pula}$$

$$\eta = \tfrac{1}{30}g_o x^2\left[15 + 15\frac{(\lambda - 1)}{(\lambda + 5)} \cdot \frac{x^2}{s^2} + \frac{(\lambda - 1)^2}{(\lambda + 5)} \cdot \frac{x^4}{s^4}\right]$$

$$x = s,\ \eta = f$$

$$f = \tfrac{1}{30}g_o \cdot s^2\left[15 + 15\frac{(\lambda - 1)}{\lambda + 5} + \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda + 5}\right] = \tfrac{1}{30}g_o s^2 \frac{15(2\lambda + 4) + (\lambda - 1)^2}{\lambda + 5}$$

$$g_o = \frac{30(\lambda + 5)}{\{15(2\lambda + 4) + (\lambda - 1)^2\}s^2} f$$

$$\eta = \frac{x^2}{\{15(2\lambda + 4) + (\lambda - 1)^2\}s^2}\left\{\{15(\lambda + 5) + 15(\lambda - 1)\frac{x^2}{s^2} + (\lambda - 1)^2\frac{x^4}{s^4}\right\} f$$

$$= \frac{\beta^2}{15(2\lambda + 4) + (\lambda - 1)^2}\{15(\lambda + 5) + 15(\lambda - 1)\beta^2 + (\lambda - 1)^2\beta^4\} f$$

Jika sumbu-pelengkung direncanakan menurut η ini, Δy akan terdapat lebih kecil lagi.

Sebagai nilai λ boleh diambil perbandingan tinggi tanah dipuncak diukur dari sisi-bawah busur dan tinggi-tanah di pangkal diukur dari titik-tengah tampang-pangkal, dan kemudian diambil bilangan bulat.

Sebagai contoh kita ambil $\lambda = 5$ dan $f = 1$ untuk membandingkan hasil-hasil menurut rumus-rumus di atas, yaitu :

$$\eta_1 = \beta^2 f \text{ (parabol biasa).}$$

$$\eta_2 = \frac{\beta^2\{6 + (\lambda - 1)\}}{(\lambda + 5)} f = \frac{\beta^2(6 + 4\beta^2)}{10}$$

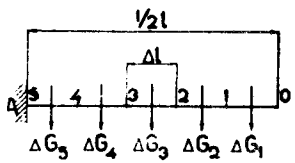
$$\eta_3 = \frac{\beta^2}{15(2\lambda + 4) + (\lambda - 1)^2}\{15(\lambda + 5) + 15(\lambda - 1)\beta^2 + (\lambda - 1)^2\beta^4\} . f =$$

$$= \frac{\beta^2}{226}(150 + 60\beta^2 + 16\beta^4)$$

$\beta = 0$	02,	0,4	0,6	0,8	1,0
$\eta_1 = 0$	0,04	0,16	0,36	0,64	1,0
$\eta_2 = 0$	0,025	0,106	0,268	0,546	1,0
$\eta_3 = 0$	0,027	0,114	0,289	0,553	1,0

§ 52. Cara grafis.

Secara grafis kita dapat menentukan ordinat-ordinat garis tekan demikian. Busur dibagi-bagi di dalam unsur-unsur sepanjang Δs dengan proyeksi-mendatar = Δx. Bidang muatan-tetap dibagi-bagi di dalam lajuran-lajuran $\Delta x \int_{\Delta xy} g_x dx = \triangle G$ adalah muatan yang garis kerjanya melalui titik tengah elemen busur (boleh diambil tengah-tengah Δx).



Gambar VI, 54

Sebagai susunan dasar diambil balok terjepit sebelah di A dengan bentang $\frac{1}{2}l$.

$$M_1 = \Delta G_1 . \tfrac{1}{2}\Delta x$$

$$M_2 = M_1 + \Delta G_1 . \Delta x + \tfrac{1}{2}\Delta G_2 \Delta x$$

$$M_3 = M_2 + (\Delta G_1 + \Delta G_2) . \Delta x + \tfrac{1}{2}\Delta G_3 . \Delta x$$

dan seterusnya hingga M_a.

M_a, dapat dihitung juga secara langsung :

$$M_a = \Delta G_1(\tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{2}\Delta x) + \Delta G_2(\tfrac{1}{2}l - 1\tfrac{1}{2}\Delta x) + \Delta G_3(\tfrac{1}{2}l - 2\tfrac{1}{2}\Delta x) + \ldots\ldots$$

$H_g^o = \dfrac{M_a}{f}$, jika $f =$ tinggi puncak busur di atas garis AB

$$\eta_{1a} = (\eta)_{x = \frac{1}{2}l} = \frac{M_a}{H_g^o} = f;\ \eta_o = o$$

$$\eta_{11} = M_1/H_g^o;\ \eta_2 = M_2/H_g^o, \text{ dst}$$

§53. Pelengkung lingkaran (bulat) simetris dengan EI tetap.

$l = 2r \sin \alpha, f = r(1 - \cos \alpha)$

$x = r \sin \alpha; y' = r(\cos \alpha - \cos \alpha_o)$

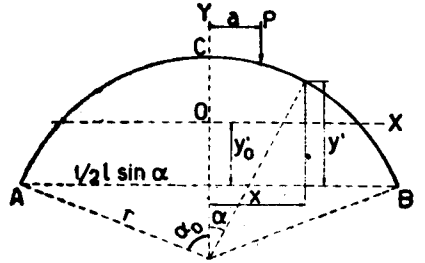
$ds = r d\alpha$

$$y_o = \frac{\int_o^{\alpha_0} y' ds}{\int_o^{\alpha_0} ds} = r\frac{\int(\cos \alpha - \cos \alpha_o) d\alpha}{\int d\alpha} =$$

$$= \frac{r}{\alpha_o}(\sin\alpha_o - \alpha_o\cos\alpha_o) =$$

$$= r\left(\frac{\sin\alpha_o}{\alpha_o} - \cos\alpha_o\right)$$

$$y = y' - y'_o = r\left(\cos\alpha - \frac{\sin\alpha_o}{\alpha_o}\right)$$



Gambar VI, 55

$$\delta'_{hh} = 2\int_o^{a_o} y^2 ds + i^2\int_o^{a_o}\cos^2\alpha ds =$$

$$= 2r^3\left\{\left(\int_o^{a_o}\cos\alpha - \frac{\sin\alpha_o}{\alpha_o}\right)^2 d\alpha + \frac{i^2}{r^2}\left(\int_o^{a_o}\cos^2\alpha d\alpha\right)\right\} =$$

$$= r^3\left\{\left(\alpha_o + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha_o - \frac{2\sin^2\alpha_o}{\alpha_o}\right) + \frac{i^2}{r^2}\left(\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha_o + \alpha_o\right)\right\}$$

$$\delta'_{vv} = 2\int_o^{a_o} x^2 ds = 2r^3\int_o^{a_o}\sin^2\alpha d\alpha = r^3(\alpha_o - \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha_o)$$

$$\varphi'_{mm} = 2\int_o^{a_o} ds = 2r\alpha_o$$

Muatan P berdiri sejauh $a = r\sin\alpha_1$ dari puncak

$$\delta'_{hp} = -\int_{a_1}^{a_o}(x-a)y ds = -r^3\int_{a_1}^{a_o}(\sin\alpha - \sin\alpha_1)\left(\cos\alpha - \frac{\sin\alpha_o}{\alpha_o}\right)d\alpha =$$

$$= -r^3\left[-\tfrac{1}{4}\cos 2\alpha + \frac{\sin\alpha_o}{\alpha_o}\cos\alpha - \sin\alpha_1\sin\alpha + \frac{\alpha}{\alpha_o}\sin\alpha_1\sin\alpha_o\right]_{a_1}^{a_o}$$

$$\delta'_{vp} = \int_{a_1}^{a_o}(x-a)x ds = r^3\int_{a_1}^{a_o}(\sin\alpha - \sin\alpha_1)\sin\alpha d\alpha =$$

$$= r^3\left[\tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{4}\sin 2\alpha + \sin\alpha_1\cos\alpha\right]_{a_1}^{a_o}$$

$$\varphi''_{mp} = \int_{a_1}^{a_o}(x-a)ds = r^2\int_{a_1}^{a_o}(\sin\alpha - \sin\alpha_1)d\alpha = r^2\left[-\cos\alpha - \alpha\sin\alpha_1\right]_{a_1}^{a_o}$$

$$H = P\delta'_{hp}/\delta'_{hh};\ V = P\delta'_{vp}/\delta'_{vv};\ M = P\varphi''_{mp}/\varphi'_{mm}$$

Kejadian khusus, P berdiri di puncak atau $\alpha_1 = o$.

$$V = \tfrac{1}{2}P;\ M = \frac{(1-\cos\alpha_o)}{2\alpha_o}Pr$$

P berdiri di A:

Jika susunan dasar itu perletakan A diganti dengan ungkit OA, maka: $H = o$; $V = P$ dan $M = Pr\sin\alpha_o = \tfrac{1}{2}Pl$; $M_c = M_c^o + V_o + M = -P\cdot\tfrac{1}{2}l + \tfrac{1}{2}Pl = o$; $Q_c = -P + V = o$

Sekarang susunan dasar menjadi dua belahan pelengkung CA dan CB.

Ini berarti bahwa $Q_c = o$ dan $M_c = M_c^o + M = o + o = o$, jadi cocok dengan pendapat di atas.

Muatan terbagi rata q pada bagian CB, α_1 di atas diganti dengan α yang variabel.

$$H = \frac{q}{\delta'_{hh}}\int_o^{a_o}\delta'_{hp}d\alpha;\ V = \frac{q}{\delta'_{vv}}\int_o^{a_o}\delta'_{vp}d\alpha;\ M = \frac{q}{\varphi'_{mm}}\int_o^{a_o}\varphi''_{mp}d\alpha$$

Jika muatan q itu penuh di atas seluruh busur, pendapat-pendapat di atas dilipatkan dengan dua (kecuali V).

§ 54. Pelengkung parabol simetris.

Kita pilih $I = I_o\sec\alpha$, jadi $\frac{I_o}{I}ds = \frac{1}{\sec\alpha}\cdot dx\sec\alpha = dx$.

Ordinat y' diukur dari sumbu X' – X' yang melalui titik puncak C. Persamaan sumbu bangunan:

$$y' = \left(\frac{x}{\frac{1}{2}l}\right)^2 f = 4\frac{f}{l^2}\cdot x^2$$

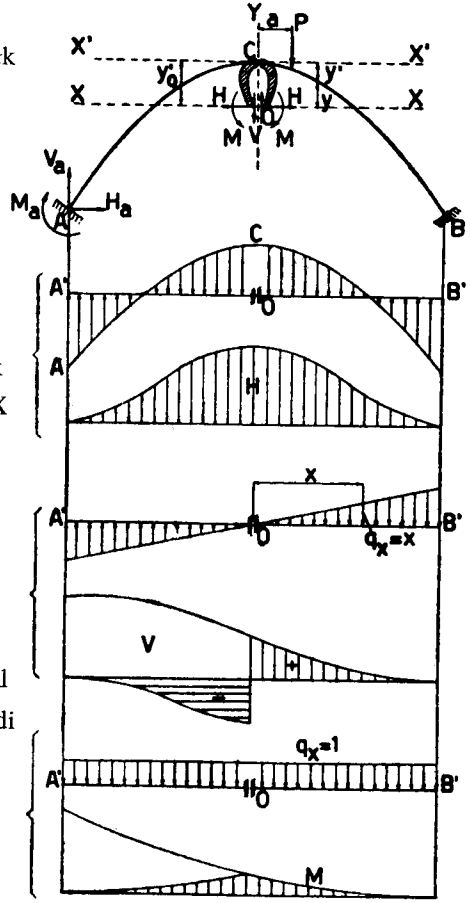
$$y'_O = \frac{\int y'(I_o/I)ds}{\int(I_o/I)ds} = \frac{\int_o^{\frac{1}{2}l} y'dx}{\int_o^{\frac{1}{2}l}dx} = \tfrac{1}{3}f$$

Jadi titik berat lengkungan, O terletak sejauh 1/3 f di bawah puncak C. Ordinat baru terhadap sumbu XX yang melalui O:

$$y = y'_O - y' = \tfrac{1}{3}f - \left(\frac{x}{\frac{1}{2}l}\right)^2 f =$$

$$= (\tfrac{1}{3} - \beta^2)f \text{ dengan } \beta = \frac{x}{\frac{1}{2}l}$$

Sebagai susunan dasar kita ambil busur yang dibelah dipuncaknya, jadi terdiri dari busur-busur CA dan CB yang masing-masing terjepit sebelah di A dan di B.



Gambar VI, 56

$$\delta'_{kk} = 2\left(\int_o^{\frac{1}{2}l} y^2\,dx + i_o^2\int_o^{\frac{1}{2}l}\cos^2\alpha\,.\,\frac{F_o}{F}\,.\,ds\right);$$

$dx = \frac{1}{2}l\,.\,d\beta\;\delta'_{kk} = (1+\mu)2\int_o^{\cdot}(\frac{1}{8}-\beta^2)^2f^2\,.\,\frac{1}{2}ld\beta = (1+\mu)\frac{4}{45}\,.\,lf^2$

$$\mu = \frac{2i_o^2\int_o^{\frac{1}{2}l}\cos^2\alpha dx}{\frac{4}{45}l^2f} \approx \qquad \approx \frac{i_o^2 l}{\frac{4}{45}l^2f} = \frac{45}{4}\frac{i_o^2}{f^2}$$

$$\delta'_{vv} = 2\int_o^{\frac{1}{2}l} x^2\,dx = \tfrac{1}{12}l^2\;;\quad \varphi'_{mm} = 2\int_o^{\frac{1}{2}l} dx = l$$

$\delta'_{kp} = -\int_o^{\frac{1}{2}l}(x-a)ydx$, berarti momen di bawah P pada balok yang dijepit sebelah di O yang dimuati dengan bidang-muatan dengan ordinat $\frac{ydx}{dx} = y$. Jadi bidang muatan ini serupa dengan bidang-busur sendiri dengan garis XX sebagai garis penutup, yang berarti bahwa bagian yang ada di bawah XX berlawanan tandanya dengan yang ada di atasnya.

$$\frac{a}{\frac{1}{2}l} = \nu \text{ dan } \frac{x}{\frac{1}{2}l} = \beta$$

$$\delta'_{kp} = -(\tfrac{1}{2}l)^2f\int_v^1(\beta-v)(\tfrac{1}{8}-\beta^2)d\beta = -(\tfrac{1}{2}l)^2f[\tfrac{1}{8}\beta^2 - \tfrac{1}{4}\beta^4 - \tfrac{1}{8}v\beta + \tfrac{1}{8}v\beta^3]_v^1 =$$
$$= (\tfrac{1}{2}l)^2f(\tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{8}v^2 + \tfrac{1}{12}v^4) = (\tfrac{1}{2}l)^2f\,.\,\tfrac{1}{12}(1-v^2)^2 =$$
$$= (\tfrac{1}{2}l)^2f\,.\,\tfrac{1}{12}(1-v)^2(1+v)^2 = \tfrac{1}{8}\frac{f}{l^2}(\tfrac{1}{2}l-a)^2(\tfrac{1}{2}l+a)^2 = \delta'_{ph}$$

$$\delta'_{vp} = \int_a^{\frac{1}{2}l}(x-a)xdx = (\tfrac{1}{2}l)^3\int_v^1(\beta-v)d\beta = (\tfrac{1}{2}l)^3[\tfrac{1}{3}\beta^3 - \tfrac{1}{2}v\beta^2]_v^1 =$$
$$= (\tfrac{1}{2}l)^3(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{6}v^3) = (\tfrac{1}{2}l)^3\,.\,\tfrac{1}{6}(2-3v+v^3) =$$
$$= \tfrac{1}{6}(\tfrac{1}{2}l)^3\,.\,(2+v)(1-v^2) = \tfrac{1}{6}(l+a)(\tfrac{1}{2}l-a)^2 = \delta'_{pv}$$

Ini berarti juga momen di bawah P pada balok A′B′ terdapat di O yang dimuati dengan bidang-momen berupa segi-tiga dengan ordinat = x

$\varphi''_{mp} = \int_a^{\frac{1}{2}l}(x-a)dx = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}l-a)^2. = \delta'_{pm}$. Dianggap sebagai momen di bawah P pada balok A′B′ terjepit di O yang dimuati terbagi rata dengan ordinat muatan = 1.

$$H = P\,\frac{\delta'_{kp}}{\delta'_{kk}} = \frac{15}{4}\frac{(\frac{1}{2}l-a)^2(\frac{1}{2}l+a)^2}{(1+\mu)l^3f}\,.\,P$$

$$V = P\,\frac{\delta'_{vp}}{\delta'_{vv}} = \frac{2(l+a)(\frac{1}{2}l-a)^2}{l^3}\,.\,P;\; M = P\,\frac{\varphi'_{mp}}{\varphi'_{mm}} = \tfrac{1}{2}\frac{(\frac{1}{2}l-a)^2}{l}\,.\,P$$

Akibat dari muatan terbagi rata q di atas bagian CB: Besaran a dibuat variabel dan P diganti dengan dP = qda.

$$H = \frac{1}{\delta'_{kk}}\int_o^{\frac{1}{2}l}\delta'_{kp}\,.\,dP = \frac{15q}{4(1+\mu)l^3f}\int_o^{\frac{1}{2}l}(\tfrac{1}{2}l+a)^2(\tfrac{1}{2}l-a)^2da =$$
$$= \frac{15q}{4(1+\mu)l^3f}\cdot\tfrac{1}{60}l^5 = \frac{\frac{1}{16}ql^2}{(1+\mu)f}$$

$$V = 2\,\frac{q}{l^3}\int_o^{\frac{1}{2}l}(l+a)(\tfrac{1}{2}l-a)^2da = \tfrac{3}{32}ql$$

$$M = \frac{q}{2l}\int_o^{\frac{1}{2}l}(\tfrac{1}{2}l-a)^2da = \tfrac{1}{48}ql^2$$

Pembagian gaya-gaya pada beberapa tampang pelengkung:

Tampang A (dengan $y_a = -\frac{2}{3}f$ dan $x_a = -\frac{1}{2}l$):

$$M_a = -H\,.\,y_a - V\,.\,\tfrac{1}{2}l + M = ql^2\left(\frac{1}{(1+\mu}\cdot\tfrac{1}{24} - \tfrac{3}{64} + \tfrac{1}{48}\right) =$$
$$= \tfrac{1}{192}ql^2\left(\frac{8}{1+\mu} - 5\right) = \frac{3-5\mu}{192(1+\mu)}\cdot ql^2$$

$V_a = V = \frac{3}{32}ql$; $H_a = H = \dfrac{\frac{1}{16}ql^2}{(1+\mu)f}$. Jika $\mu = o$, $M_a = \frac{1}{64}ql^2$

Tampang C (sedang $y_c = +\frac{1}{8}f$ dan $x_c = o$):

$$M_c = -H\,.\,y_c + M = ql^2\left(\frac{-1}{(1+\mu)48} + \tfrac{1}{48}\right) = \frac{\mu}{1+\mu}\cdot\tfrac{1}{48}\,ql^2$$

$$Q_c = V = \tfrac{3}{32}\,ql;\; H_c = H$$

Tampang B (dengan $M_b^o = -\frac{1}{32}q(\frac{1}{2}l)^2$):

$$M_b = -\tfrac{1}{32}q(\tfrac{1}{2}l)^2 - Hy_b + V\,.\,\tfrac{1}{2}l + M = -\tfrac{1}{8}ql^2 + \frac{1}{24(1+\mu)}\,ql^2 +$$
$$+ \tfrac{3}{64}ql^2 + \tfrac{1}{48}ql^2 = \tfrac{1}{192}ql^2\left(\frac{8}{(1+\mu)} - 11\right) = -\tfrac{1}{192}\cdot\frac{(3+11\mu)}{(1+\mu)}\cdot ql^2$$

$V_b = \frac{1}{32}ql - V = \frac{13}{32}ql$; $H_b = H$. Jika $\mu = o$, $M_b = -\frac{1}{64}ql^2$

Muatan penuh, terbagi rata q: Hasil-hasil untuk H, dan M di atas dikalikan dengan dua. $H = \dfrac{\frac{1}{8}ql^2}{(1+\mu)f}$; $V = o$; $M = \frac{1}{24}ql^2$.

$$M_a = M_b = -\tfrac{1}{32}ql^2 + H\,.\,\tfrac{2}{3}f - V\,.\,\tfrac{1}{2}l + M = \tfrac{1}{192}ql^2\left(\frac{16}{1+\mu} - 16\right) =$$
$$= -\tfrac{1}{12}\cdot\frac{\mu}{(1+\mu)}\,ql^2$$

$$V_a = V_b = \tfrac{1}{2}ql$$

$$\text{Mc} = \frac{\mu}{(1+\mu)}\;\frac{1}{24}\;\text{ql}^2\;;\;\text{Qc} = \text{V} = 0$$

§ 55. Potongan di pangkal A.

Sekarang sebagai susunan dasar kita ambil busur dipotong di pangkal A dengan ungkit OA.

Perjalanan garis-H tetap sama. Bagian garis-garis pengaruh V dan M di bagian BC tetap sama, akan tetapi mulai dari C harus diteruskan secara kontinu (lihat gambar VI,56). Kemudian besaran a bernilai di antara –½l dan +½l.

Beban ½ ql di atas AC.

H = $ql^2/16$ (1 + a) f, tak berobah.

V = $(2q)l^3) \int_{-l/2}^{o} (½l - a)^2$ (l + a) da = 13/32 ql.

M = $(q/21) \int_{-l/2}^{o} (½ l - 2)^2$ da = 7/48 ql^2

M_a^o = 0; M_c^o = – 1/8 ql^2; M_b^o = – 3/8 ql^2

M_a = 0 – ql^2/ 16(1+μ)f. 2/3 f – 13/32 ql. ½ l + 7/48 ql^2 =

– ql^2 (3 + 11μ) / (1 + μ) 192.

M_c = ql^2 (– 1/8 – 1/16(1+μ). 1/3 + 0 + 7/48) = ql^2 μ/(1+ μ) 48

M_b = ql^2 (– 3/8 + 1/16(1+μ). 2/3 + 13/32. 7/48) = ql^2 (3–5μ)/(1 +μ)192.

Terlihat bahwa jika yang dibebani itu sebelah saja cara dengan ung - kit C0 lebih mudah.

Muatan penuh terbagi rata, q.

$H = \frac{15q}{4(1+\mu)l^3} \cdot \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} (\frac{1}{2}l - a)^2 (\frac{1}{2}l + a)^2 da = \frac{\frac{1}{8}ql^2}{(1+\mu)f}$ sama dengan hasil di atas)

$V = \frac{2q}{l^3} \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} (\frac{1}{2}l - a)^2 (l + a) da = \frac{1}{2}ql$ (jadi tidak o seperti di atas)

$M = \frac{q}{2l} \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} (\frac{1}{2}l - a)^2 das = \frac{1}{6}ql^2$ (berlainan juga dengan pendapat di atas)

$$M_a = o + H \cdot \tfrac{2}{3}f - V \cdot \tfrac{1}{2}l + M = ql^2 \left(\frac{1}{12(1+\mu)} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} \right) =$$

$$= -\tfrac{1}{12} \cdot \frac{\mu}{(1+\mu)} ql^2$$ (sama dengan pendapat di atas, hal mana diharuskan jika hitungan-hitungan itu betul).

$V_a = O + V = \frac{1}{2}ql$ (sama dengan di atas juga)

$$M_c = -\tfrac{1}{2}q(\tfrac{1}{2}l)^2 - H \cdot \tfrac{1}{8}f + M = ql^2 \left(-\tfrac{1}{8} - \frac{1}{24(1+\mu)} + \tfrac{1}{8} \right) = \frac{\mu}{(1+\mu)} \cdot \tfrac{1}{24}ql^2$$

$$Q_c = V - \tfrac{1}{2}ql = 0$$

Jika μ diabaikan, $M_a = M_b = M_c = 0$.

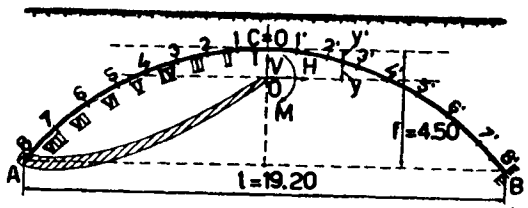
Untuk busur berbangun lantai-penuh, tebalnya di puncak

$d_o \approx \frac{1}{80}l$ dan $f \approx \frac{1}{10}l$; $i_o^2 = \frac{1}{12}d_o^2$ jadi $\mu \approx \frac{45}{4} \frac{i_o^2}{f^2} \approx \frac{45}{4} \cdot \frac{1}{12} (\frac{1}{8})^2 < 2\%$.

§56. Pelengkung simetris menurut rumus.

$$y' = \frac{\beta^2\{6 + (\lambda - 1)\beta^2\}}{\lambda + 5} \cdot f \, (\S 51)$$

Tebal busur ditentukan sehingga proyeksi vertikalnya tetap, jadi $d = d_o \sec \alpha$ jika d_o = tebal puncak.



Gambar VI, 57

Ketentuan ketentuan selanjutnya;

$l = 19{,}20\ m'$; $f = 4{,}50\ m'$; $d_o = 0{,}25\ m'$; tinggi urugan tanah di atas puncak = $0{,}75'm$; berat jenis bahan busur 2,4; idem tanah = 2,0.

Di dalam rumus tersebut di atas $\lambda = \frac{4{,}50 + 0{,}75}{0{,}25 + 0{,}75} \approx 5$

Jadi $y' = \frac{\beta^2(6 + 4\beta^2)}{10} \cdot 4{,}50\ m' = \beta^2(6 + 4\beta^2) \cdot 0{,}45\ m'$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{\frac{1}{2}ld\beta} = \frac{5{,}4\beta + 7{,}2\beta^3}{9{,}6} = \frac{\beta(0{,}9 + 1{,}2\beta^2)}{1{,}6}$$

$$\sec \alpha = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{ds}{dx}$$

Pelengkung kita bagi-bagi di dalam 16 bagian yang proyeksinya mendatar masing-masing $\Delta x = \frac{1}{16}l = 1{,}20m'$. Selanjutnya lihat daftar di bawah.

Titik pembagi	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\beta = x/\frac{1}{2}l$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1
$y'(m')$	0	0,043	0,176	0,415	0,789	1,330	2,085	3,120	4,500
$\Delta y'$		0,043	0,143	0,239	0,374	0,549	0,775	1,035	1,380
$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y')^2$		1,44	1,45	1,50	1,60	1,74	2,03	2,52	3,36
$1/(\Delta s)^2 = \Delta w$		0,675	0,695	0,667	0,625	0,575	0,493	0,397	0,298
y'_t (tengah-tengah bagian)		0,022	0,119	0,296	0,602	1,059	1,708	2,602	3,810
$y'_t/(\Delta s)^2 = y'_t \cdot \Delta w$		0,016	0,074	0,196	0,375	0,610	0,840	1,031	1,135
sec α	1,00	1,003	1,011	1,025	1,06	1,11	1,20	1,32	1,51
$d = d_o \sec \alpha$. (m')	0,25	0,251	0,252	0,256	0,265	0,278	0,300	0,330	0,378
Δs (m')		1,20	1,20	1,22	1,26	1,32	1,42	1,58	1,83

$$\frac{I_o}{I} \cdot \Delta s = \left(\frac{d_o}{d}\right)^3 \cdot \Delta s = \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^3 \cdot \Delta s = \frac{\Delta x^3}{\Delta s^2}\,;\ \frac{F_o}{F} = \frac{d_o}{d} = \frac{\Delta x}{\Delta s}$$

$$\delta_{hh} = 2\left(\sum_o^{\frac{1}{2}l} y^2 \frac{\Delta s}{EI} + \sum_o^{\frac{1}{2}l} \cos^2\alpha \cdot \frac{\Delta s}{EF}\right);\ \delta_{vv} = 2\sum_o^{\frac{1}{2}l} x^2 \frac{\Delta s}{EI}\,;\ \varphi_{mm} = 2\sum_o^{\frac{1}{2}l} \frac{\Delta s}{EI}$$

$$\delta'_{hh} = \delta_{hh} \cdot \frac{EI_o}{\Delta x^3} = 2\left(\sum_o^{\frac{1}{2}l} \cdot \frac{y^2}{\Delta s^2} + i_o^2 \sum_o^{\frac{1}{2}l} \frac{1}{\Delta s^2}\right) = (1+\mu)2\sum_o^{\frac{1}{2}l} \frac{y^2}{\Delta s^2} =$$

$$= (1+\mu)2\,\Sigma y^3 \cdot \Delta w$$

$$\delta'_{vv} = \delta_{vv} \cdot \frac{EI_o}{\Delta x^3} = 2\sum_o^{\frac{1}{2}l} \frac{x^2}{\Delta s^2} = 2\sum_o^{\frac{1}{2}l} x^2 \cdot \Delta w;\ \varphi'_{mm} = \varphi_{mm} \cdot \frac{EI_o}{\Delta x^3} =$$

$$= 2\sum_o^{\frac{1}{2}l} \frac{1}{\Delta s^2} = 2\sum_o^{\frac{1}{2}l} \Delta w$$

Selanjutnya $\frac{1}{\Delta s^2} = \Delta w$.

Ordinat O terhadap C: $y'_o = \frac{\Sigma y'_t \cdot \Delta w}{\Sigma \Delta w} = \frac{0{,}016 + 0{,}074 + \ldots . 1{,}135}{0{,}675 + 0{,}695 + \ldots . 0{,}298} =$
$= 0{,}965\ m'$

Ordinat pelengkung terhadap O menjadi : $y = y'_o - y'$.

Bag. busur	Δw	y	$y \cdot \Delta w$		$y^2 \cdot \Delta w$	x	$x \cdot \Delta w$	$x^2 \cdot \Delta w$
I	0,695	+ 0,943	+ 0,655		0,617	0,60	0,417	0,025
II	0,685	+ 0,855	+ 0,585		0,500	1,80	1,230	2,210
III	0,667	+ 0,669	+ 0,447		0,299	3,00	2,000	6,000
IV	0,625	+ 0,363	+ 0,228		0,083	4,20	2,620	11,050
V	0,575	— 0,094		— 0,054	0,005	5,40	3,100	16,730
VI	0,493	— 0,743		— 0,364	0,269	6,60	3,250	21,500
VII	0,397	— 1,635		— 0,650	1,060	7,80	3,190	24,200
VIII	0,298	— 2,849		— 0,845	2,400	9,00	2,680	24,150
	Σ= 4,435		+ 1,915	— 1,913	5,233			105,865

Sebagai kontrol harus terdapat $\Sigma y \cdot \Delta w = 0$, di sini terdapat + 1,915 — — 1,913 = — 0,002 (cukup saksama).

$$i_o^2 \sum_o^{\frac{1}{2}l} \Delta w = \tfrac{1}{12} \cdot 0{,}25^2 \cdot 4{,}435 = 0{,}023;\ \sum_o^{\frac{1}{2}l} y^2 \cdot \Delta w = 5{,}233;\ \mu = \frac{0{,}023}{5{,}233} = 0{,}0044$$

$$\delta'_{hh} = 2(5{,}233 + 0{,}023) = 10{,}51;\ \frac{1}{\Delta x} \cdot \delta'_{hh} = 8{,}75$$

$$\delta'_{vv} = 2.105{,}865 = 211{,}73;\ \frac{1}{\Delta x}\,\delta'_{vv} = 176{,}4$$

$$\varphi'_{mm} = 2.4{,}435 = 8{,}870;\ \frac{1}{\Delta x}\,\varphi'_{mm} = 7{,}375$$

Garis pengaruh H (lihat gambar VI, 59a). Besaran-besaran $-y \cdot \Delta w$ dianggap sebagai muatan pada balok terjepit sebelah di A dan $\delta'_{hh} = -\sum_\alpha^{l_2}$ $(x - a).y.\Delta w$ berarti momen di bawah P (yang berdiri sejauh a dari O) pada balok tersebut. Jika kita menghitung momen ini di bawah titik-titik 0, 1, 2, ...kita mendapat nilai δ'_{hp} di tempat titik-titik tersebut. Hitungan ini dihitung secara daftar, dan untuk mudahnya kita menghitung $\frac{1}{\Delta x}$ momen tersebut.

Jadi yang akan terdapat ialah $\frac{1}{\Delta x} \cdot \delta'_{hp}$ dan berhubung dengan ini, di atas juga sudah kita hitung $\frac{1}{\Delta x} \cdot \delta'_{hh} = 8{,}75$. Ini berarti, nilai ordinat garis-pengaruh $H = \frac{\frac{1}{\Delta x} \cdot \delta'_{hp}}{8{,}75}$.

$P = 1$ di	$-y \cdot \Delta w$	$\Sigma -y \cdot \Delta w$	$\frac{1}{\Delta x} \cdot \delta'_{hp}$	H
8′	0			
7′	0,845	0,845	$\frac{1}{2} \cdot 0{,}845 =$ 0,423	0,048
6′	0,650	1,495	0,423 + 0,845 + $\frac{1}{2} \cdot 0{,}650 =$ 1,593	0,182
5′	0,364	1,859	1,593 + 1,495 + $\frac{1}{2} \cdot 0{,}364 =$ 4,270	0,486
4′	0,054	1,913	4,270 + 1,859 + $\frac{1}{2} \cdot 0{,}054 =$ 6,156	0,705
3′	—0,228	1,685	6,156 + 1,913 — $\frac{1}{2} \cdot 0{,}228 =$ 7,955	0,910
2′	—0,447	1,238	7,955 + 1,685 — $\frac{1}{2} \cdot 0{,}447 =$ 9,147	1,078
1′	—0,585	0,653	9,417 + 1,238 — $\frac{1}{2} \cdot 0{,}585 =$ 10,363	1,180
0	—0,655		10,363 + 0,653 — $\frac{1}{2} \cdot 0{,}655 =$ 10,638	1,220

Garis pengaruh V (gambar VI, 59b). Sekarang $x.\Delta w$ dianggap sebagai muatan dan selanjutnya seperti di atas. Jika ordinat V di titik $k' = V_{k'}$, maka ordinat V di titik k yang simetris terhadap titik k' terdapat $V_k = 1 - V_{k'}$ (seb. Contoh: $V_7 = 1 - V_{7'}$); $\frac{1}{\Delta x}\,\delta_{ww} = 176{,}4$.

$P=1$ di	$x.\Delta w$	$\Sigma x.\Delta w$	$\frac{1}{\Delta x}\cdot\delta_{wp}$	V	P di	V
8′	0		0	0	8	1,00
7′	2,680	2,680	½ . 2,680 = 1,340	0,008	7	0,992
6′	3,190	5,780	1,340 + 2,680 + ½ . 3,190 = 5,570	0,032	6	0,968
5′	3,250	9,030	5,570 + 5,780 + ½ . 3,250 = 12,975	0,074	5	0,926
4′	3,100	12,130	12,975 + 9,030 + ½ . 3,100 = 23,545	0,133	4	0,867
3′	2,620	14,750	23,545 + 12,130 + ½ . 2,620 = 36,985	0,204	3	0,796
2′	2,000	16,750	36,985 + 14,750 + ½ . 2,000 = 52,735	0,299	2	0,701
1′	1,230	17,975	52,735 + 16,750 + ½ . 1,230 = 70,100	0,398	1	0,602
0	0,417		70,100 + 17,980 + ½ . 0,417 = 88,288	0,500	0	0,500

Garis-pengaruh M (gambar VI, 59c). Δw dianggap sebagai muatan. Pembagi $= \frac{1}{\Delta x}\varphi_{mm} = 7{,}375$.

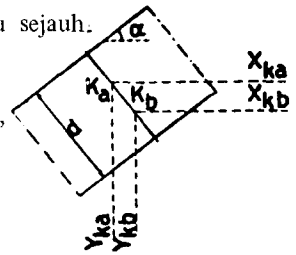
$M_k = M_{k'} + k\Delta x$ (k dan k' nomer-nomer titik-bagian yang simetris terhadap s.s.l.)

$P=1$ di	Δw	$\Sigma\Delta w$	$\frac{1}{\Delta x}\,q_{mp}$	M	P di	M
8′	—	—	0	0	8	9,600
7′	0,298	0,298	½ . 0,298 = 0,149	0,020	7	8,420
6′	0,397	0,695	0,149 + 0,298 + ½ . 0,397 = 0,646	0,088	6	7,288
5′	0,493	1,188	0,646 + 0,695 + ½ . 0,493 = 1,547	0,210	5	6,210
4′	0,575	1,763	1,547 + 1,188 + ½ . 0,575 = 3,023	0,410	4	5,210
3′	0,625	2,388	3,023 + 1,763 + ½ . 0,625 = 5,098	0,690	3	4,290
2′	0,667	3,055	5,098 + 2,388 + ½ . 0,667 = 7,820	1,060	2	3,460
1′	0,685	3,740	7,820 + 3,055 + ½ . 0,685 = 11,218	1,520	1	2,720
0	0,695		11,218 + 3,740 + ½ . 0,695 = 20,715	2,070	0	2,070

Hingga sekarang ukuran tebal busur belum terpakai (kecuali di dalam hitungan u). Bilangan tebal busur ini terpaksa kita pakai jika kita menghitung kern-momen. Pada tampang persegi letak titik-kern itu sejauh $\frac{1}{6}d$ dari titik tengah.

Jika x, y itu koordinat-koordinatnya titik tengah, maka koordinat-koordinat titik-titik kern-atas dan bawah terdapat :

$$x_{ka} = x + \tfrac{1}{6}d\sin\alpha;\ y_{ka} = y + \tfrac{1}{6}d\cos\alpha$$
$$x_{kb} = x - \tfrac{1}{6}d\sin\alpha;\ y_{kb} = y - \tfrac{1}{6}d\cos\alpha$$



Gambar VI, 58

Berhubung dengan satu dan lain di dalam daftar pertama terhitung juga : sec α dan $d = d_o \sec\alpha$. Kemudian menggunakan rumus-rumus

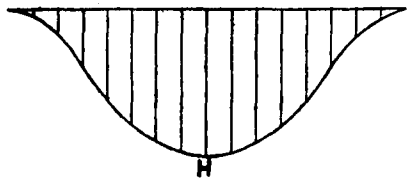
$M_{ka} = M^o_{ka} - H.y_{ka} + V.x_{ka} + M$ dan $M_{kb} = M^o_{kb} - Hy_{kb} + Vx_{kb} + M$

Tampang puncak (gambar VI, 59d). $y = 0{,}965\ m$; $d = d_o = 0{,}25\ m$. sec $\alpha = 1$

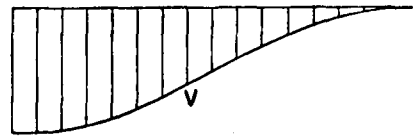
$x_{ka} = x_{kb} = 0$; $y_{ka} = y + \frac{1}{6}d_o = 1{,}007\ m$; $y_{kb} = y - \frac{1}{6}d_o = 0{,}923\ m$;

$M_k = -Hy_k + M$

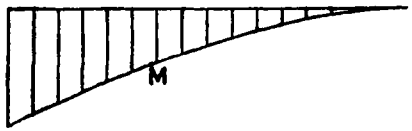
$P=1$ di	M_{ka}	$-Hy_{ka}$	M	Hy_{kb}	M_{kb}
8′	0	0	0	0	0
7′	—0,028	—0,048	0,020	—0,044	—0,024
6′	—0,095	—0,183	0,088	—0,168	—0,080
5′	—0,268	—0,490	0,210	—0,448	—0,238
4′	—0,300	—0,712	0,410	—0,650	—0,240
3′	—0,222	—0,880	0,690	—0,840	—0,150
2′	—0,025	—1,085	1,060	—1,010	+0,060
1′	+0,340	—1,170	1,520	—1,130	+0,430
0	+0,840	—1,230	2,070	—1,125	+0,945



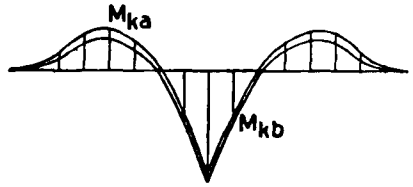
Gambar VI, 59a



Gambar VI, 59b



Gambar VI, 59c



Gambar VI, 59d

Tampang pangkal (gambar VI, 59e). $d = 0{,}378\ m$; $x = 9{,}60\ m$; $y = -3{,}535\ m$; sec $\alpha = 1{,}51$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = 0{,}662$; $\sin\alpha = 0{,}75$; $\frac{1}{6}d\sin\alpha = 0{,}047$; $\frac{1}{6}d\cos\alpha = 0{,}042$ $x_{ka} = -9{,}647\ m$; $y_{ka} = -3{,}493\ m$; $x_{kb} = -9{,}553\ m$; $y_{kb} = -3{,}577\ m$; $M_k = -Hy_k + V.x_k + M$

$P = 1$ di	M_{ka}	Vx_{ka}	$-Hy_{ka}$	M	$-Hy_{kb}$	Vy_{kb}	M_{kb}
8′	0	0	0	0	0	0	0
7′	+0,111	—0,077	+0,168	0,020	+0,172	—0,077	+0,115
6′	+0,404	—0,309	+0,635	0,088	+0,650	—0,306	+0,432
5′	+1,195	—0,715	+1,700	0,210	+1,740	—0,707	+1,303
4′	+1,585	—1,285	+2,460	0,410	+2,520	—1,270	+1,660
3′	+1,900	—1,920	+3,180	0,690	+3,240	—1,950	+1,980
2′	+1,940	—2,880	+3,760	1,060	+3,900	—2,860	+2,100
1′	+1,800	—3,840	+4,120	1,520	+4,210	—3,810	+1,920
0	+1,501	—4,824	+4,255	2,070	+4,360	—4,786	+1,644
1	+1,040	—5,800	+4,120	2,720	+4,210	—5,750	+1,180
2	+0,460	—6,760	+3,760	3,460	+3,900	—6,700	+0,660
3	—0,130	—7,700	+3,180	4,290	+3,240	—7,615	—0,085
4	—0,690	—8,360	+2,460	5,210	+2,520	—8,290	—0,560
5	—1,030	—8,940	+1,700	6,210	+1,740	—8,850	—0,800
6	—1,407	—9,340	+0,635	7,288	+0,650	—9,250	—1,231
7	—1,072	—9,560	+0,168	8,420	+0,172	—9,490	—0,898
8	—0,047	—9,647	0	9,600	0	—9,553	+0,047

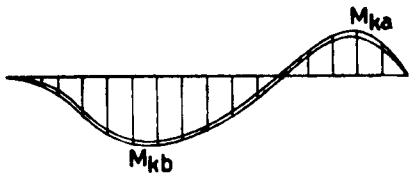
Tampang 4 (gambar 59f). $d = 0{,}265\ m$; $x = -4{,}80$; $y = +0{,}176\ m$; $\sec\alpha = 1{,}08$; $\sin\alpha = 0{,}118$; $\cos\alpha = 0{,}925$

$\frac{1}{6}d \sin\alpha = 0{,}005\ m$; $\frac{1}{6}d\cos\alpha = 0{,}04\ m$; $x_{ka} = -4{,}805$; $y_{ka} = +0{,}180\ m$; $x_{kb} = -4{,}795\ m$; $y_{kb} = +0{,}172\ m$.

$P = 1$ di	M_{ka}	M^o_{ka}	Vx_{ka}	$-Hy_{ka}$	M	$-Hy_{kb}$	Vx_{kb}	M^o_{kb}	M_{kb}
8′	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7′	—0,027		—0,038	—0,009	0,020	—0,008	—0,038		—0,026
6′	—0,099		—0,154	—0,033	0,088	—0,031	—0,153		—0,099
5′	—0,232		—0,355	—0,088	0,210	—0,087	—0,354		—0,231
4′	—0,368		—0,651	—0,127	0,410	—0,121	—0,635		—0,346
3′	—0,454		—0,980	—0,164	0,690	—0,156	—0,978		—0,444
2′	—0,584		—1,440	—0,194	1,060	—0,185	—1,430		—0,555
1′	—0,602		—1,910	—0,212	1,520	—0,204	—1,905		—0,589
0	—0,553		—2,403	—0,220	2,070	—0,210	—2,393		—0,533
1	—0,382		—2,890	—0,212	2,720	—0,204	—2,880		—0,346
2	—0,104		—3,370	—0,194	3,460	—0,185	—3,360		—0,085
3	+0,301		—3,825	—0,164	4,290	—0,156	—3,810		+0,324
4	+0,818		—4,165	—0,127	5,210	—0,121	—4,150		+0,939
5	+0,472	—1,195	—4,455	—0,088	6,210	—0,087	—4,440	—1,205	+0,477
6	+0,210	—2,395	—4,650	—0,033	7,288	—0,031	—4,640	—2,405	+0,212
7	+0,056	—3,595	—4,760	—0,009	8,420	—0,008	—4,750	—3,605	+0,057
8	0,0	—4,795	—4,805	0,0	9,600	0,0	—4,795	—4,805	0,0

Garis tekan muatan tetap.

Ini terjadi jika kita menggambar poligon batang pada muatan tetap, yang kita jalankan melalui tiga titik menurut kehendak sendiri. Oleh karena kita ingin membandingkan garis tekan tadi dengan sumbu busur, maka tiga titik tadi kita ambil titik-titik pangkal dan puncak.



Gambar VI, 59e

Muatan tetap terdiri dari berat sendiri pelengkung dan berat urugan tanah. Berat jenis bahan pelengkung (beton misalnya), $\gamma_b = 2{,}4$ dan berat jenis tanah $\gamma_t = 2{,}0$. Berat sendiri satu bagian pelengkung $\Delta G_b = \Delta s \,.\, d_t \,.\, \gamma_b$ (d_t = tebal di tengah-tengah). dan berat tanah di atas bagian pelengkung, $\Delta G_t = \Delta x \,.\, h_t \,.\, \gamma_t$;

Gambar VI, 59f

jika h_t = tinggi tanah di atas tengah-tengah bagian itu dan h_o di atas puncak, terdapat; $h_t = h_o + y'_t = 0{,}75 + y^1_t$ (y^1_t = ordinat tengah-tengah bagian terhadap titik pucak C).

Titik	0	1	2	3	4	5	6	7	8
d = tebal	0	0,043	0,176	0,415	0,789	1,330	2,085	3,120	4,500
d_t = id. tengah-tengah	0,25	0,251	0,252	0,256	0,265	0,278	0,300	0,330	0,378
y_t (rata-rata)	0,25	0,251	0,254	0,260	0,272	0,289	0,315	0,354	
Δs	0,022	0,110	0,296	0,602	1,059	1,708	2,602	3,810	
$\Delta s \,.\, d_t$	1,20	1,20	1,22	1,26	1,32	1,42	1,58	1,83	
h_t	0,300	0,301	0,310	0,328	0,360	0,410	0,498	0,650	
$\Delta G_b = \Delta s \,.\, d_t \,.\, y_b$ (ton)	0,772	0,860	1,046	1,352	1,809	2,457	3,352	4,560	
$\Delta G_t = \Delta x \,.\, h_t \,.\, y_t$ (ton)	0,720	0,720	0,745	0,785	0,865	0,985	1,195	1,560	
$\Delta G = \Delta G_b + \Delta G_t$ (ton)	1,860	2,050	2,550	3,240	4,345	6,145	8,050	10,950	
	2,580	2,770	3,295	4,025	5,210	7,130	9,245	12,510	

Muatan-muatan itu dianggap bekerja pada balok CA, terjepit sebelah di A dan terlepas di ujung C, dan kemudian menghitung momen-momen di bawah titik-titik pembangi 0, 1, 2, ... 8 atau A.

Jika M^o_{ga} = momen ditampang penghabisan (tampang pangkal A) – dan M^o_{gx} = momen di sesuatu titik, maka ordinat garis tekan (poligon-batang) diukur terhadap titik C menjadi:

$$\eta = \frac{M^o_{gx}}{M^o_{ga}} \,.\, f, \text{ sedang } f = 4{,}50\ m$$

Kita menghitung besaran-besaran $\frac{1}{\Delta x} \,.\, M^o_{gx}$ secara daftar, jadi

$$\eta = \frac{1}{\Delta x} \cdot M_{ga}^{o} : \frac{\frac{1}{\Delta x} M_{ga}^{o}}{f} = \frac{1}{\Delta x} \cdot M_{ga}^{o} : \frac{1}{\Delta x} H_g^{o} ; \frac{1}{\Delta x} M_{ga}^{o} = 129{,}773$$

$$\frac{1}{\Delta x} \frac{M_{ga}^{o}}{f} = \frac{1}{\Delta x} \cdot H_g^{o} = \frac{129{,}773}{4{,}50} = 28{,}8$$

$$\text{jadi } \eta = \frac{1}{\Delta x} M_{gx} : 28{,}8$$

$H_g^{o} = 28{,}8 \Delta x = 28{,}8.1{,}20t = 34{,}6t$ (tangan kutub garis-tekan

$$\Delta H_g = -\mu H_g^{o} = -o{,}152\ t.$$

Sebagai kontrol $\frac{1}{\Delta x} \cdot M_{ga}^{o} = 7{,}5\Delta G_1 + 6{,}5\Delta G_2 + 5{,}5\Delta G_3 + \ldots . 0{,}5\Delta G_3$

Titik	ΔG	$\Sigma' \Delta G$	$\frac{1}{\Delta x} M_{gx}^{o}$	η	y'
0	—	—	—	0,00	0,00
1	2,580	2,580	½ . 2,580 = 1,290	0,045	0,043
2	2,770	5,350	1,290 + 2,580 + ½ . 2,770 = 5,255	0,183	0,176
3	3,295	8,645	5,255 + 5,350 + ½ . 3,295 = 12,262	0,425	0,415
4	4,025	12,670	12,262 + 8,645 + ½ . 4,025 = 22,909	0,795	0,789
5	5,210	17,880	22,909 + 12,670 + ½ . 5,210 = 38,184	1,330	1,330
6	7,130	25,010	38,184 + 17,880 + ½ . 7,130 = 59,629	2,080	2,085
7	9,245	34,255	59,629 + 25,010 + ½ . 9,245 = 89,262	3,110	3,120
8	12,510		89,262 + 34,255 + ½ . 12,510 = 129,773	4,500	4,500

Menurut pendapat ini, beda antara η dan y' kecil($\leq$ 1 cm),jadi boleh dikatakan bahwa garis tekan muatan tetap mengikuti sumbu busur (lihat § 51)

Sebagai contoh cara penggunaan garis-garis pengaruh itu, kita ambil beban bergerak p = 1,0 t/m^2 dan mengambil lebar pelengkung b = 1,0 m.

Di atas sudah terdapat, H_g = 34,6 t. yang tetap ada. Ini menghasilkan

$\sigma_g = N_g / F = H_g / F_o$ = 34,6/ ¼.t/m^2 = 138 t/m^2 = 13,8 kg/cm^2

Kita pelajari potongan nomer 4 dengan d = 0,265 m, jadi F = bd = 0,265 m^2 dan W = 1/6 bd^2 = 0,0117 m^3

Kita menggunakan garis^2 pengaruh M_{ka} dan M_{kb} – nya (gb.f)

Jika η = ordinat– pengaruh, maka luar bidang – pengaruh $\approx \Delta x \Sigma \eta$

(lihat daftar ybs).

$F_{ka}^{+} = \Delta x \Sigma \eta_{ka}^{+}$ = 1,2 (0,301 + 0,818 + ... 0) = 2,3

M_{ka}^{+} = 2.3 p = 2,3 tm. (tiap m lebar pelengkung)

F_{ka}^{-} = $\Delta x \Sigma \eta_{ka}$ = 1,2 (0,027+ 0,099 + ... 0,104) = 4,1 ; M_{ka}^{-} = 4,1 tm.

F_{kb}^{+} = $\Delta x \Sigma \eta_{kb}^{+}$ = 1,2 (0,324 + 0,939 + ... + 0) = 2,4; M_{kb}^{+} = 2,4 tm.

F_{kb}^{-} = $\Delta x \Sigma \eta_{kb}$ = 1,2 (0,026 + 0,099 + ... + 0,085) = 3,9; M_{kb}^{-} = 3,9 tm.

Sementara dianggap seolah-olah bahannya (beton) itu kenyal homogen, jadi mampu menahan tegangan-tegangan tekan/tarik serta E tekan = E tarik. Jadi pendapat-pendapat tegangan-tegangan tepi atas (σ_a) dan tepi-bawah (σ_b) itu hanya bilangan-bilangan fiktif. Oleh karena beton itu sebetulnya hanya mampu menerima tegangan-tekan, maka di bawah ini, tegangan tekan diberi tanda positif, jadi tarik itu negatif.

I) Akibat dari momen positif (M_{kb}^{+}, M_{ka}^{+})

$\sigma_{ap}^{+} = M_{kb}^{+} /W = N_p/F + M_p/W$ = + 2,4/0,0117 = + 225 t/m^2 (22,5 kg/cm^2).

$\sigma_{bp}^{-} = -M_{ka}/W = N_p/F - M_p/W$ = – 2,3/0,0117 = – 215 t/m^2

Di samping itu masih ada tegangan permanen σ_g = + 138 t/m^2

$\sigma_a = \sigma_g + \sigma_{ap}^{+}$ = 138 + 225 = + 363 t/m^2 = N/F + M/W

$\sigma_b = \sigma_g + \sigma_{bp}^{-}$ = 138 – 215 = 77 t/m^2 = N/F – M/W

2N/F = $\sigma_a^{+} + \sigma_b^{-}$ = 363 – 77 = 286 t/m^2; N = ½ 286. 0,265 = 38 t.

2 M/W = $\sigma_a^{+} - \sigma_b^{-}$ = 363 + 77 = 440 t/m^2; M = ½. 440.0,0117 = 2,56 tm.

Jadi hitungan tulangan didasarkan atas gaya - normal menekan N = 38 t disertai momen M = 2,56 atau N dengan ke - exsentrisan c = M/N = 6,7 cm (mendekati tepi atas).

II) Akibat momen negatif.

$\sigma_{ap}^{-} = -M_{kb}^{-}/W$ = – 3,9/0117 = – 333 t/m^2

$\sigma_{bp}^{+} = +M_{ka}/W$ = – + 4,1/0,0117 = + 342 t/m^2

σ_a^{-} = 138 – 333 = – 195 t/m^2 = M/F – M/W

σ_b^{+} = 138 + 342 = + 480 t/m^2 = N/F + M/W

$2N/F = \sigma_a^- + \sigma_b^+ = 285$ t/m^2; $N = \frac{1}{2}.285.0{,}265 = 38$ t

$2\ N/F = \sigma_b^+ - \sigma_a^- = 675$ t/m^2 $M = \frac{1}{2}.\ 675.\ 0{,}0117 = 3{,}95$ tm.

$c = 3{,}95/38 = 0{,}105$ m = 10,5 cm (N mendekati tepi - bawah)

Akibat susut disamakan dengan turun derajat panas $t = 15^\circ$C. Ini menimbulkan

$H_s = -\ t\gamma\ l/\delta_{hh}$ dengan $\delta'_{hh} = EI_o\ \delta_{hh} / \Delta x^3 = 10{,}5$

$\Delta\ x^3 = 1{,}2^3 = 1{,}728$; $I_o = 1/12.\ 1.\ (\frac{1}{4})^3 = 1/768$ m^4. Jika menganggap

$E = 2.10^6$ t/m^2 dan $\gamma = 10^{-5}$, terdapat $E.\gamma = 2.10$ dan

$$H_s = -\frac{15.2.10.19{,}2}{1{,}728.768.10{,}51}\ t = 0{,}42\ t \ll H_g = 34{,}6\ t$$

Ini mengakibatkan $\sigma_{as} = -\ H_s\ y_{kb} / W$ (tekan) dan $\sigma_{bs} = H_s y_{ka} / W$ (tarik)

§ 57. Pengaruh bentuk pelengkung atas H, V dan M.

Kita menulis lagi rumus-rumus H, V dan M:

$$H = \frac{(-\int x - a)y(I_o/I)ds}{(1+\mu)\int y^2(I_o/I)ds}$$ sedang μ itu mengandung faktor-faktor: $\frac{i_o^2}{f^2}$, dan $\frac{F}{F_o}$

$$V = \frac{\int(x-a)\,x(I_o/I)ds}{\int x^2(I_o/I)ds},\quad M = \frac{\int(x-a)\,(I_o/I)ds}{\int(I_o/I)ds}$$

Bentuk-pelengkung itu ditentukan oleh persamaan y sebagai fungsi dari x, atau dikatakan; oleh variasi (caranya berobah) nilai y. Besaran (I_o/I) itu menunjukkan variasi tampang pelengkung yang biasanya tak begitu banyak (terbatas).

Menurut rumus-rumus di atas, kita menarik kesimpulan, bahwa:

a. H itu dipengaruhi sangat oleh y, jadi oleh bentuk sumbu-busur, dan juga oleh variasi tampangnya yang biasanya kecil akibatnya.

Suku-korreksi μ mengandung besaran $\frac{i_o^2}{f^2}$ dan F/F_o yang berarti bahwa μ dipengaruhi oleh ukuran tampang-pelengkung (i_o^2), variasi tampangnya $\left(\frac{F}{F_o}\right)$ dan tingginya (f) Oleh karena μ itu juga mempengaruhi H, faktor-

faktor tersebut belakangan ini (terutama faktor f) juga mempengaruhi.

Jadi faktor-faktor terpenting yang banyak mempengaruhi H itu: bentuk sumbu-pelengkung dan tinggi-puncaknya.

b. Di dalam rumus V tak nampak faktor-faktor y, jadi jika akibat variasi tampang-pelengkung (faktor $\frac{I_o}{I}$) diabaikan, V tak dipengaruhi oleh bangunnya.

Pada susunan-dasar dengan ungkit OA selalu terdapat V = P jika P berdiri di A dan V = ½P jika P ada di tengah-tengah pelengkung.

c. Yang diuraikan di atas ini juga berlaku untuk M, ordinat-pengaruh M penghabisan (di bawah A pada susunan ungkit OA), tergantung kepada bentang pelengkung, l.

Variasi ukuran tampang seringkali ditentukan menurut rumus:

$\frac{I_o \sec\alpha}{I} = 1 - (1-n)\left(\frac{x}{\frac{1}{2}l}\right)^{2r}$ di mana: $n = \frac{I_o \sec\alpha_a}{I_a}$ (index a mengenai pangkal-busur A atau B) dan r = 0, 1, 2, . . .(bilangan utuh biasa).

Dengan n = 1, terdapat pula $\frac{I_o \sec\alpha}{I} = 1$ atau $I = I_o \sec\alpha$.

§ 58. Hukum pekerjaan minimum.

Jika beda antara ordinat-tekan dan sumbu-pelengkung itu Δy (§ 51) maka $M_x \backsim H.\Delta y$. Jika kita hanya mengindahkan pekerjaan-lengkung saja, maka:

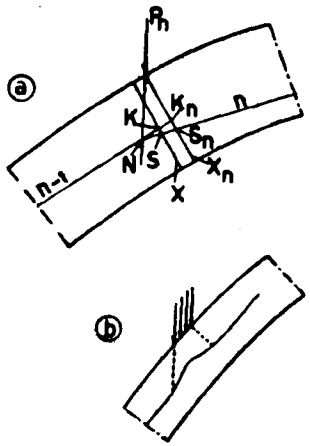
$$U = \tfrac{1}{2}\int\frac{M_x^2 ds}{EI} \backsim \tfrac{1}{2}H^2\int\frac{\Delta y^2}{EI}\,ds$$

Supaya U menjadi minimum, $\int\frac{\Delta y^2}{EI}\,ds$ harus minimum atau juga $\int \Delta y^2$ harus minimum, yang berarti bahwa garis-tekan mendekati sumbu-pelengkung menurut hukum kwadrat-terkecil. Oleh karena Δy^2 itu selalu positif, nilai $\int\frac{\Delta y^2}{EI}\,ds$ yang terkecil itu nol, dan ini tercapai jika $\Delta y = o$ atau garis-tekan berimpit dengan sumbu-pelengkung. Jadi pembagian muatan-luar (misalnya muatan tetap) sehingga garis-tekannya berimpit

dengan sumbu-pelengkung itu mungkin tercapai, asal saja tidak bertentangan dengan hukum-statika atau syarat-seimbang.

§59. Garis tekan dan poligon batang.

Garis-tekan berarti kedudukan-geometrinya titik-titik-gaya (titik-titik-pegangan kekuatan-kekuatan pada tampang) dipelbagai tampang-tampang. Pada umumnya kita menganggap, bahwa garis-tekan itu identik dengan poligon-batang. Di dekat garis-kerja muatan, anggapan ini tidak betul. Kita mempelajari pada X di sebelah kiri garis-kerja muatan P_n (gambar VI, 58a). Garis-kerja resultante muatan-muatan di sebelah kiri X ialah sisi (n–1) pada garis poligon, yang memotong tampang X di titik K, sedang sisi berikutnya (sisi n) memotongnya di titik S.



Gambar VI, 60

Oleh karena X ada di sebelah kiri P_n, titik-kekuatan pada tampang X adalah titik K dan bukan titik S, jadi garis-tekan melalui titik K.

Tampang X_n adalah tampang di sebelah kiri P_n yang penghabisan, dan di sini titik-gayanya ialah titik K_n yang terletak di garis (n–1) pula. Sisi n memotong X_n di titik S_n. Garis-tekan kemudian meloncat dari K_n ke S_n dan sesudah itu bersatu padu lagi dengan sisi poligon-batang n.

Pada hakekatnya, muatan tidak terpusat di satu garis, melainkan agak terbagi di atas busur (gambar VI,60b), dan dengan begitu loncatan pada garis-tekan tidak terjadi sekonyong-konyong, dan berjalan agak teratur

Di dalam hitungan, perbedaan antara garis-tekan dan poligon-batang senantiasa boleh diabaikan.

§59a. Tinjauan akibat bengkoknya sumbu.

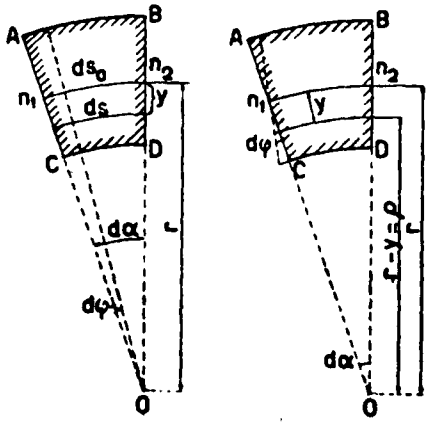
Bidang berat bangunan membentuk bidang-simetri yang diambil berimpitan dengan bidang gambar. n_1n_2 adalah garis yang terletak di dalam bidang-netral.

r = radius pada garis n_1n_2

$ds_o = r\,d\alpha$ = panjang serat n_1n_2

$ds = (r - y)\,d\alpha$ = panjang serat sejauh y dari n_1n_2

Kita mempelajari akibat tekanan merata dan akibat putaran sudut.



Gambar VI, 61

1. Tekanan merata.

$$\sigma = N/F$$

Serat ds memandak sebanyak $\Delta ds = \frac{\sigma}{E}(r - y)\,d\alpha$.

Bidang AC berputar sudut terhadap bidang BD sebanyak:

$$d\varphi = \frac{\Delta ds_o}{r} = \frac{\sigma}{E}d\alpha = \frac{N}{EF}d\alpha.$$

2. Putaran sudut.

Bidang AC berputar sudut $d\varphi$ mengelilingi n_1 terhadap BD

$$\varepsilon = \frac{y\,d\varphi}{(r-y)d\alpha}; \quad \sigma = E\varepsilon = \frac{y\,d\varphi}{(r-y)d\alpha}E$$

$$N = \int_F \sigma\,dF = E\frac{d\varphi}{d\alpha}\cdot\int_F \frac{y}{(r-y)}\,dF$$

$$M = \int_F \sigma\,dF.y = E\frac{d\varphi}{d\alpha}\int_F \frac{y^2}{(r-y)}dF; \frac{y^2}{r-y} = \frac{ry}{r-y} - y \text{ sedang } \int_F y\,dF = 0$$

$$M = E\frac{d\varphi}{d\alpha}\left\{r\int_F \frac{y}{(r-y)}dF - \int_F y.dF\right\} = Nr$$

Jadi terdapat adanya gaya normal menarik N yang melalui titik-tengah 0 (garis-tarik).

$$M = E\frac{d\varphi}{d\alpha}\int_F \frac{y^2}{r-y}dF = E\frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{1}{r}\int \frac{y^2}{(1-y/r)}dF = \frac{E}{r}\frac{d\varphi}{d\alpha}I'$$

$$\frac{M}{EI'} = \frac{d\varphi}{r d\alpha} = \frac{d\varphi}{ds_o}$$

$$E = \frac{M}{I'} r\, d\alpha/d\varphi; \qquad d\varphi = \frac{M}{EI'} r\, d\alpha = \frac{M}{EI'} ds_o$$

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y d\varphi}{(r-y)d\alpha} = \frac{M}{I'} y \cdot \frac{r}{(r-y)} = \frac{M}{I'} y \cdot \frac{r}{\rho}$$

$$I' = \int_F \frac{y^2}{(r-y/r)} dF = \int_F y^2\left(1 + \frac{y}{r} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{y^3}{r^3} + \ldots\ldots\right) dF$$

Untuk tampang persegi berukuran bh terdapat :

$$I' = b\int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} y^2\left(1 + \frac{y}{r} + \frac{y^2}{r^2} + \ldots.\right) dy = \tfrac{1}{12} bh^3 \left\{1 + \tfrac{3}{5}\left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \tfrac{3}{7}\left(\frac{h}{2r}\right)^4 + \ldots.\right\}$$

Oleh karena biasanya h/2r ≪ 1, maka suku-suku $(h/r2)^2$ dan seterusnya boleh diabaikan dan $I' \simeq \frac{1}{12}bh^3 = I$.

Pada balok lurus terdapat $d\alpha = 0$, $rd\alpha = ds_o = ds$, dan $r = \infty$

Jadi h/2r = 0 dan I' = I

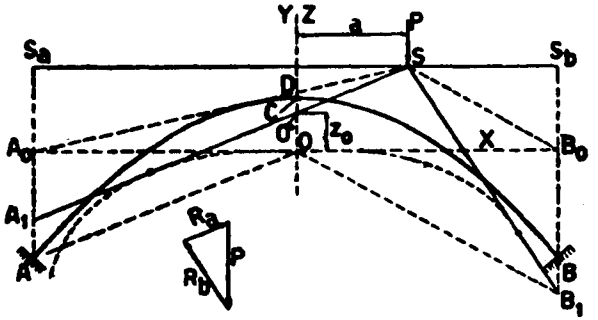
§ 60. Garis S.

Pada busur parabol simetris dengan $I = I_o \sec\alpha$ atau $\frac{I_o}{I} ds = dx$ telah terdapat (§ 54):

$$H = \tfrac{15}{8}\frac{(\frac{1}{2}l - a)^2(\frac{1}{2}l + a)^2}{(1+\mu)l^3 f} P; \; V = \frac{2(l+a)(\frac{1}{2}l - a)^2 P}{l^3} \text{ dan}$$

$$M = \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{2}l - a)^2}{l} P$$

H menjadi extrem jika $(\frac{1}{2}l - a)^2(\frac{1}{2}l + a)^2 = \frac{1}{16}l^4 - \frac{1}{2}l^2a^2 + a^4$ extrem, atau setelah mendifferensi, $-l^2a + 4a^3 = 4a(a - \frac{1}{2}l)(a + \frac{1}{2}l) = O$.



Gambar VI, 62

Jadi jika a = 0 (P di puncak) dan jika a = $\pm \frac{1}{2}l$, H bernilai extrem. Nilai extrem ini berarti maximum untuk a = 0 dan minimum untuk $a = \pm\frac{1}{2}l$, di mana H = 0 (garis pengaruh H menyinggung pada garis-penutup). Jadi pada kedudukan P di puncak, terdapat:

$$H_{max} = \tfrac{15}{64}\frac{l}{(1+\mu)f} P, \; V = \tfrac{1}{2}P \text{ dan } M = \tfrac{1}{8}Pl$$

Pangkal A: $M_a^o = o$; $x_a = -\frac{1}{2}l$; $y_a = -\frac{2}{3}f$; dan dengan $\mu \infty o$:

$$M_a = M_a^o - H \cdot y_a + V \cdot x_a + M = (\tfrac{1}{2}l + a)(\tfrac{1}{2}l - a)^2(\tfrac{1}{2}l + 5a).\frac{P}{2l^3}$$

Pangkal B: $M_b^o = -\frac{1}{2}Pl$; $x_b = +\frac{1}{2}l$; $y_b = -\frac{2}{3}f$

$$M_b = M_b^o - H \cdot y_b + V \cdot x_b + M = (\tfrac{1}{2}l - a)(\tfrac{1}{2}l + a)^2(\tfrac{1}{2}l - 5a).\frac{P}{2l^3}$$

Hasil M_b ini dengan mudah terdapat, jika di dalam pendapat M_a, besaran a diganti dengan –a.

M_a dan M_b terdapat positif jika $-\frac{1}{10}l < a < \frac{1}{10}l$, jadi jika P berdiri di bagian tengah busur sepanjang 1/5 l.

M_a positif jika $a > -\frac{1}{10}l$, dan M_b positif selama $a < +\frac{1}{10}l$.

Pada sesuatu kedudukan P garis-tekannya adalah garis A_1SB_1. Cabang garis-tekan A_1S memotong sumbu-Y di titik O, jadi ordinat garis-tekan di situ = OO' = z_o, sedang ordinat puncak-busur

$$y_o = OC = \tfrac{1}{8}f, \; M_c = H(z_o - \tfrac{1}{8}f) = -H \cdot \tfrac{1}{8}f + M$$
$$z_o = \frac{M}{H}$$

Persamaan cabang garis-tekan A_1S: $z = z_o + \frac{V}{H} \cdot x =$

$$= \tfrac{8}{15}\frac{(1+\mu)f}{(\frac{1}{2}l + a)^2}\{(\tfrac{1}{2}l)^2 + (l + a)x\}$$

$$A_oA_1 = z_a = (z)_{x=-\frac{1}{2}l} = -\tfrac{8}{15}(1+\mu) \cdot \tfrac{1}{2}l\frac{f}{(\frac{1}{2}l + a)}$$

$z_1 = (z)_{x=a} = \frac{8}{15}(1+\mu)f$ = tetap. Jadi garis S, yaitu tempat kedudukan geometri titik-titik S adalah garis lurus setinggi $\frac{8}{15}(1+\mu)f$ di atas titik O.

Garis SA_o memotong sumbu Y (atau sumbu Z) di titik D.

$$OD : z_1 = \tfrac{1}{2}l : \tfrac{1}{2}(l + a); \; OD = \tfrac{1}{2}l.\frac{z_1}{(\frac{1}{2}l + a)} = \tfrac{1}{2}l \cdot \tfrac{8}{15}(1+\mu)\frac{f}{(\frac{1}{2}l + a)} =$$
$$= A_1A_o \text{ (nilai mutlak)}$$

Jadi $OA_1 // SA_o$, dan dengan begitu titik A_1 mudah ditentukan letaknya. Begitu pula dapat dibuktikan, bahwa $OB_1 // SB_o$.

Garis-garis SA_1 yang terdapat pada masing-masing kedudukan P, mempunyai garis-membungkus menurut persamaan:

$$z' = -\tfrac{8}{15}(1+\mu)\frac{fx^2}{(l^2+2lx)}$$

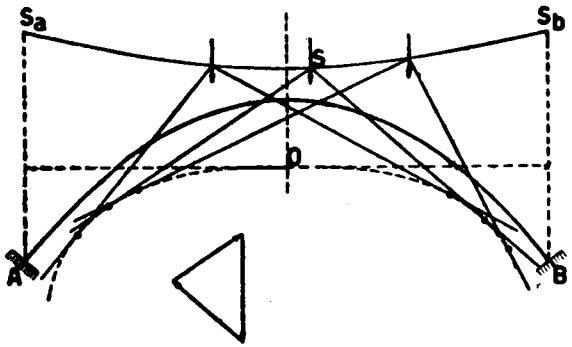
Ini adalah hiperbol yang melalui titik O dan mempunyai garis S_aA sebagai assymtot.

Begitu pula halnya dengan garis-garis SB_1.

Setelah garis S dan garis-bungkus itu terdapat, maka mudah sekali kita mencahari R_a dan R_b (yaitu: arah-kerjanya, besarnya dan letaknya); dengan secara menarik garis-garis singgung dari titik S (titik-potongan antara garis S dan garis-kerja P) kepada garis-bungkus tersebut.

Garis-garis singgung ini menentukan arah serta garis-kerjanya R_a dan R_b, yang besarnya terdapat sebagai komponen-komponen dari P menurut garis-garis singgung ini (segi-tiga gaya)

Pada umumnya tidak mudah menghitung letak serta perjalanan garis-S dan garis-bungkusnya. Kita dapat menempuh perjalanan secara empiri dengan percobaan-percobaan), yaitu pada masing-masing kedudukan muatan P kita menghitung H, V, M, M_a, M_b dan M_c.



Gambar VI, 63

Dengan begitu dapat memperoleh letak garis-garis tekannya dan titik-titik S. Sesudah itu menghubungkan titik-titik S ini satu sama lain agar mendapat garis S, dan selanjutnya menggambar garis bungkus (kurve singgung) pada garis-garis tekan tadi.

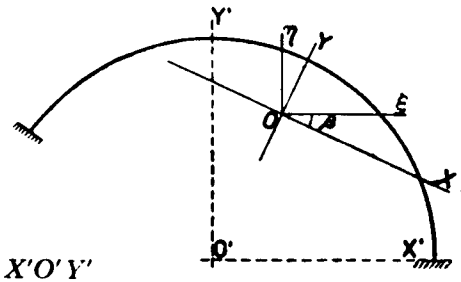
Garis S dan garis bungkus ini berguna untuk menyelidiki kedudukan P yang menimbulkan maximum atau minimum M_{kd} dan M_{kb} pada sesuatu tampang.

§ 61. Pelengkung tak simetris.

Kita mengadakan susunan koordinat sementara X'O'Y' misalnya melalui puncak dan salah satu pangkal. Koordinat-koordinat titik berat lengkungan O terdapat :

$$x'_o = \frac{\int x'ds\,(I_o/I)}{\int ds\,(I_o/I)} \text{ dan}$$

$$y'_o = \frac{\int y'\,ds(I_o/I)}{\int ds\,(I_o/I)}$$



Gambar VI, 64

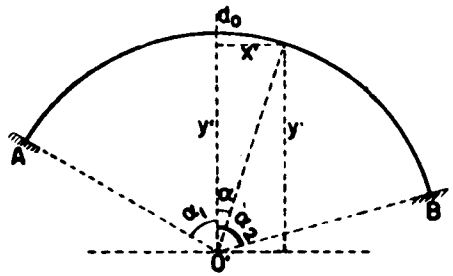
Kemudian mengadakan susunan koordinat baru $\xi O\eta \,//\, X'O'Y'$ dan menghitung

$$J_\xi = \int \eta^2 ds(I_o/I);\; J_\eta = \int \xi^2 ds(I_o/I);\; J_{\xi\eta} = \int \xi\eta ds\,\frac{I_o}{I} \text{ dan}$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2J_{\xi\eta}}{J_\eta - J_\xi}$$

Sesudah itu dapat menggambar sumbu-sumbu momen inersia pokok OX dan OY, yang membentuk sudut β dengan susunan $\xi O\eta$. Selanjutnya kita mengambil koordinat-koordinat terhadap susunan XOY ini dan rumus rumus H, V dan M tak berobah.

Sebagai contoh kita ambil busur lingkaran dengan tebal $d = d_o \sec\alpha$ (gambar VI, 65).



Gambar VI, 65

$$\frac{I_o}{I}\,ds = r\cos^3\alpha\,d\alpha = dw$$

$$x' = r\sin\alpha;\; y' = r\cos\alpha$$

$$x'^1_o = \frac{\int_{-a_1}^{a_2} r\sin\alpha\,dw}{\int_{-a_1}^{a_2} dw} =$$

$$= \left[\tfrac{1}{4}r\cdot\frac{\sin\alpha\cos^3\alpha + \tfrac{3}{4}\sin\alpha + \tfrac{3}{2}\alpha)}{\sin\alpha - \tfrac{1}{3}\sin^3\alpha}\right]_{-a_1}^{a_2}$$

$$y'_O = \frac{\int_{a_1}^{a_2} r\cos\alpha\, dw}{\int_{a_1}^{a_2} dw} = \left[\frac{1}{4}r\cdot\frac{-\cos^4\alpha}{\sin\alpha - \frac{1}{3}\sin\alpha^3}\right]_{-a_1}^{a_2}$$

$$J_\eta = \int_{a_1}^{a_2}(r\sin\alpha)^2 dw - (y'_O)^2\int_{a_1}^{a_2} dw$$

$$J_\xi = \int_{a_1}^{a_2}(r\cos\alpha)^2 dw - (x'_O)^2\int_{a_1}^{a_2} dw$$

$$J_{\xi\eta} = \int_{a_1}^{a_2} r^2\sin\alpha\cos\alpha\, dw - x'_O y'_O\int_{a_1}^{a_2} dw$$

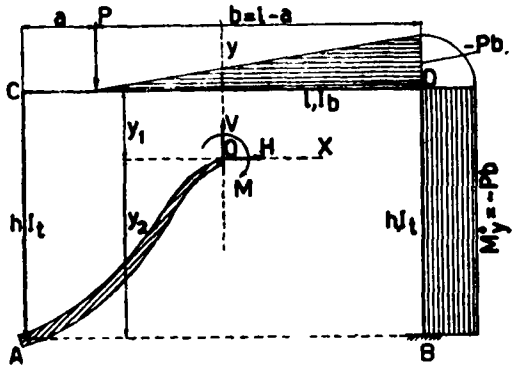
E. PORTAL TERJEPIT

§ 62. Portal tegak simetris.

Seperti pada portal dua sendi, akibat tekanan di sini juga diabaikan (u = o). Sebagai susunan dasar dipilih bangunan dipotong di pangkal A, dengan ungkit OA.

$$\frac{h}{l}\cdot\frac{I_b}{I_t} = k$$

$$y_1 = \frac{2h(I_b/I_t)\cdot\frac{1}{2}lh}{2h(I_b/I_t) + l} = \frac{k}{2k+1}\cdot h; y_2 = h - y_1 = \frac{k+1}{2k+1}\cdot h$$



Gambar VI, 66

$$\delta_{hh} = 2\int_{-y_2}^{y_1} y^2 dy/EI_t + y_1^2 l/EI_b = \frac{2}{3EI_t}(y_1^3 + y_2^3) + \frac{1}{EI_b}y_1^2 l$$

$$\delta'_{hh} = \delta_{hh}\cdot\frac{EI_b}{l} = \frac{2}{3}\frac{k}{h}(y_1^3 + y_2^3) + y_1^2 = \frac{2}{3}kh^2\cdot\frac{k^2 + (k+1)}{(2k+1)^3} + \frac{k^2}{(2k+1)^2}\cdot h^2 =$$

$$= \frac{kh^2}{3(2k+1)^2}(2k^3 + 5k^2 + 2k) = \frac{k(k+2)}{3(2k+1)}h^2$$

$$\delta_{vv} = \frac{1}{EI_t}\cdot 2h(\tfrac{1}{2}l)^2 + \frac{1}{EI_b}\cdot\tfrac{1}{12}l^3$$

$$\delta'_{vv} = \delta_{vv}\cdot\frac{EI_b}{l} = \tfrac{1}{2}kl^2 + \tfrac{1}{12}l^2 = \tfrac{1}{12}l^2(6k+1)$$

$$\varphi_{mm} = 2\frac{h}{EI_t} + \frac{l}{EI_b}; \varphi'_{mm} = \varphi_{mm}\cdot\frac{EI_b}{l} = 2k+1$$

a. Muatan vertikal P sejauh a dari C $P\delta_{hp} = \int M_x^o y\frac{ds}{EI}$ = statis-momen bidang $\frac{M_x^o}{EI}$ terhadap sumbu –X.

$$\delta_{hp} = -\frac{1}{EI_b}\cdot\tfrac{1}{2}b^2 y_1 - \frac{1}{EI_t}\cdot hb(\tfrac{1}{2}h - y_2) = \frac{1}{2(2k+1)}\left(-\frac{kb^2h}{EI_b} + \frac{h^2b}{EI_t}\right)$$

$$\delta'_{hp} = \delta_{hp}\cdot\frac{EI_b}{l} = \frac{khb(1 - b/l)}{2(2k+1)} = \frac{khab}{2(2k+1)l}$$

$$P\delta_{vp} = -\int M_x^o x\frac{ds}{EI} = \text{statis-momen bidang } -\frac{M_x^o}{EI} \text{ terhadap sumbu-Y}$$

$$\delta_{vp} = \frac{1}{EI_b}\cdot\tfrac{1}{2}b^2(\tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{3}b) + \frac{1}{EI_t}\cdot hb\cdot\tfrac{1}{2}l$$

$$\delta'_{vp} = \delta_{vp}\cdot\frac{EI_b}{l} = \tfrac{1}{2}b^2\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\frac{b}{l}\right) + \tfrac{1}{2}kbl = \frac{-2b^3 + 3b^2l + 6kbl^2}{12l}$$

$$M\varphi'_{mp} = -\int M_x^o\frac{ds}{EI} = \left(\frac{\frac{1}{2}b^2}{EI_b} + \frac{hb}{EI_t}\right)P$$

$$\varphi''_{mp} = \varphi'_{mp}\frac{EI_b}{l} = \tfrac{1}{2}\frac{b^2}{l} + kb = \frac{b^2 + 2kbl}{2l}$$

$$H = P\frac{\delta'_{hp}}{\delta r_h} = \frac{3ab}{2(k+2)hl}\cdot P$$

$$V = P\frac{\delta'_{vp}}{\delta'_{vv}} = \frac{(-2b^3 + 3lb^2 + 6kl^2b)}{(6k+1)l^3}P$$

$$M = P\frac{\varphi''_{mp}}{\varphi'_{mm}} = \frac{(b^2 + 2klb)}{2(2k+1)}P$$

$$M_a = Hy_2 - V\cdot\tfrac{1}{2}l + M = \left\{\frac{1}{2(k+2)} - \frac{b-a}{2(6k+1)l}\right\}\frac{ab}{l}P; V_a = V; H_a = H$$

$$M_c = M_a - H.h = -\left\{\frac{1}{k+2} + \frac{b-a}{2(6k+1)l}\right\}\frac{ab}{l}P$$

$$M_d = M_c + V\cdot\tfrac{1}{2}l - Pb = -\left\{\frac{-1}{k+2} + \frac{b-a}{2(6k+1)l}\right\}\frac{ab}{l}P$$

$$M_b = -Pb + Hy_2 + V.\tfrac{1}{2}l + M = \left\{\frac{1}{2(k+2)} + \frac{b-a}{2(6k+1)l}\right\}\frac{ab}{l}P$$

$$V^b = P - V;\ H_b = H$$

Sebagai kontrol; $M_d = -Pb - Hy_1 + V.\tfrac{1}{2}l + M$

$b = l - a$, jadi; $M_a = f_a(a)P$; $M_b = f_b(a)P$; $M_c = f_c(a)P$; $M_d = f_d(a).P$

Pendapat-pendapat di atas boleh dipergunakan pada muatan terbagi q_X dengan secara integrasi, jika a dianggap variabel dan P diganti dengan $dP = = q_X da$.

Muatan terbagi-rata q mulai dari titik sejauh a_1 dari C hingga a_2 dari C.

$M_a = q\int_{a_1}^{a_2} f_a(a)da$; $M_b = q\int_{a_1}^{a_2} f_b(a)\,da$; $M_c = q\int_{a_1}^{a_2} f_c(a)da$; $M_d = q\int_{a_1}^{a_2} f_d(a)da$

Muatan terbagi rata q penuh di atas CD

$$M_a = q\left\{\int_o^l \frac{a(l-a)da}{2(k+2)} - \int^l \frac{(l-2a)a\,(l-a)da}{2(6k+1)l^2}\right\} = \frac{ql^2}{12(k+2)}$$

$$M_c = -q\left(\int_a^l \frac{a(l-a)}{k+2}da + \int_o^{l_o} \frac{(l-2a)a(l-a)}{2(6k+1)l^2}\right)da = -\frac{ql^2}{6(k+2)} = -2M_o$$

$$H = \frac{3q}{2(k+2)hl}\int_o^l a(l-a)da = \frac{ql^2}{4(k+2)h}$$

$$V = \frac{q}{(6k+1)l^3}\int_o^l (-2b^3 + 3lb^2 + 6kl^2b)db = \frac{ql^4(3k+\frac{1}{2})}{(6k+1)l^3} = \tfrac{1}{2}ql,$$

pendapat mana dapat diduga lebih dahulu.

$$M = \frac{q}{2(2k+1l)}\int_o^l (b^2 + klb)db = \tfrac{1}{6}\frac{(3k+1)}{(2k+1)}ql^2$$

Kita juga mendapat secara demikian: M^o_{balok} berupa parabol dengan ordinat o di C dan $\frac{1}{2}ql^2$ di D. Jika untuk ini absis x diukur dari C, persamaan M^o_{balok} menjadi: $M^o_x = \frac{1}{2}qx^2$, luas bidangnya $= \int_o^l M^o_x\,dx = \frac{1}{6}ql^3$; statis momen bidangnya terhadap AC ada $\int_o^l M^o_x\,xdx = \frac{1}{8}ql^4$ jadi jauh titik berat bidangnya dari C ada $\frac{\frac{1}{8}ql^4}{\frac{1}{12}ql^3} = \frac{3}{4}l$, atau dari sumbu–Y menjadi $\frac{3}{4}l - \frac{1}{2}l = \frac{1}{4}l$. Hitungan ini perlu untuk menghitung V.

Bidang M^o_{trianq} tetap berbangun segi panjang dengan ordinat $\frac{1}{2}ql^2$, luas bidang ini ada $\frac{1}{2}ql^2h$ dan letak titik beratnya ada $\frac{1}{2}h$ di atas AB atau $\frac{1}{2}h - y_2$ di atas sumbu – X.

$$\frac{EI_b}{l}\int M^o y\,\frac{ds}{EI} = -\tfrac{1}{6}ql^3.\left(\frac{y_1}{l}\right) - \tfrac{1}{2}ql^2.k(\tfrac{1}{2}h - y_2) = ql^2\left\{-\frac{kh}{6(2k+1)} - \right.$$

$$\left. - \tfrac{1}{2}kh\left(\tfrac{1}{2} - \frac{k+1}{2k+1}\right)\right\} = \frac{qkhl^2}{12(2k+1)},\ \text{sedang}\ \delta'_{hh} = \frac{k(k+2)}{3(2k+1)}h^2$$

$$H = \frac{1}{\delta'_{hh}}.\frac{qkhl^2}{12(2k+1)} = \frac{ql^2}{4(k+2)h}$$

$$-\frac{EI_b}{l}\int M^o_x\,\frac{ds}{EI} = \tfrac{1}{6}ql^2.\tfrac{1}{4}l + \tfrac{1}{2}ql^2k.\tfrac{1}{2}l = \tfrac{1}{24}(6k+1)ql^3,\ \text{sedang}$$

$$\delta'_{vv} = \tfrac{1}{12}(6k+1)l^2$$

Jadi $V = \frac{1}{2}ql$

$$-\frac{EI_b}{l}\int M^o_x\,\frac{ds}{EI} = \tfrac{1}{6}ql^2 + \tfrac{1}{2}qkl^2 = \tfrac{1}{6}(3k+1)ql^2,\ \text{sedang}\ \varphi'_{mm} = (2k+1)$$

$$M = \tfrac{1}{6}\frac{(3k+1)}{(2k+1)}ql^2$$

Kita juga boleh menggunakan persamaan tiga-momen (lihat bab IV, § 39). Hanya saja akan terdapat beda tentang tanda-tanda di muka M_a, M_b, M_c, dan M_d, sebab di dalam persamaan-persamaan tiga momen kita mengambil nilai mutlaknya.

Pada muatan penuh terbagi rata q, oleh karena keadaan simetris, kepala tihang tak akan berpindah dan $M_a = M_b$ dan $M_c = M_d$. Dan selanjutnya oleh karena $M_a = -\frac{1}{2}M_c$ kita hanya memerlukan suatu persamaan:

$$\tfrac{1}{4}M_c\frac{h}{EI_t} + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6})M_c\frac{l}{EI_b} = \tfrac{1}{24}q\frac{l^3}{EI_b}$$

$$(6k+12)M_c = ql^2$$

$$M_c = \frac{ql^2}{6(k+2)}\ \text{(nilai mutlaknya)}$$

Oleh karena M_c ini bekerja negatif, harus tertulis

$$M_c = -\frac{ql^2}{6(k+2)} = M_d;\ M_a = M_b = -\tfrac{1}{2}M_c = +\frac{ql^2}{12(k+2)}$$

$$H = \tfrac{2}{3}\frac{M_c}{h} = \frac{ql^2}{4(k+2)h}$$

b. Muatan mendatar P setinggi z di atas AB.

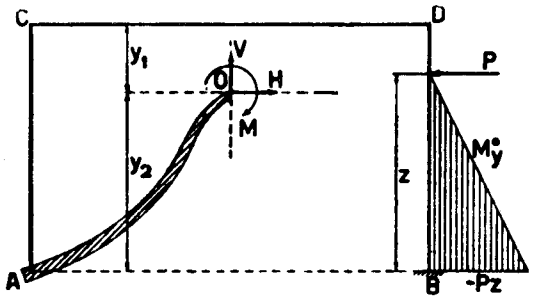
$$\delta_{hp} = -\frac{1}{EI_t}\cdot\tfrac{1}{2}z^2(\tfrac{1}{3}z - y_2) =$$

$$= \frac{z^2}{2EI_t}\left(\frac{k+1}{2k+1}h - \tfrac{1}{3}z\right)$$

$$\delta'_{hp} = \delta_{hp}\frac{EI_b}{l} =$$

$$= \tfrac{1}{2}kz^2\left(\frac{k+1}{2k+1} - \tfrac{1}{3}\frac{z}{h}\right) =$$

$$= \frac{\{3(k+1)h - (2k+1)z\}kz^2}{6(2k+1)h}$$



Gambar VI, 67

$$\delta'_{vp} = \delta_{vp}\frac{EI_b}{l} = \tfrac{1}{2}z^2\cdot\tfrac{1}{2}\frac{l}{EI_t}\cdot\frac{EI_b}{l} = \tfrac{1}{4}\frac{z^2 l}{h}\cdot\frac{h}{l}\cdot\frac{I_b}{I_t} = \tfrac{1}{4}\frac{klz^2}{h}$$

$$\varphi''_{mp} = \varphi'_{mp}\frac{EI_b}{l} = \tfrac{1}{2}\frac{z^2}{EI_t}\cdot\frac{EI_b}{l} = \tfrac{1}{2}\frac{kz^2}{h}$$

$$H = P\frac{\delta'_{hp}}{\delta'_{hh}} = \frac{\{3(k+1)hz^2 - (2k+1)z^3\}}{2(k+2)h^3}\,P$$

$$V = P\frac{\delta'_{vp}}{\delta'_{vv}} = \frac{3kz^2}{(6k+1)lh}P;\; M = P\frac{\varphi''_{mp}}{\varphi''_{mm}} = \frac{kz^2}{2(2k+1)h}P$$

$$M_a = Hy_2 - V\tfrac{1}{2}l + M;\; V_a = V;\; H_a = H$$

$$M_c = M_a - Hh;\; M_d = M_c + Vl \text{ atau } -Hy_1 + V\tfrac{1}{2}l + M$$

$$M_b = -Pz + Hy_2 + V\cdot\tfrac{1}{2}l + M \text{ atau } M_d + H_h;\; V_b = -V;\; H_b = H - P$$

Muatan penuh terbagi rata, q.

$$H = \frac{q}{2(k+2)h^3}\int_o^h\{3(k+1)hz^2 - (2k+1)\cdot z^3\}dz = \frac{2k+3}{8(k+2)}qh$$

$$V = \frac{3kq}{lh(6k+1)}\int_o^h z^2dz = \frac{k}{(6k+1)l}\cdot qh^2$$

$$M = \frac{kq}{2(2k+1)l}\int_o^h z^2dz = \frac{k}{6(2k+1)}qh^2$$

Bidang-muatan segitiga dengan ordinat q_b di B dan o di D

$$q_z = \frac{h-z}{h}q_b$$

$$H = \frac{q_b}{2(k+2)h^4}\int_o^h\{(3k+1)hz^2 - (2k+1)z^3\}(h-z)dz = \frac{9k+4}{240(k+2)}q_bh$$

$$V = \frac{3kq_b}{lh^2(6k+1)}\int_o^h z^2(h-z)dz = \frac{k}{4(6k+1)l}q_bh^2$$

$$M = \frac{kq_b}{2(2k+1)h^2}\int_o^h z^2(h-z)dz = \frac{k}{24(2k+1)}q_bh^2$$

Kejadian khusus, P bekerja di kepala tihang, jadi z = h.

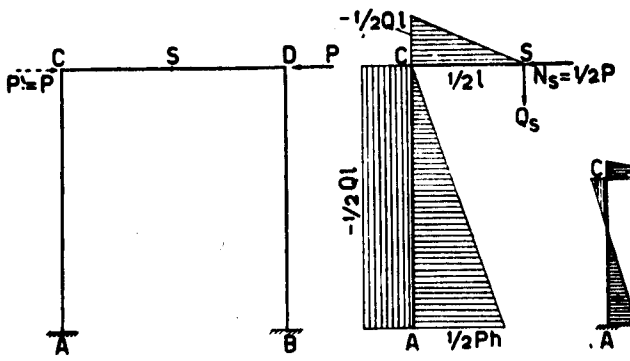
$$H = \tfrac{1}{2}P;\; V = \frac{3k}{(6k+1)}\cdot\frac{l}{h}P;\; M = \frac{k}{2(2k+1)}hP$$

Jika P bekerja pada tihang kiri, lebih mudah secara mengadakan potongan di tengah-tengah palang CD, yaitu titik S' (ungkit OS).

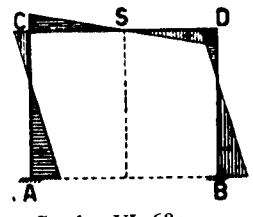
Kejadian ini juga boleh dihitung secara langsung menurut alasan simetris. Kekuatan P menimbulkan di titik-tengah balok S: momen $M_s = \alpha_m P$, gaya-normal $N_s = \alpha_n P$ dan peralihan vertikal $\delta_s = P.\delta_{sp}$ Kekuatan $P' = P$ yang bekerja di C dan berlawanan arahnya, menimbulkan juga di titik S momen $M_s = \alpha_m . P$, kekuatan normal $N_s = \alpha_n P$, dan peralihan $\delta_s = P\delta_{sp}$, oleh karena keadaan simetris. Jika P dan P' bekerja bersamaan, maka momen di S menjadi $M_s = 2\alpha_m P$ dan peralihannya menjadi $2P\delta_{sp}$. Akan tetapi P dan P' menghapuskan satu sama lain sedang garis-kerjanya bersatu padu dengan sumbu balok CD, jadi hanya menimbulkan gaya-normal N_s sebesar $2\alpha_n P = P$ saja di balok CD dan M_s serta δ_s kedua-duanya bernilai nol. Jadi $2\alpha_m P = o$ dan $2P\delta_{sp} = 0$, yang berarti bahwa $\alpha_m = 0$ dan $\delta_{sp} = 0$; $\alpha_n = \tfrac{1}{2}$. (robahan panjang diabaikan).

Jika sekarang hanya satu kekuatan P yang bekerja, maka terdapat:

$$N_s = \tfrac{1}{2}P;\; M_s = 0;\; \delta_s = 0$$



Gambar VI, 68



Gambar VI, 68a

Kita mempelajari bagian ACS. Di tampang S bekerja gaya-normal N_S = ½ P dan gaya lintang Q_S, yang menimbulkan bidang-bidang-momen seperti digambar VI, 68 kanan.

Oleh karena $\delta_s = 0$, maka statis momennya $\frac{1}{EI}$ bidang-bidang momen ini terhadap garis-vertikal yang melalui titik S berjumlah nol.

$$-\frac{1}{EI_b}\cdot\tfrac{1}{2}Q_s l\cdot\tfrac{1}{4}l\cdot\tfrac{1}{3}l-\frac{1}{EI_t}\tfrac{1}{2}Q_s l\cdot h\tfrac{1}{2}l+\frac{1}{EI_t}\cdot\tfrac{1}{2}Ph\cdot\tfrac{1}{2}h\cdot\tfrac{1}{2}l=0$$

$$-\tfrac{1}{24}\cdot Q_s l^2-\tfrac{1}{4}kQ_s l^2+\tfrac{1}{8}kPhl=0$$

$$\tfrac{1}{24}(6k+1)Q_s l^2=\tfrac{1}{8}kPhl$$

$$Q_s=\frac{3k}{(6k+1)}\frac{h}{l}P$$

$$M_a=\tfrac{1}{2}Ph-\tfrac{1}{2}Q_s l=\frac{(3k+1)}{2(6k+1)}\cdot Ph;\ V_a=Q_s=\frac{3k}{(6k+1)}\frac{h}{l}P$$

$$H_a=N_s=\tfrac{1}{2}P$$

$$M_c=-\tfrac{1}{2}Q_s l=-\frac{3k}{2(6k+1)}Ph$$

$$M_d=+\tfrac{1}{2}Q_s l=\frac{3k}{2(6k+1)}$$

$$M_b=+\tfrac{1}{2}Q_s l-\tfrac{1}{2}Ph=-\frac{(3k+1)}{2(6k+1)}Ph=-M_a;\ V_b=-V_a$$

$$H_b=N_s-P=-\tfrac{1}{2}P\ \text{(bekerja keluar)}$$

$$H=H_a=\tfrac{1}{2}P;\ V=Q_s=\frac{3k}{(6k+1)}\frac{h}{l}P;\ M=H.y_1=$$

$$=\tfrac{1}{2}P\cdot\frac{1}{2k+1}h=\frac{1}{2(2k+1)}Ph$$

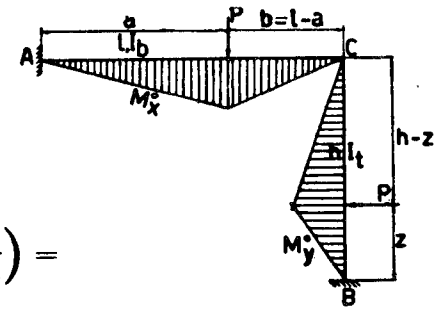
$$M_s=-Hy_1+M=0$$

Perjalanan garis momen yang terdapat terlihat pada gambar VI,68a.

§ 63. Portal-buntung.

Perjalanan yang termudah ialah dengan mempergunakan hukum tiga momen, oleh karena kepala tihang tak akan beralih.

a. Muatan-vertikal.



Gambar VI, 69

$$\tfrac{1}{3}M_a\frac{l}{EI_b}+\tfrac{1}{6}M_c\frac{l}{EI_b}=$$

$$=\tfrac{1}{6}\frac{Pa(l-a)(2l-a)}{EI_b}\quad..(1)$$

$$\tfrac{1}{6}M_a\frac{l}{EI_b}+M_c\left(\tfrac{1}{3}\frac{l}{EI_b}+\tfrac{1}{4}\frac{h}{EI_t}\right)=$$

$$=\frac{\tfrac{1}{6}Pa(l-a)(l+a)}{EI_b l}\quad.....(2)$$

$$2M_a+M_c=\frac{P}{l^2}a(l-a)(2l-a)\quad.....(1)$$

$$2M_a+(3k+4)M_c=2\frac{Pa}{l^2}(l-a)(l+a)\quad.....(2)$$

$$3(k+1)M_c=3\frac{P}{l^2}.a^2(l-a)$$

$$M_c=\frac{a^2(l-a)}{(k+1)l^2}P\ \text{(nilai mutlaknya), jadi lengkapnya,}$$

$$M_c=\frac{-a^2(l-a)}{(k+1)l^2}P\ \text{dan}\ M_b=-\tfrac{1}{2}M_c$$

$$2M_a=\frac{P}{l^2}a(l-a)(2l-a)-M_c$$

$$M_a=\frac{P}{2l^2}\left\{a(l-a)(2l-a)-\frac{a^2(l-a)}{k+1}\right\}=\frac{P}{2l^2}a(l-a)\left(2l-a-\frac{a}{k+1}\right)=$$

$$=\frac{P}{2(k+1)l^2}a(l-a)\{2(k+1)l-(k+2)a\}$$

b. Kekuatan mendatar, bekerja sejauh z di atas B.

$$M_c\left(\tfrac{1}{4}\frac{l}{EI_b}+\tfrac{1}{8}\frac{h}{EI_t}\right)+\tfrac{1}{6}M_b\frac{h}{EI_t}=\tfrac{1}{6}\frac{P}{EI_t h}z(h-z)(h+z).....(1)$$

$$\tfrac{1}{6}M_c\frac{h}{EI_t}+\tfrac{1}{3}M_b\frac{h}{EI_t}=\tfrac{1}{6}\frac{P}{EI_t h}z(h-z)(2h-z)\quad.....(2)$$

$$(4k+3)M_c+2kM_b=2k\frac{P}{h^2}z(h-z)(h+z)$$

$$kM_c + 2kM_c = k\frac{P}{h^2}z(h-z)(2h-z)$$

$$3(k+1)M_c = 3k\frac{P}{h^2}z^2(h-z)$$

$$M_c = \frac{kz^2(h-z)}{(k+1)h^2}\cdot P \text{ (nilai-mutlak)},\quad M_c = -\frac{kz^2(h-z)P}{(k+1)h^2};\quad M_a = -\tfrac{1}{2}M_c$$

$$M_c = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{P}{h^2}z(h-z)(2h-z) - M_c\right\}$$

§ 64. **Busur segi-tiga simetris tegak.**

Susunan dasar adalah bangunan dibelah dipuncaknya. OC=½h.

$$\delta_{hh} = \int y^2\frac{ds}{EI} + \int\cos^2\alpha\frac{ds}{EF}$$

$$\delta'_{hh} = EI\delta_{hh} = \int y^2 ds +$$

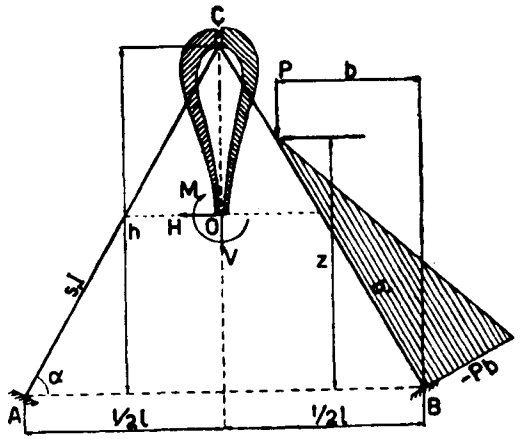
$$+ i^2\int\cos^2\alpha ds = 2\left\{\tfrac{1}{12}sh^2 + \right.$$

$$\left. + i^2\frac{s(\frac{1}{2}l)^2}{s^2}\right\} = \tfrac{1}{6}sh^2 + \tfrac{1}{4}i^2\frac{l^2}{s} =$$

$$= \tfrac{1}{6}sh^2(1+\mu),\ \text{dengan}\ \mu =$$

$$= \tfrac{3}{2}\cdot\frac{i^2}{h^2}\cdot\frac{l^2}{s^2}\ \text{(bandingkan}$$

§ 30)



Gambar VI, 70

$$\delta'_{vv} = EI\delta_{vv} = 2\int_0^{\frac{1}{2}l} x^2 ds = 2\,.\,s\,.\,\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}l)^3 = \tfrac{1}{6}sl^2$$

$$\varphi'_{mm} = EI\varphi_{mm} = 2\int_0^{\frac{1}{2}l} ds = 2s$$

a. Muatan vertikal P.

$$P\delta'_{hp} = -Pb\,.\,\tfrac{1}{2}b'(\tfrac{1}{3}b\,\mathrm{tg}\,\alpha - \tfrac{1}{2}h) = Pb^2\,.\,\frac{s}{\frac{1}{2}l}\left(\tfrac{1}{2}h - \tfrac{1}{3}\frac{bh}{\frac{1}{2}l}\right) = \tfrac{1}{6}\frac{P}{l^2}shb^2(3l-4b)$$

$$P\delta'_{vp} = \tfrac{1}{2}Pb^2\frac{s}{\frac{1}{2}l}(\tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{3}b) = \tfrac{1}{6}\frac{P}{l}sb^2(3l-2b)$$

$$P\varphi''_{mp} = \tfrac{1}{2}Pb^2\frac{s}{\frac{1}{2}l} = \frac{P}{l}sb^2$$

$$H = P\frac{\delta'_{hp}}{\delta'_{hh}} = \frac{b^2(3l-4b)}{(1+\mu)l^2h}P = \left(1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right)\frac{b^2(3l-4b)}{l^2h}P$$

$$V = P\frac{\delta'_{vp}}{\delta'_{vv}} = \frac{b^2(3l-2b)}{l^3}P;\ M = P\frac{\varphi''_{mm}}{\varphi'_{mm}} = \tfrac{1}{2}\frac{b^2}{l}P$$

$$M_a = H\,.\,\tfrac{1}{2}h - V\,.\,\tfrac{1}{2}l + M = P\left\{\frac{b^2(3l-4b)}{2(1+\mu)l^2} - \tfrac{1}{2}\frac{b^2(3l-2b)}{l^2} + \tfrac{1}{2}\frac{b^2}{l}\right\}$$

$$M_c = -\tfrac{1}{2}Hh + M$$

$$M_b = -Pb + \tfrac{1}{2}Hh + V\,.\,\tfrac{1}{2}l + M$$

$$V_a = V;\ V_b = P - V;\ H_a = H_b = H$$

Muatan penuh terbagi rata, q (di atas CB).

$$H = \frac{q}{(1+\mu)l^2h}\int_0^{\frac{1}{2}l} b^2(3l-4b)db = \frac{ql^2}{16(1+\mu)h} = \left(1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right)\tfrac{1}{16}q\frac{l^2}{h}$$

$$V = \frac{q}{l^3}\int_0^{\frac{1}{2}l} b^2(3l-2b)db = \tfrac{5}{32}ql$$

$$M = \frac{q}{2l}\int_0^{\frac{1}{2}l} b^2 db = \tfrac{1}{48}ql^2$$

$$M_a = H\,.\,\tfrac{1}{2}h - V\,.\,\tfrac{1}{2}l + M = \left(\tfrac{1}{32} - \tfrac{5}{64} + \tfrac{1}{48} - \frac{\mu}{1+\mu}\cdot\tfrac{1}{32}\right)ql^2 =$$

$$= \tfrac{1}{192}\left(1 - 6\frac{\mu}{1+\mu}\right)ql^2$$

$$M_c = -H\tfrac{1}{2}h + M = -\tfrac{1}{96}\left(1 - 3\frac{\mu}{1+u}\right)ql^2$$

$$M_b = -\tfrac{1}{2}q(\tfrac{1}{2}l)^2 + H\,.\,\tfrac{1}{2}h + V\,.\,\tfrac{1}{2}l + M = -\tfrac{1}{192}\left(5 + 6\frac{\mu}{1+\mu}\right)ql^2$$

$$V_a = V = \tfrac{5}{32}ql;\ V_b = \tfrac{1}{2}ql - V = \tfrac{13}{32}ql$$

$$H_a = H_b = H$$

Bandingkanlah pendapat-pendapat ini dengan § 49.

Muatan penuh di atas ACB.

$$H = 2\left(1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right)\tfrac{1}{16}q\frac{l^2}{h} = \left(1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right)\tfrac{1}{8}q\frac{l^2}{h}$$

$$V = 0.\ M = 2.\ \tfrac{1}{48}ql^2 = \tfrac{1}{24}ql^2$$

$$M_a = \tfrac{1}{192}\left(1 - 6\frac{\mu}{1+\mu}\right)ql^2 - \tfrac{1}{192}\left(5 + 6\frac{\mu}{1+\mu}\right)ql^2 = -\tfrac{1}{48}\left(1 + 3\frac{\mu}{1+\mu}\right)ql^2$$

$$M_c = 2\left\{-\tfrac{1}{96}\left(1 - 3\frac{\mu}{1+\mu}\right)\right\}ql^2 = -\tfrac{1}{48}\left(1 - 3\frac{\mu}{1+\mu}\right)ql^2$$

$$M_b = M_a$$

$$V_a = V_b = \tfrac{1}{2}ql;\ H_a = H_b = H$$

b. Muatan mendatar, sejauh z di atas AB.

$$P\delta'_{hp} = -\tfrac{1}{2}Pz^2\frac{s}{h}(\tfrac{1}{3}z - \tfrac{1}{2}h) = \tfrac{1}{12}\frac{P}{h}sz^2(3h-2z)$$

$$P\delta'_{vp} = \tfrac{1}{2}Pz^2\frac{s}{h}(\tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{3}z\cot g\,\alpha) = \tfrac{1}{2}P\frac{s}{h}z^2\left(\tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{3}z\cdot\frac{\frac{1}{2}l}{h}\right) = \tfrac{1}{12}\frac{P}{h^2}ls(3h-z)z$$

$$P''_{mp} = \tfrac{1}{2}Pz^2\frac{s}{h}$$

$$H = P\frac{\delta'_{hp}}{\delta'_{hh}} = \tfrac{1}{2}\frac{(3h-2z)z^2}{(1+\mu)h^3}P = \left(1-\frac{\mu}{1+\mu}\right)\tfrac{1}{2}\frac{P}{h^3}(3h-2z)z^2$$

$$V = P\frac{\delta'_{vp}}{\delta'} = \tfrac{1}{2}\frac{P}{lh^2}(3h-z);\ M = \tfrac{1}{4}\frac{P}{h}z^2$$

$$H_a = H;\ H_b = H - P$$

$$V_a = V;\ V_b = -V$$

$$M_a = H\tfrac{1}{2}h - V\cdot\tfrac{1}{2}l;\ M_c = -H\tfrac{1}{2}h + M;\ M_b = -Pz + H\cdot\tfrac{1}{2}h + V\cdot\tfrac{1}{2}l + M$$

Muatan penuh terbagi rata q, di atas CB.

$$H = \frac{q}{2(1+\mu)h^3}\int_o^h(3h-2z)z^2dz = \left(1-\frac{\mu}{1+\mu}\right)\tfrac{1}{4}qh$$

$$V = \frac{q}{2lh^2}\int_o^h(3h-z)zdz = \tfrac{3}{8}q\frac{h^2}{l}$$

$$M = \frac{q}{4h}\int_o^h z^2dz = \tfrac{1}{12}qh^2$$

$$M_a = H\cdot\tfrac{1}{2}h - V\cdot\tfrac{1}{2}l + M = \tfrac{1}{48}qh^2 - \tfrac{1}{8}\frac{\mu}{1+\mu}qh^2 = \tfrac{1}{48}\left(1-6\frac{\mu}{1+\mu}\right)qh^2$$

$$M_c = -H\cdot\tfrac{1}{2}h + M = \tfrac{1}{24}\left(1+3\frac{\mu}{1+\mu}\right)qh^2$$

$$M_b = -\tfrac{1}{2}qh^2 + H\cdot\tfrac{1}{2}h + V\cdot\tfrac{1}{2}l + M = -\tfrac{1}{48}\left(5+6\frac{\mu}{1+\mu}\right)qh^2$$

$$V_a = V = \tfrac{3}{8}q\frac{h^2}{l};\ V_b = -V = -\tfrac{3}{8}q\frac{h^2}{l}$$

$$H_a = H = \left(1-\frac{\mu}{1+\mu}\right)\tfrac{1}{4}qh;\ H_b = H - qh = -\tfrac{1}{4}qh + \tfrac{1}{4}\frac{\mu}{1+\mu}qh =$$

$$= -\tfrac{1}{4}\left(3-\frac{\mu}{1+\mu}\right)qh$$

Dengan hukum tiga-momen (μ = o)

$\frac{1}{6}M_cs + \frac{1}{3}M_cs + \frac{1}{6}M_bs = \frac{1}{24}qsh^2$ .. (1)

$\frac{1}{6}M_cs + \frac{1}{3}M_bs = \frac{1}{24}qsh^2$ ..... (2)

$7M_c + 2M_b = \frac{1}{2}qh^2$ ..... (1)

$M_c + 2M_b = \frac{1}{4}qh^2$ ..... (2)

$6M_c = \frac{1}{4}qh^2$

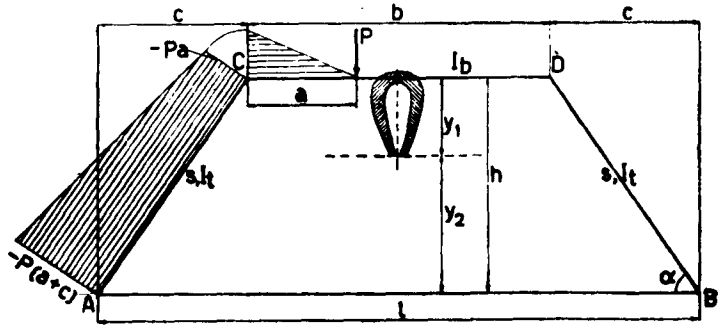
$$M_c = \tfrac{1}{24}qh^2 \text{ (negatif)}$$

$$M_b = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}qh^2 - M_c) = \tfrac{5}{48}qh^2 \text{ (negatif)};\quad M_a = -\tfrac{1}{2}M_c \text{ (positip)}$$

Jika P bekerja di puncak C, sedang μ diabaikan, maka P boleh diuraikan menurut kaki-kaki AC dan BC, dan bangunan tak menahan momen (§ 26).

§ 65. Portal serong simetris.

Susunan dasar dengan belahan di puncak



Gambar VI, 71a

$$k = \frac{s}{h}\cdot\frac{I_b}{I_t};\ y_1 = \frac{2s\cdot\frac{1}{2}h\,EI_t}{2s/EI_t + b/EI_b} = \frac{k}{2k+1}\cdot h;\ y_2 = \frac{k+1}{2k+1}\cdot h$$

$$\delta_{hh} = \frac{2}{EI_t}\{\tfrac{1}{12}sh^2 + s(\tfrac{1}{2}h - y_1)^2\} + \frac{1}{EI_b}\cdot by_1^2$$

$$\delta'_{hh} = \delta_{hh}\cdot\frac{EI_b}{b} = 2k(\tfrac{1}{3}h^2 - hy_1 + y_1^2) + y_1^2 =$$

$$= \tfrac{1}{3}kh^2\left(2-6\frac{k}{2k+1}\right) + 6\frac{k^2}{(2k+1)^2} + \frac{3k}{(2k+1)^2} =$$

$$= \frac{kh^2}{3(2k+1)^2}(8k^2 + 8k + 2 - 12k^2 - 6k + 6k^2 + 3k) =$$

$$= \frac{kh^2(2k^2+5k+2)}{3(2k+1)^2} = \frac{k(k+2)}{3(2k+1)}\cdot h^2$$

$\delta_{vv} = \frac{2}{EI_t}\int_{\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}l} x^2 dx \,.\sec\alpha + \frac{1}{12}\cdot\frac{b^3}{EI_b} = \frac{2}{EI_t}\cdot\frac{1}{24}(l^3 - b^3)\frac{s}{c} + \frac{1}{12}\frac{b^3}{EI_b}$, sedang $l - b = 2c$.

$$\delta'_{vv} = \delta_{vv}\cdot\frac{1}{b}\,.\,EI_b = \tfrac{1}{6}k(l^2 + lb + b^2) + \tfrac{1}{12}b^2 = \tfrac{1}{12}\{k(l^2 + lb + b^2) + b^2\}$$

$$\varphi_{mm} = 2\frac{s}{EI_t} + \frac{b}{EI_b}\,;\ \varphi'_{mm} = 2k + 1$$

a. Muatan vertikal P di atas balok CD sejauh a < ½b dari C

$$\delta_{hp} = -\frac{sa}{EI_t}(\tfrac{1}{2}h - y_2) - \tfrac{1}{2}\frac{sc}{EI_t}(\tfrac{1}{3}h - y_2) - \frac{1}{2EI_b}a^2 y_1$$

$$\delta'_{hp} = \delta_{hp}\cdot\frac{1}{b}\,.\,EI_b = \frac{kha}{3(2k+1)} + \tfrac{1}{2}khc\frac{k+2}{3(2k+1)} - \tfrac{1}{2}h\frac{a^2}{b}\frac{k}{2k+1} =$$

$$= \frac{kha}{6(2k+1)}\left\{3 + \frac{c}{d}(k+2) - 3\frac{a}{b}\right\}$$

$$\delta'_{vp} = -ka(\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c) - \tfrac{1}{2}kc(\tfrac{1}{2}b + \tfrac{2}{3}c) - \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{b}(\tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{3}a)$$

$$\varphi''_{mp} = ka + \tfrac{1}{2}kc + \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{b}$$

$$H = P\frac{\delta'_{hp}}{\delta'_{hh}}\,;\ V = P\frac{\delta'_{vp}}{\delta'_{vv}}\ \text{(negatif)},\ M = P\frac{\varphi_{mp}}{\varphi'_{mm}}$$

b. Muatan vertikal P di atas kaki, sejauh a dari A (gambar VI,71b)

$$\delta'_{hp} = \frac{EI_b}{b}\cdot\frac{1}{2EI_t}a^2\frac{s}{c}\left(y_2 - \tfrac{1}{3}a\frac{h}{c}\right) = \tfrac{1}{2}k\frac{h}{c^2}a^2\left(\frac{k+1}{2k+1}\cdot c - \tfrac{1}{3}a\right)$$

$$\delta'_{vp} = -\tfrac{1}{2}k\frac{a^2}{c}(\tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{3}a)$$

$$\varphi''_{mp} = \tfrac{1}{2}k\frac{a^2}{c}$$

c. Muatan mendatar P setinggi z.a $\frac{h}{c}$ di atas diganti dengan z.

$$\delta'_{hp} = \tfrac{1}{2}k\frac{z^2}{h}(y_2 - \tfrac{1}{3}z) = \tfrac{1}{2}k\frac{z^2}{h}\left\{\frac{(k+1)}{(2k+1)}h - \tfrac{1}{3}z\right\}\ \delta'_{vp} = -\tfrac{1}{2}k\frac{z^2}{h}\left(\tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{3}z\frac{c}{h}\right)$$

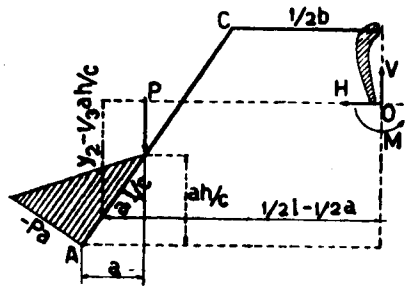
$$\varphi''_{mp} = \tfrac{1}{2}k\frac{z^2}{h}$$

Kejadian khusus, z = h

$$\delta'_{hp} = \tfrac{1}{2}kh^2\left(\frac{k+1}{2k+1} - \tfrac{1}{3}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{6}k\frac{(k+2)}{(2k+1)}h^2;\ \delta'_{vp} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}k\frac{h^2}{c}(\tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{3}c);$$



Gambar VI, 71b

$$\varphi''_{mp} = \tfrac{1}{2}k\frac{h^2}{c}\,;\ H = \tfrac{1}{2}P$$

Juga dapat dengan alasan simetri seperti § 62.

d. Muatan vertikal di atas C. Terdapat dari kejadian a jika a = 0, atau dari kejadian b jika a = c.

$$\delta'_{hp} = \frac{(k+2)}{6(2k+1)}\cdot khc;\ \delta'_{vp} = -\tfrac{1}{2}kc(\tfrac{1}{2}b + \tfrac{2}{3}c)\ \text{atau}$$

$$-\tfrac{1}{2}kc(\tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{3}c);\ \varphi''_{mp} = \tfrac{1}{2}kc$$

Muatan terbagi $q_{\bar{x}}$; dengan secara integrasi jika a atau z dibuat variabel, dan P diganti dengan $dP = q_z dx$ atau $dP = q_z dz$.

§66. Portal dengan konsol.

Susunan tak berbeda dengan portal menurut gambar VI, 67 § 62.

$$\frac{h}{l}\frac{I_b}{I_t} = k;\ y_1 = \frac{k}{2k+1}\,.\,h;\ y_2 = \frac{(k+1)h}{2k+1}$$

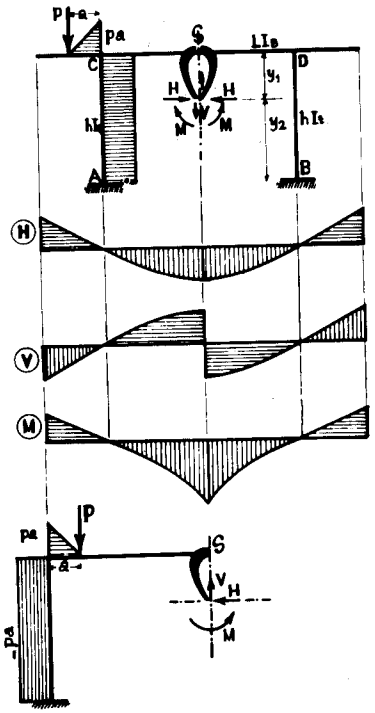
$$\delta'_{hh} = \frac{k(k+2)h^2}{3(2k+1)}$$

$$\delta'_{vv} = \tfrac{1}{12}(6k+1)^2;\ \varphi'_{mm} = 2k+1$$

Susunan pokok statis-tertentu terjadi secara membelah bangunan di tengah-tengah balok, titik S. Jadi V itu berarti kekuatan melintang di S, yang positif jika bagian kiri bergerak ke atas terhadap bagian kanan.

1. Muatan di luar portal, sejauh a dari ujung.

$M^{o}_{cd} = 0$; M_o - tiang = Pa (positif oleh karena bagian tertarik ada di sebelah dalam)



Gambar VI, 72

$$P\delta_{hp} = \frac{1}{EI_t}\, Pa.h(y_1 - \tfrac{1}{2}h) = -\frac{P}{EI_t}\,\frac{h^2a}{2(2k+1)}$$

$$\delta'_{hp} = \delta_{hp}\cdot\frac{EI_b}{l} = -\frac{kha}{2(2k+1)}$$

$$\delta_{vp} = -\frac{1}{EI_t}\,ah(-\tfrac{1}{2}l) = \frac{1}{EI_t}\cdot\frac{lha}{2}$$

$$\delta'_{vp} = \delta_{vp}\frac{EI_b}{l} = \frac{kha}{2}$$

$$\varphi'_{mp} = -\frac{1}{EI_t}\cdot ah;\ \varphi''_{mp} = -k\cdot a$$

$$H = P\frac{\delta'_{hp}}{\delta'_{hh}} = -\frac{3a}{2(k+2)h}P$$

$$V = P\frac{\delta'_{vp}}{\delta'_{vv}} = \frac{6ka}{(6k+1)l}P$$

$$M = P\frac{\varphi''_{mp}}{\varphi'_{mp}} = -\frac{ka}{(2k+1)}P$$

$$M_a = Pa - H\cdot y_a + Vx_a + M =$$

$$= Pa - \frac{3Pa}{2(k+2)}\cdot\frac{(k+1)}{(2k+1)} - \frac{3kPa}{(6k+1)} - \frac{Pka}{(2k+1)}$$

$$M_c = Pa - H\cdot y_c + Vx_c + M =$$

$$= Pa + \frac{3Pa}{2(k+2)}\cdot\frac{k}{(2k+1)} - \frac{3kPa}{6k+1} - \frac{Pka}{(2k+1)} \quad \text{atau} \quad M_c = M_a - Hh$$

$$M_d = -Hy_d + Vx_d + M = \frac{3Pa}{2(k+2)}\cdot\frac{k}{(2k+1)} + \frac{3kPa}{6k+1} - \frac{Pka}{(2k+1)}$$

$$M_b = -Hy_b + Vx_b + M = \frac{3Pa}{2(k+2)}\cdot\frac{k}{(2k+1)} + \frac{3kPa}{6k+1} - \frac{Pka}{2k+1}$$

$$M_s = -Hy_s + M = \frac{3Pa}{2(k+2)}\cdot\frac{k}{(2k+1)} - \frac{Pka}{2k+1}$$

2. Muatan P berdiri di dalam portal sejauh a dari C

$$\delta_{hp} = -\frac{1}{EI_b}\cdot\tfrac{1}{2}a^2y_1 - \frac{1}{EI_t}\cdot ha(y_1 - \tfrac{1}{2}h) = \frac{1}{EI_t}\frac{h^2a}{2(2k+1)} - \frac{1}{EI_b}\frac{ha^2}{2(2k+1)}$$

$$\delta'_{hp} = \frac{EI_b}{l}\,\delta_{hp} = \frac{kha}{2(2k+1)} - \frac{ha^2}{2(2k+1)l} = \frac{kha(l-a)}{2(2k+1)l};\ H = \tfrac{3}{2}\frac{a}{(k+2)h}P$$

$$\delta_{vp} = \frac{ha}{EI_t}\cdot\tfrac{1}{2}l + \frac{\frac{1}{2}a^2}{EI_b}\cdot(\tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{3}a)$$

$$\delta'_{vp} = \tfrac{1}{2}kla + \tfrac{1}{12}\frac{a^2(3l-2a)}{l} = \frac{6kl^2a + a^2(3l-2a)}{12l};\ V = \left\{\frac{6kl^2a + a^2(3l-2a)}{(6k+1)l^3}\right\}P$$

$$\varphi'_{mp} = \frac{ha}{EI_t} + \frac{\frac{1}{2}a^2}{EI_b};\ \varphi''_{mp} = ka + \frac{\frac{1}{2}a^2}{l} = \frac{2kla + a^2}{2l};\ M = \frac{(2kla + a^2)}{2(k+1)l}P$$

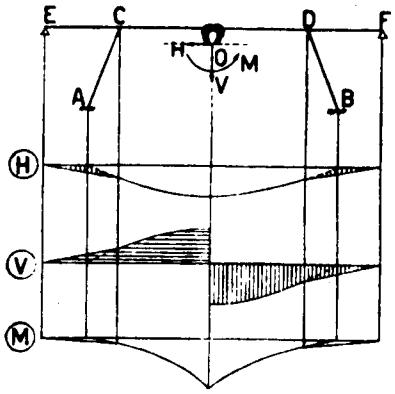
Cabang-cabang garis-garis pengaruh *H, V dan M* di luar portal berjalan lurus dan menyinggung pada bagian-bagian yang dalam.

§ 67. Portal dengan balok.

Perletakan-perletakan balok di atas portal ada bebas jadi balok-balok di samping portal itu statis-tertentu (bandingkan § 33).

Selama *P* berdiri di antara *C* dan *D* perjalan garis garis pengaruh *H, V* dan *M* tak dipengaruhi oleh adanya balok-balok *CD* dan *DE*, jadi serupa dengan pada bangunan gambar VI, 71a § 65. Jika *P* berdiri di luar portal, nilai-nilai *H,V* dan *M* hanya tergantung kepada reaksi perletakan balok pada portal (V^{o}_{c} dan V^{o}_{d})

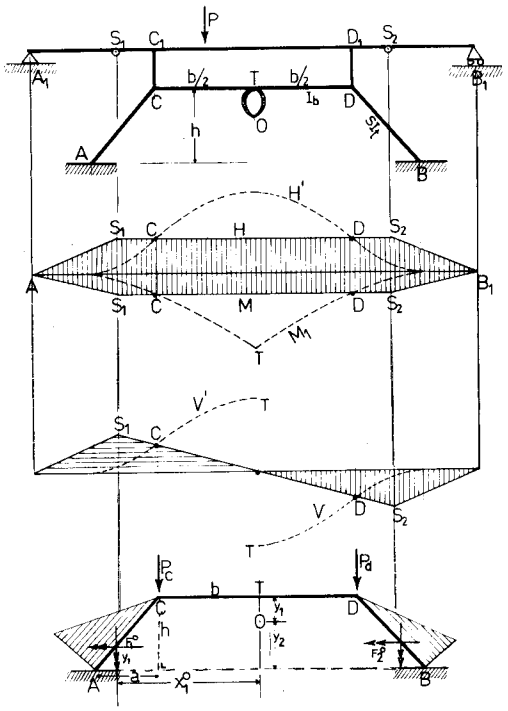
Jadi bagian-bagian garis-garis pengaruh ini di luar portal berjalan lurus serta menunjukan tukikan di bawah *C* dan *D*.



Gambar VI, 73

§ 68. Beban tidak langsung.

Kita ambil portal berbentuk trapezium simetris A B C D. seperti di dalam 65/67. Beban dilimpahkan dari balok-berber dengan perantaraan tihang-tihang CC_1 dan DD_1 kepada portal. Besaran-tihang 8_{hh}, 8_{vv} dan φ_{mm} terdapat seperti di dalam § 65 jika beban bekerja langsung, garis-garis pengaruh H, V dan M.



Gambar VI, 74

terlukis sebagai garis-garis H', V' dan M'. Oleh karena tidak langsung, garis-garis ini harus diluruskan di antara titik-titik – perlimpahan beban (yaitu C dan D). Berhubung dengan itu, maka garis-garis – pengaruh H, V dan M yang sewajarnya, berjalan lurus di antara S_1 dan S_2 (sendi-sendi pada balok-gerber) dan kemudian mencapai ordinat nol secara lurus di bahwa A_1 dan B_1. Ordinat garis-garis pengaruh H dan M ternyata bernilai tetap di antara C dan D itu, sedang untuk V bernilai nol di bawah titik T (tengah-tengah D C).

Satu sama lain juga boleh dijelaskan demikian :

Selama beban P berdiri di antara S_1 dan S_2 sejauh x dari A, maka ini dilimpahkan sebesar P_c di C dan sebesar P_d di D dengan $P_c + P_d = P$.

$M_a^\circ = P_c.a$; $M_d^\circ = -P_d - P_d.a$; M_x° = di antara C dan D.

$F_1^\circ = \frac{1}{2} P_c.as$; $y_1^\circ = y_1 - 1/3\ h$; $x^0{}_1 = 2/3\ a + \frac{1}{2}\ b$ (nilai-nilai mutlaknya)

$F_2^\circ = \frac{1}{2}$ Pd as ; $y_2^0 = 2/3\ h - y_1$; $x_2^0 = 2/3\ a + \frac{1}{2}\ b$

$\delta_h^\circ\ EI_t = F_1^0 y_1^0 + F_2^0 y_2^0 = \frac{1}{2}(P_c + P_d)$ as. 1/3 h = P. 1/6 ash, tetap (tak dipengaruhi oleh x)

$\delta_V^\circ\ EI_t = -F_1^\circ y_1^\circ + F_2^\circ y_2^\circ = (-P_c + P_d)\ \frac{1}{2}$ as (2/3 a + ½ b) = $(-1 + 2\ x/l)$ as (1/3 a + ¼ b), fungsi lurus dari X.

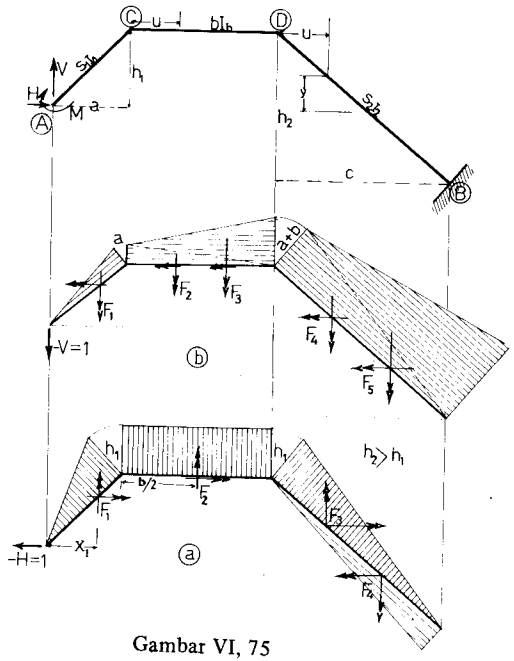
Pada $x = \frac{1}{2}\ l$ (P di T) terdapat $-1 + 2\ x/l = 0$

$\varphi_m^\circ\ EI_t = F_1^\circ + F_2^\circ = P.\ \frac{1}{2}$ as, tetap.

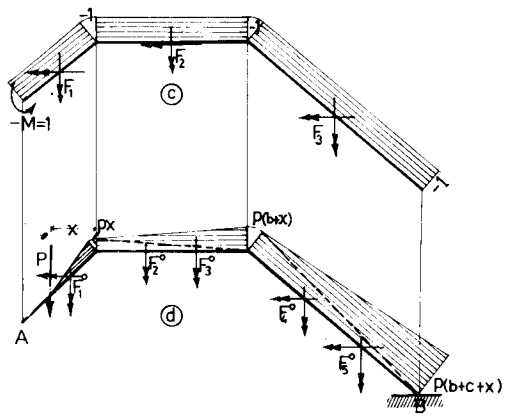
§ 69. Portal tak simetris (gb. VI, 75)

Gaya-gaya statis kelebihan H, V dan M tetap kita kerjakan pada ujung A; jadi kita tidak mempergunakan titik-berat lenturan O serta ungkitnya, sebab menentukan ketetapan titik ini tidak begitu mudah, apalagi arah sumbu-sumbu inersia utamanya X dan Y yang serong. Sebaliknya kita terpaksa menghitung dan menggunakan juga besaran-besaran: $\delta_{hv} = \delta'_{vh}$, $\delta'_{hm} = \varphi'_{mh}$

$\delta'_{vm} = \varphi'_{mv}$.



Gambar VI, 75



Gambar VI, 75b

Susunan statis – tertentu ialah bangunan terjepit sebelah di B.

a). **Dengan cara goemetri** (moment – area).

1. Besaran δ_{hh}, δ_{vh} dan φ'_{mh} (gb. a)

Kita mengerjakan gaya – H = 1 (keluar) pada ujung A kemudian menggambar bidang-bidang momennya. Luas-luas bidang momen ini F dianggap sebagai gaya-gaya mendatar ke kanan, dan vertikal ke atas jika momennya positif, jadi negatif ke kiri atau ke bawah. Kemudian yang kita pelajari nanti ialah" momen"-nya gaya-gaya F itu terhadap titik A dengan ketentuan: **positif** jika berputar **ke kanan** (jadi negatif ke kiri). Untuk δ_{hh} kita anggap sebagai gaya mendatar untuk δ_{vh} sebagai gaya vertikal dan untuk φ'_{mh} kita ambil besarnya dengan tanda lawan dimukanya.

Di dalam hitungan di bawah ini, kita ambil nilai-nilai mutlaknya.

$F_1 = \frac{1}{2} s_1 h_1$; $y_1 = 2/3\ h$; $x_1 = 2/3\ a$

$F_2 = bh_1$; $y_2 = h_1$ $x_2 = a + \frac{1}{2} b$.

$F_3 = \frac{1}{2} s_2 h_2$; $y_3 = h_1 - 2/3\ h_2$; $x_3 = a + b + 1/3\ c$

F_4 = (negatif) = $\frac{1}{2} s_2 (h_2 - h_1)$; $y_4 = 2/3\ h_2 - h_1$; $h_4 = a + b + 2/3\ c$

$= 1 - 1/3\ c$.

$\delta_{hh} = \Sigma$ F.y./EI., positif jika berputar ke kanan terhadap A.

$\delta_{hh} = \frac{1}{2} s_1 h_1 . 2/3\ h_1/EI_1 + bh_1^2/EI_b (\frac{1}{2} s_2/EI_2)\ [h_1(h_1 - 1/3\ h_2) + (h2 - h_1)$
$(2/3\ h_2 - h_1)] = s_1 h_1^2/3EI_1 + bh_1^2/EI_b + S_2(h_1^2 - h_1 h_2 + 1/3\ h_2^2)/EI_2$

Pada gambar terlihat bahwa F_4 berarah ke kiri, namun momennya terhadap A tetap positif, sebab $2/3\ h_2 > h_1$. Jika $2/3\ h_2 < h_1$ momennya menjadi negatif, tetapi begitu juga ($2/3\ h_2 - h_1$).

Kita mengetahui, bahwa faktor pengaruh pribadi δ_{hh}, δ_{vv} dan φ_{mm} itu **selalu positif**, oleh karena itu kita tentukan bahwa luas bidang – momen F yang positif dianggap sebagai gaya kekanan supaya menghasilkan F.y yang positif untuk besaran δ_{hh}.

Untuk hitungan δ_{vv} kita nanti mengerjakan V = –1 (ke bawah) di A sehingga menimbulkan **momen-momen negatif.** Oleh karena δ_{vv} itu – harus positif, maka luas bidang momen F yang negatif dianggap sebagai gaya vertikal **ke bawah** supaya menghasilkan **Fx** yang positif.

Jadi luas bidang momen positif seperti yang diakibatkan oleh H=–1 itu, kita anggap sebagai gaya vertikal ke atas, sehingga menghasilkan **Fx** yang **negatif** di dalam hitungan δ_{vh} di bawah ini.
(cocog dengan rumus dasar dulu, $\delta_{vh} = \delta_{hv} = -$ xy ds/EI).

$\delta_{vh} = \Sigma$ F.x./EI = – [$\frac{1}{2} sh_1 . 2/3\ a/E1_1 + bh_1\ (a + \frac{1}{2} b)/EI_b + (s_2/2EI_b)$
$\{h_1 (a + b + 1/3\ c) - (h_2 - h_1)(a + b + 2/3\ c)\}]$ =

$= [s_1 h_1 a/3E_1 + bh_1 (a + \frac{1}{2} b)/E1_b + s_2 \{ h_1 (a + b + 1/3\ c) -$
$(h_2 - h_1)(a + b + 2/3\ C)\} / EI_2]$

$\varphi'_{mh} = - \Sigma$ F /EI = – $\{ s_1 h_1/2EI + bh_1/EI_b + s_2 (2h_1 - h_2) / EI_2 \}$.

2. Hitungan δ_{vv}, δ_{hv} dan φ'_{mv} (gb. b)

$F_1 = \frac{1}{2} s_1 a$; $y_1 = 2/3\ h_1$; $x_1 = 2/3\ a$.

$F_2 = \frac{1}{2} ba$; $y_2 = h$; $x_2 = a + 1/3\ b$.

$F_3 = \frac{1}{2} b\ (a+b)$; $y_3 = h_1$; $x_3 = a + 2/3\ b$

$F_4 = \frac{1}{2} s_2 (a + b + c)$; $y_4 = h_1 - 1/3\ h_2$; $x_4 = a + b + 2/3\ c$

$F_5 = \frac{1}{2} s_2 (a + b + c)$; $y_4 = h_2 - h_1$; $x_5 = a + b + 2/3\ c$.

$\delta_{vv} = \Sigma$ F.x./EI. $= \frac{1}{2} s_1$ a. 2/3 a/EI$_1$ + (b/2EI$_b$) {a(a+2/3b) + (a+b) (a+2/3b)} + (s_2/2EI$_2$) {(a+b) (a+b+1/3 c + (a+b+c) (a+b+2/3c)}

$= s_1 a^2/ EI_1 + b(a^2 + ab + 1/3\ b^2)/EI_b + s_2\ (a^2 + b^2 + 2ab + ac + bc\ 1/3c^2)$ /EI$_2$.

$\delta_{hv} = \Sigma$ Fy/EI $= -$ [½s_1a. 2/3h_1/EI + ½ bh_1 (2a+b)/EI$_b$ + ½ s_2 {(a+b) (h – 1/3 h_2) – (a+b+c) (2/3 h_2 – h_1)}/EI$_2$

$= -$ [$s_1 h_1$a/3EI$_1$ + bh, (a+½b)/EI$_b$ + s_2 { (h_1 (a+b+½c) – ½ h_2 (a+b+ 2/3c)} / EI$_2$ = δ_{vh}

$\varphi'_{mv} = -\Sigma$ F./EI. $= s_1$a/2EI$_1$ + b (a+½b) / EI$_b$ + s_2 (a+b+½c)/EI$_2$.

3. Hitungan φ_{mm}, δ'_{hm} dan δ'_{vm} (gb. c). Mengerjakan M = – 1 di A.

$\varphi_{mm} = -\ \Sigma$ F./EI. $= s_1$/EI$_1$ + b/EI$_b$ + s_2 /EI$_2$.

$\delta'_{hm} = \Sigma$ F y/EI. $= -\{s_1$ ½h_1/EI$_1$ + bh_1/EI$_b$ + s_2/EI$_b$ + s_2 (½ h_2 – h_1)/EI$_2$

$= -$ ($s_1 h_1$/2EI$_1$ + bh_1/EI$_b$ – s_2 (h_1 – ½ h_2) /EI$_2$ } $= \varphi'_{mh}$

$\delta'_{vm} = \Sigma$ F. x./EI. $= s_1$.½a/EI$_1$ + b (a+½ b) /EI$_b$ + s_2 (a+b+ 2/3c)/EI$_2$

$= \varphi'_{mv}$.

b. **Secara analisa** (gambar pertama).

$\delta_{hh} = \int y^2$ ds/EI; $\delta_{vv} = \int x^2$ ds/EI : $\varphi_{mm} = \int$ ds/EI; $\delta_{hv} = \delta_{vh} = -\int$ xy ds/EI;

$\delta'_{hm} = \varphi'_{mh} = -\int$ y ds/EI; $\delta'_{vm} = \varphi'_{mv} = \int$ x ds/EI.

Batang AC : $y = x.h_1/a$; $ds = dx.\ s_1/a = dy.\ s_1/h_1$

Batang CD : $x = a + u$; $y = h_1$; $ds = du$ (u diukur dari C)

Batang DB: $x = a + b + u$; $y = h_1 - u\ h_2/c$; $ds = du\ s_2/c$ (u diukur dari D)

$\delta_{hh} = \int y^2$ ds/EI $= (s_1/h_1$ EI) $\int_o^h y^2$ dy + (h^2/EIb) $\int_o^b$ d u + (s_2/CEI$_2$) $\int (h_1 - u\ h_2/c)^2$ du $= s_1 h_1^2$ /3EI, + bh_1^2/EI$_b$ + s_2 ($h_1^2 - h_1\ h_2^2$) EI$_2$

$\delta_{vv} = \int x^2$ ds/EI $= (s_1/aEI_1) \int_o^a x^2$ dx + $\int_o^b$ (a+u)^2 du/EI$_b$ + (s_2/cEI$_2$) $\int_o^c$ (a+b+u)^2 du $= s_1 a^2/3EI_1$ + b(a^2 + ab + 1/3 b^2)/EI$_b$ s_2 (a^2+b^2 + 1/3 c^2 + 2 ab + ac + bc)/EI$_2$.

$\varphi_{mm} = \int$ ds/EI $= s_1$/EI$_1$ + b/EI$_b$ + s_2/EI$_2$.

$\delta_{hv} = \delta_{vh} = -\int$ xy ds/EI $= -$ [(s_1/aEI$_1$) $\int$ x^2 (h_1/a)dx + (h_1/EI$_b$) $\int_c^b$ (a+u) du + (s_2/cEI$_2$) $\int_o^c$ (a+b+u) (h_1 – uh_2/c) du] $= -$ [$s_1 h_1$a/3EI$_1$ + bh_1 (a+½b)/EI$_b$ + s_2 { h_1 (a+b+½c) + h_2 (½a+½b+½b+1/3c) }/EI$_2$].

$\delta'_{hm} = \varphi'_{mh} = -\int$ y ds/EI $= -$ {(s_1/h_1EI$_1$) $\int_o^{h_1}$ y dy + (h_1/EI$_b$) $\int_o^b$ du + (s_2/cEI$_2$) $\int_o^c$ (h_1 – uh_2/c) du) =

$= -\{ s_1 h_1/2EI_1 + bh_1/EI_b + s_2\ (h_1 - \frac{1}{2}h_2)/EI_2\}$

$\delta'_{vm} = \varphi'_{mv}$ $\int$ x ds/EI $= (s_1/aEI_1) \int_o^a$ xdx + $\int_o^b$ (a+u) du/EI$_b$ + (s_2/cEI$_2$) $\int$ (a+bu)du $= s_1$a/EI$_1$ + b(a+½b)/EI$_b$ + s_2 (a+b+½c)/EI$_2$.

Beban vertikal P sejauh x di kiri C (gb. d)

Kita menggunakan cara dengan luas bidang momen.

F_1° = ½(S_1 – xs_1/a) Px = P.½ s_1(1 –x/a)x; $y_1^\circ = h_1 - 1/3$ x; X_1° = a–1/3 x.

F_2° = P. ½ bx; $y_1^\circ = h_1$; x_2° = a + 1/3 b.

F_3° = P. ½ b (b+x) ; $y_3^\circ = h_1$; x_3° = a + 2/3 b.

F_4° = P. ½ s_2 (b+x); $y_4^\circ = h_1 - 1/3\ h_z$; x_4° = a + b + 1/3 c.

F_5° = P. ½ s_2 (b+c+x); y_5° = 2/3 h_2–h_1. x_5° = a + b + 2/3c.

$\delta_h^\circ = F_1^\circ y_1^\circ/EI_1 - (F_2^\circ + F_3^\circ)\ y_2^\circ/EI_b - (F_4^\circ . y_4^\circ = F_5^\circ . y_5^\circ .)/EI_2$.

$\delta_v^\circ = F_1^\circ y_1^\circ/EI_1 + (F_2^\circ x_2^\circ + F_3^\circ x_3^\circ)/EI_b + (F_4^\circ x_4^\circ + F_5^\circ x_5^\circ)/EI_2$.

$\varphi_m^\circ = F_1^\circ/EI_1 + (F_2^\circ + F_3^\circ)/\ EI_b + (F_4^\circ + F_5^\circ)\ /\ EI_2$.

$H\delta_{hh} + V\delta_{hv} + M\delta'_{hm} = \delta_h^\circ$ (1)

$H\delta_{vh} + V\delta_{vv} + M\delta'_{vm} = \delta_v^\circ$ (2)

$H\varphi'_{mh} + V\varphi'_{mv} + M\varphi_{mm} = \varphi_m^\circ$ (3)

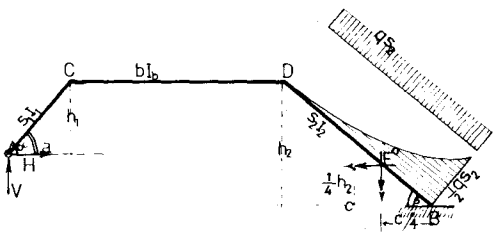
$H_a = H_b = H$; $V_a = V$; $V_b = P - V_a$; $M_a = M$.

$M_x = M_x^\circ - H_y + V_x + M$.

$x_c = a$; $y_c = y_d = h_1$; $x_d = a+b$; $x_b = a + b + c$; $y_b = -(2/3h_2 - h_1)$;

§ 69a. Beberapa contoh.

1) Portal sendi/jepit, gb. VI, 76a (lihat juga IV, § 37, contoh a dan VII, § 16)



Gambar VI, 76a

A perletakan sendi, B Jepit.

$b = s_2 = s_1$; $tg\alpha = 4/3$; $tg\beta = 3/4$;

jadi: $a = 0,3b$; $h_1 = 0,4b$;

$c = 0,8b$; $h_2 = 0,6\,b$.

$I_1 : I_2 : I_b = 2 : 3 : 3$.

$k_1 = (s_1/b)(I_b/I_1) = \frac{1}{2}.\,3/2 = 3/4$

$k_2 = (s_2/b)\,I_b/I_2) = 1$.

Sebagai gaya - gaya statis - kelebihan diambil H dan V di A.
(jadi $H = H_a$, $V = V_a$).

$\delta_{hh} = s_1h_1^2/3EI_1 + bh_1^2/EI_b + s_2\,(h_1^2 - h_1h_2 + 1/3\,h_2^2)/EI_2$.

$\delta'_{hh} = \delta_{hh}\,EI_b/b = \frac{1}{4}h_1^2 + h_1^2 + h_1^2 - h_1h_2 + 1/3\,h_2^2 = 6/25 \cdot b^2$.

$\delta_{vv} = s_1a^2/3EI_1 + b(a^2 + ab + 1/3\,b^2)/EI_b + s_2\,(a^2+b^2+1/3c^2+2ab+ac+bc)/EI_2$

$\delta'_{vv} = \delta_{vv}\,EI_b/b = 9/4\,a^2 + 4/3\,b^2 + 1/3\,c^2 + 3\,ab + ac + bc = 4427/1200 \cdot b^2$

$\delta_{hv} = \delta_{vh} = -[s_1h_1a/3EI_1 + h_1b(a+\frac{1}{2}b)/EI_b + s_2\,\{(a+b)(h_1 - 1/3\,h_2) - (a+b+c)\,(2/3\,h_2 - h_1)\}/2EI_2]$

$\delta'_{hv} = \delta_{hv}\,EI_b/b = -[\,\frac{1}{4}h_1a + h_1a + \frac{1}{2}h_1b + \frac{1}{2}\,\{(a+b)\,(h_1 - 1/3\,h_2) - 0\}\,] = -12/25.\,b^2$.

Beban penuh merata q⊥ tihang B.D.

$M_b^\circ = -\frac{1}{2}\,q\,s_2^2 = -\frac{1}{2}\,q\,b^2$. Luas bidang momen $F^\circ = \frac{1}{2}\,q\,s_2^2.\,1/3\,s_2 = 1/6qs_2^2$

$y^\circ = 3/4\,h_2 - h_1 = 1/20\,b$, $x^\circ = a + b + 3/4c = 19/10.b$.

$\delta_h^\circ = F^\circ y^\circ/EI_2$; $(\delta_h^\circ)' = \delta_h^\circ\,EI_b/b = 1/6.\,1/20.\,qb^3 = 1/120.\,qb^3$

$\delta_v^\circ = F^\circ x^\circ/EI_2$; $(\delta_v^\circ)' = \delta_v^\circ\,EI_b/b = 1/6.\,19/10\,qb^3 = 19/60.\,qb^3$

$6/25.H - 12/25.V = 1/20.qb$ (1) ‖ $V = 16/131.\,qb = 0,122\,qb = V_a$

$-12/25.H + 4427/1200V = 19/60.qb$ (2) ‖ $H = 2V + 5/144\,qb = 0,278\,qb = H_a$.

$V_b = 0,8qs_2 - V_a = 0,678\,qb$.; $H_b = 0,6\,qs_2 = Ha = 0,322.qb$.

$M_c = -Hh_1 + V_a = (-0,278.0,4 + 4 + 0,122.0,3)\,qb^2 = -0,0746\,qb^2$.

$M_d = M_c + V_b = 0,0474\,qb^2$.

$M_b = M_d + V_c + Hh_2 - \frac{1}{2}\,qs_2^2 = -0,283\,qb^2$

Apabila perletakan A itu juga jepit, maka ada tambahan-tambahan sebagai berikut:

$\varphi_{mm} = s_1/EI_1 + b/EI_b + s_2/EI_2$; $\varphi'_{mm} = k_1 + 1 + k_2 = 2,75$

$\delta'_{hm} = \varphi'_{mh} = -[-s_1h_1/2EI_1 + bh_1/EI_b + s_2\,(h_1 - \frac{1}{2}\,h_2)/EI_2$

$\delta''_{hm} = \varphi''_{mh} = -(3/8\,h_1 + h_1 + h_1 - \frac{1}{2}\,h_2) = 13/20.b$

$\delta'_{vm} = \varphi'_{mv} = s_1a/2EI_1 + b(a+\frac{1}{2}b)/EI_b + s_2(a+b+\frac{1}{2}c)/EI_2$.

$\delta''_{vm} = \varphi''_{mv} = 3/8\,a + a + \frac{1}{2}b + a + b + \frac{1}{2}\,c = 209/8.b$.

$\varphi_m^\circ = 1/6\,qs_2^3/EI_2\,(\varphi_m^\circ) = 1/6\,qs_2^2 = 1/6\,qb^2$.

$H\delta'_{hh} + V\delta'_{hv}\,M\delta''_{hm} = (\delta_m^\circ)'$

$H\delta'_{vm} + V\delta'_{vv} + M\delta''_{vm} = (\delta_v^\circ)'$,

$H\varphi''_{mh} + V\varphi''_{mv} + M\varphi'_{mm} = (\varphi_m^\circ)'$

II. Rangka payon jepit ABCDE, (gb. VI, 76 b)

$s_1 = 7,5$ m; $s_2 = 10$; $a = 4,5$ m;

$b = 8$ m; $h = 6$m;

jadi $z = 6m = h$;

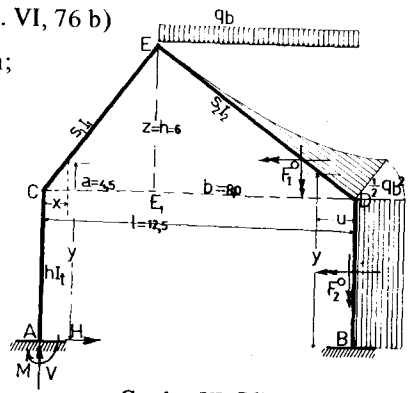
$l = a + b = 12,5$ m.

$I_t : I_1 : I_2 = 2 : 3 : 4$.

Beban vertikal merata

q (= 1t/m) di atas ED.

Gaya - gaya kelebihan : H, V dan M di A.



Gambar VI, 76b

$k_1 = (s_1/h)\,(I_t/I_1) = (7,5/6)\,(2/3) = 5/6$

$k_2 = (s_2/h)\,(I_t/I_2) = (10/6)\,(2/4) = 5/6$
(kebetulan sama)

$\delta_{hh} = 2\int_o^b y^2 dy/EI_t + (s_1/z)\int_h^{h+z} y^2 dy/EI_1 + (s_2/z)\int_h^{h+z} y^2 dy/EI_2.$

$\delta'_{hh} = \delta_{hh} EI_t/h = 2/3\, h^2 + 1/3(k_1+k_2)\ \{(h+z)^2 + h + 2)\, h + h^2\} = 41/9.h^2$
$= 164\ [m^2]$.

$\delta_{vv} = (s_1/a)\int_o^a x^2 dx/EI_1 + (s_2/b)\int_o^b (l-u)^2\, du/EI_b + hl^2/EI_t = s_1 a^2/3EI_1$
$+ s_2\,(l^2 b - lb|^2 + 1/3\, b^3)\ /\ bEI_b + hl^2/EI_t.$

$\delta'_{vv} = \delta_{vv} EI_t/h = 1/3\, k_1 a^2 + k_2(l^2 - lb + 1/3\, b^2) + l^2 = 3262/2250.\, l^2$
$= 8155/36\ [m^2]$.

$\varphi'_{mm} = 1 + k_1 + k_2 + 1 = 11/3$. (tak berdimensi).

$\delta_{vh} = \delta_{hv} = -[(s_1/z)(a/z)\int_h^{h+z} y^2 dy/EI_1 + (s_2/b)\int_o^b (l-u)\,(h+uz/b)\, du/EI_2 +$
$l\int_o^h y dy/EI_t$

$\delta'_{vh} = \delta'_{hv} = \delta_{hv} EI_t/h = -[k_1(a/z)(h+z)h + h^2 + k_2\,(lh + \tfrac{1}{2}l_2 - \tfrac{1}{2}bh - 1/3\, hz)$
$+ \tfrac{1}{2}\, lh] = -14/9.\, lh = -350/3\ [m^2]$.

$\delta'_{hm} = \varphi'_{mh} = -[\,2\int_o^h y dy/EI_t + (s_1/z)\int_h^{h+z} y dy/EI_2 + (s_2/z)\int_h^{h+z} y dy/EI_2\,] =$

$\delta''_{hm} = \varphi''_{mh} = \delta'_{hm} EI_t/h = -\{\, h + \tfrac{1}{2}k_1(2h+z) + \tfrac{1}{2}k_2(2h+2)\,\} = -3{,}5h =$
$-21\ [m]$

$\delta'_{vm} = \varphi'_{mv} = (s_1/a)\int_o^a x dx/EI_1 + (s_2/b)\int_o^b (l-u)\, du/EI_2 + lh/EI_t.$

$\delta''_{vm} = \varphi''_{mv} = \delta'_{vm} EI_t/h = \tfrac{1}{2}k_1 a + k_2\,(l - \tfrac{1}{2}b) + l = 103/60l = 515/24\ [m]$

Akibat beban ; $M_d^\circ = M_b^\circ = -\tfrac{1}{2}\, qb^2 = -32$ tm.

$F_1^\circ = \tfrac{1}{2}\, qb^2.1/3\, s_2 = 1/6\, qb^2\ s_2$; $y_1^\circ = h + \tfrac{1}{4}z = 5/4.h$; $x_1^\circ = \tfrac{1}{4}\, b = 21/25l.$

$F_2^\circ = \tfrac{1}{2}\, qb^2 h$; $y_2^\circ = \tfrac{1}{2}\, h$; $x_2^\circ = l.$

$\delta_h^\circ = (F_1^\circ y_1^\circ/EI_2 + F_2^\circ y_2^\circ/EI_t)$; $(\delta_h^\circ)' = \delta_h^\circ EI_t/h = -(1/6.5/4+1/2.1/2)\, qb^2 h =$
$= -488/3\ [tm^2]$

$\delta_v^\circ = F_1^\circ x_1^\circ/EI_2 + F_2^\circ x_2^\circ/EI_t$; $(\delta_v^\circ)' = (1/6.21/25\, k_2 + \tfrac{1}{2})\, qb^2 l = 1480/3$
$[tm^2]$

$(\varphi_m^\circ)' = (1/6\, k_2 + \tfrac{1}{2})\, qb^2 = 23/36.\, qb^2 = 368/9\ [tm]$

$164\,H - 350/3.V - 21\,M = -488/3$
$-350/3.H + 8155/36.V + 515/24M = 1480/3$

$21H + 5{,}5/24.V + 11/3\,M = 368/9$

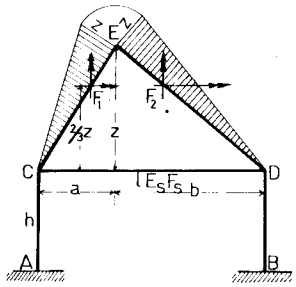
$H = H_a = 1{,}27t = H_b$
$V = V_a = 2{,}44t$; $V_b = qb - V_a = 5{,}56t.$
$M = M_a = 4{,}16$ tm

$M_c = M_a = Hh = -3$,tm; $M_c = M_c = H_z + V_a = -0{,}100$ tm; $M_d = M_c + Vl - \tfrac{1}{4}qb^2$
$= -4{,}69$ tm

$M_b = M_a + Vl - \tfrac{1}{2}\, qb^2 = 2{,}66$ tm atau $M_b = M_a + Hh$.

III. Dengan batang tarik, Gb VI, 76c.

Pada bangunan menurut contoh di atas, diadakan batang-tarik di antara titik-titik C dan D dengan $E_sF_s = 180\, EI_t/h^2$ (jadi $EI_t/E_sF_s = h^2/180$).



Gambar VI, 76c

Gaya pada batang tarik sebesar $S = -1$. menghasilkan momen-momen hanya pada bagian-bagian diatas garis CD, yaitu pada balok-balok CE dan DE, yang bidang-bidangnya berbentuk segitiga dengan ordinat $M'_e = z$ di E.

$F_1 = \tfrac{1}{2}\, s_1 z_1$; $y_1 = h + 2/3z = 5/3h$; $x_1 = 2/3a$

$F_2 = \tfrac{1}{2}s_2 z$; $y_2 = h + 2/3z = 5/3\, h$; $x_2 = a + 1/3\, b$

$\delta_{ss} = F_1.2/3z/EI_1 + F_2.2/3/EI_2 + 1/E_sF_s.$

$\delta'_{ss} = \delta_{ss} EI_t/h = (k_1+k_2)z^2 + 1/180\, lh =$
$(5/9 + 12{,}5/6.180)\, h^2 = 245/12\ [m^2]$

$\delta_{hs} = F_1 y_1/EI_1 + F_2 y_2/EI_2 = 5/6\, s_1 zh/EI_1 + 5/6\, s_2 zh/EI_2 = \delta_{sh}.$

$\delta'_{hs} = \delta_{hs} EI_t/h = 5/6\,(k_1+k_2)zh = 50\ [m^2]$

$\delta_{vs} = F_1 x_1/EI_1 + F_2 x_2/EI_2 = \tfrac{1}{2}\, s_1 z.\, 2/3\, a/EI_1 + \tfrac{1}{2}\, s_1 z\,(a+1/3b)/EI_2$

$\delta'_{vs} = \delta_{vs} EI_t/h = -\{\, 1/3\, k_1 z + \tfrac{1}{2}\, k_2 z\,(a+1/3b)\,\} = -305/12\ [m^2]$

$\varphi'_{ms} = -(F_1/EI_1 + F_2/EI_2) = \delta'_{sm}$; $\varphi''_{ms} = -\tfrac{1}{2}\,(k_1+k_2) = -5$ [m]

$\delta_s^\circ = -1/6\, qb^2\, s_2.\, \tfrac{1}{4}z/EI_2$; $(\delta_s^\circ) = \delta_s^\circ EI_t/h = -1/24\, k_2\, qb^2 s =$
$-40/3\ [tm^2]$

$164\,H - 350/3.V - 21\,M + 50\ S = -488/3$

$-305/3.H + 8155/36.V + 515/25.M - 305/12.S =$
$= 1480/3$

$-21H + 515/24.V + 11/3.M - 5S = 368/9$

$50H - 305/12.V - 5\,M + 245/12.S = -40/3$

$H = H_a = 0{,}43t = h_b$
$V = V_a = 2{,}43t$; $V_b =$
$qb - V_a = 5{,}67t$
$M = M_a = 1{,}82$ tm
$S = 1{,}77t$ (lihat juga)

$M = M_a - Hh = -0{,}75$ tm; $M_e = M_c - Hz + V_a = S_z = 2{,}97$ tm;

$M_d = M_c + Vl - \frac{1}{2}qb^2 = -2{,}38$ tm; $M_b = M_a + Vl - \frac{1}{2}qb^2 = 0{,}20$ tm.

Kita bandingkan hasil-hasil bangunan tanpa dan bangunan dengan batang tarik

Besaran	H_a (t)	V_a (t)	M_a(tm)	M_c(tm)	M_e(tm)	M_d(tm)	M_d(tm)	S(t).
Tanpa batang tarik	1,27	2,44	4,16	–3,46	–0,100	–4,96	–2,66	–
Dengan batang	0,43	2,43	1,82	–0,75	–2,97	–2,38	–0,20	1,77

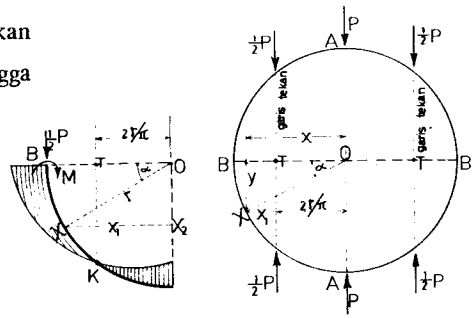
Terlihat bahwa S praktis tidak mempengaruhi reaksi-reaksi perletakan V_a dan V_b; ini dapat dimengerti oleh karena S itu hanya gaya - dalam saja, sedang V_a dan V_b itu gaya-gaya luar vertikal, yang mengimbangi beban luar vertikal juga.

Apabila A dan B itu perletakan-perletakan bebas-bebas (sendi dan rol), secara eksakta terdapat bahwa V_a dan V_b sama sekali tidak dipengaruhi oleh ada atau tidaknya batang-tarik C D. Menurut contoh di atas, $V_a = \frac{1}{2}qb^2/l = 2{,}56.t$

F. BANGUNAN BATANG TERTUTUP

§ 70. **Gelangan lingkaran**, Gb. VI 77

Batang berpenampang kecil dibandingkan dengan radius – bengkoknya, sehingga hanya deformasi akibat momen (lentur) saja yang diperhitung. Selanjutnya besaran EI dianggap tetap sama pada keseluruhannya. Beban terdiri dari dua gaya P di titik-titik A yang diametral pada satu sama lain serta koplanar dengan sumbu-batang. Oleh karena kejadiannya simetris terhadap garis-garis AA dan BB (yang pada s.s.l.), maka penampang-penampang A dan B tidak berputar - sudut, dan pada tampang-tampang B tidak ada gaya geser Q.



Gambar VI, 77

Selanjutnya masing-masing tampang B ini menerima gaya-normal tekan N=½p (alasan simetris) dan di samping itu, momen-lentur M yang belum diketahui. Kita memotong batang di titik-titik B, yang berakibat lenyapnya gaya-gaya tampangnya di situ, yaitu: gaya lintang Q, gaya normal N dan momen M. Tadi sudah dijelaskan bahwa Q = 0, sedang N = ½P sudah diketahui. Untuk mempertahankan keutuhan batang, kita harus mengembalikan gaya-gaya tampang itu, di antaranya hanya M saja yang belum diketahui. Dengan begitu soal menjadi statis tak tertentu tunggal dengan M sebagai gaya kelebihan.

Oleh karena tampang-tampang A dan B masing-masing tidak berputar sudut, maka kesimpulan kita ialah, bahwa A tidak berputar sudut terhadap B, yang dapat ditulis : $\int_A^B d = 0$

Pada sesuatu penamapng x terdapat: $M_X = M_X^\circ + M$ sedang $d = M_X\, ds/EI$. jadi $\int_A^B M_X\, ds/EI = 0$ atau $\int_A^B M_X\, ds = 0$ (sebab EI besaran konstanta).

Ini berarti bahwa jumlah aljabarnya bidang momen antara A dan B = 0.

$M_X^\circ = \frac{1}{2}\, Pr\,(1 - \cos\alpha)$ dengan pengertian bahwa momen itu **positif** jika **tepi dalamnya** penampang **tertarik**

$\int_A^B (M_X^\circ + M)\, ds = 0$, sedang $ds = r\, d\alpha$

$$\int_o^\pi \{\tfrac{1}{2}\, Pr\,(1 - \cos\alpha) + M\}\, r\, d\alpha = 0$$

$$M\int_o^\pi d\alpha = -\tfrac{1}{2}\, Pr \int (1 - \cos\alpha)\, d\alpha$$

$M.\ \pi/2 = \frac{1}{2}\, P\, r\ \ (\pi/2^{-1})$; $M = -\frac{1}{2}\, p\, r\,(1 - 2/\pi)$

$M_X = \frac{1}{2}\, Pr\,(\cos\alpha - \pi/2) - \frac{1}{2}\, P.\, XX_1$

$r\,\pi/2$ = jarak titik –beratnya busur separoh lingkaran ABA (titik T) dari titik tengahnya lingkaran Q. Jika kita menarik garis-garis // P melalui titik-titik T di sebelah kiri dan kanannya P maka momen pada suatu penampang X terdapat sebesar ½ P kali jarak antara X dan salah satu dari garis-garis itu (yang terdekat). Ini boleh ditafsirkan, bahwa garis – garis termaksud adalah garis-garis tekannya pembebaanan P itu.

Penampang-penampang yang terletak di sebelah **luarnya** garis-garis tekan, menahan momen negatif yang ada disebelah dalamnya, menahan momen positif.

Pada titik-titik potong antara lingkaran dan garis-garis tekan, momennya = nol.

Ini terdapat pada $\cos\alpha = 2/\pi$

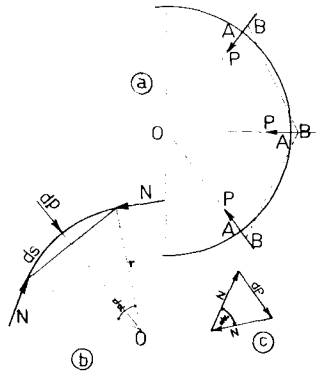
Selanjutnya $M_a = M_{\alpha = \pi/2} = + Pr/\pi$

Jika gaya-gaya itu bekerja ke arah luar, maka garis-garis tekan menjadi **garis-garis tarik**.

Perluasan soal.

Beban terdiri dari beberapa gaya P radial simetris di titik-titik A yang saling mengimbangi (gb. VI.78)

Titik-titik pegangan A dipindah ke titik-titik B, kemudian tiap-tiap gaya P diuraikan ke dalam komponenta-komponenta K sejajar garis-garis AA (jadi BB//AA). Jarak antara sesuatu penampang X dan garis BB ini adalah z, sehingga terbaca : $M_X = K_Z$,



Gambar VI, 78

Berdasarkan alasan simetri $\int_A^A d\varphi = 0$;

$\int_A^A M_X\, ds/EI = 0$; $(K/EI)\int_A^A zds = 0$ atau $\int_A^A zds = 0$

yang terakhir ini berarti, bahwa garis BB itu adalah garis beratnya busur AA. (melalui titik – beratnya serta //AA).

Khusus, beban **penuh merata** p kg/cm secara **radial.**

AA = ds $\longrightarrow$ 0. Jadi A = titik beratnya unsur ds; garis tekanimpit dengan sumbu batang sendiri.

Kita pelajari satu unsur ds = rdα yang menerima beban dP = pds = pr dα.

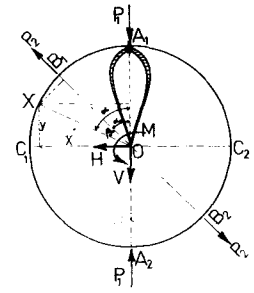
Gaya dP diimbangi oleh gaya-gaya normal N yang bekerja pada ujung-ujung unsur.

Terdapat (lihat gb.b dan c) : N=½ P/sin ½d = pr ½ dα/sin ½ dα = pr (sebab d$\alpha \to 0$).

Hasil ini berlaku juga pada batang yang membentuk bagian lingkaran, dan pada ujung-ujungnya akan bekerja reaksi-reaksi perletakan N= pr.

§ 71. Gelangan dengan dua pasangan gaya radial.

P_1 bekerja ke dalam, P_2 ke luar, $\angle A_1 OB_1 = \alpha_o$ (ditentukan). Soal kita pecahkan sebagai pelengkung jepit dengan titik - berat lenturannya yang berimpit dengan titik tengahnya gelangan. Kita mengadakan belahan di A_1 dan ungkit-ungkit A_1.



Gambar VI, 79

$\delta'_{hh} = \delta_{hh}\, EI = \int y^2 ds = \int_o^{2\pi} r^2 \cos^2\alpha\,(rd\,\alpha) = \pi r^3$; $\delta'_{vv} = EI\delta_{vv}$

$\int x^2 ds = r^3 \int_c^{2\pi} \sin^2\alpha d\alpha = \pi r^3$;

$\varphi'_{mm} = \varphi_{mm}\, EI = \int ds = 2\pi r$.

$M_X^\circ = -P_1 r \sin\alpha + P_2 r \sin(\alpha - \alpha_o) = -P_1 r \sin\alpha + P_2 \sin\beta$.

$\alpha - \alpha_o = \beta$ atau $\alpha = \alpha_o + \beta$; $\sin\alpha = \sin\alpha_o \cos\beta + \cos\alpha_o \sin\beta$;

$\cos\alpha = \cos\beta_o - \sin\alpha_o \sin\beta$.

$(\delta_h^\circ)' = \delta_h^\circ .\, EI = \int M_X^\circ\, yds = -\ P_r 3 \int_o^\pi \sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha +$

$+ P_2 r^3 \int_o^\pi \sin\beta\,(\cos\alpha_o \cos\beta - \sin\alpha_o \sin\beta)\, d\beta = -P_2 r^3 \tfrac{1}{2}\pi \sin\alpha_o$

$H = -\tfrac{1}{2} P_2 \sin\alpha_o$ (tarik pada penampang - penampang A_1 dan A_2 dan geser pada penampang-penampang C_1 dan C_2) Gaya-gaya P_1 tidak menimbulkan gaya-geser di C dan C_2 jadi memang tidak ikut menghasilkan gaya H itu

$(\delta_v^\circ) = \delta_v^\circ\, EI = -\int M_X^\circ\, xds = P_1 r^3 \int_o^\pi \sin\alpha\, d\alpha +$

$+ P_2 r^3 \int \sin\alpha_o\,(\sin\alpha_o \cos\beta_o + \cos\alpha_o \sin\beta)\, d\beta = P_1 .\tfrac{1}{2}\pi r^3 - P_2 .\tfrac{1}{2}\pi r^3 \cos\alpha_o$.

$V = \tfrac{1}{2} P_1 + \tfrac{1}{2} P_2 \cos\alpha_o$

$(\varphi_m^\circ) = \varphi_m^\circ .\, EI = -\int M_X^\circ\, ds = P_1 r^2 \int_c^\pi \sin\alpha\, d\alpha - P_2 r^2 \int_o^\pi \sin\beta\, d\beta =$

$= 2 P_1 r^2 - 2 P_2 r^2$; $M = (P_1 - P_2)\, r/\pi$

$M_a = 0 - Hr + V.O + M = -\frac{1}{2} P_2 r \sin\alpha_o + (P_1 - P_2)\, r/\pi + P_2 r\,(\frac{1}{2} - 1/\pi)$.

$M_{b1} = -P_1 \sin\alpha_o - Hr\cos\alpha_o - Vr\sin\alpha_o + M$.

$M_{c1} = -P_1 r + P_2 r\cos\alpha_o - H.O - V.r + M$.

$M_{a2} = O + P_2\, r\cos\alpha_o + Hr + V.c + M$.

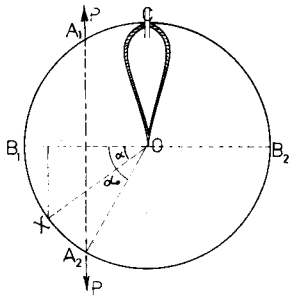
$M_{b2} = 0 + Hr\cos\alpha_o + Vr\sin\alpha_o + M$.

$M_{c2} = 0 + P_2\, r\cos\alpha_o - V.r + M$.

Hasil-hasil akibat P_1 harus sama dengan pendapat-pendapat di dalam soal §70

§ 72. **Dua beban P tidak diametral.** (gb. VI.80)

Oleh karena keadaan simetris, pada penampang-penampang B_1 dan B_2 tak ada gaya lintang, yang berarti bahwa H = 0. Selanjutnya cukup mempelajari **separoh** bangunan saja.



Gambar VI, 80

$\delta'_{vv} = \frac{1}{2}\pi r^2$; $\varphi'_{mm} = \pi r$.

$M^\circ_x = Pr(\cos\alpha - \cos\alpha_o)$

$(\delta^\circ_v)' = -\int M^\circ_x.x\, ds = Pr^3 \int_o^{\alpha_o} (\cos\alpha - \cos\alpha_o)\cos\alpha\, d\alpha = Pr^3\,(\frac{1}{2}\alpha_o +$

$\sin 2\alpha_o - \cos\alpha_o \sin\alpha_o) = Pr^3\,(\frac{1}{2}\alpha_o - \frac{1}{4}\sin 2\alpha_o)$.

$V = Q_c = P\,(\alpha_o - \frac{1}{2}\sin 2\alpha_o)/\pi$.

$(\varphi^\circ_m)' = -\int M^\circ_x\, ds = -Pr^2 \int_o^{\alpha_o} (\cos\alpha - \cos\alpha_o)\, d\alpha = Pr^2\,(\sin\alpha_o - \alpha_o\cos\alpha_o)$.

$M = -Pr\,(\sin\alpha_o - \alpha_o\cos\alpha_o)/\pi$.

$M_c = M$; dengan $\alpha_o = \pi/2$, $M_c = -Pr/\pi$

$M_{b1} = Pr(1 - \cos\alpha_o) - Vr + M$.

$M_{b2} = 0 + Vr + M$; dengan $\alpha_o = \pi/2$, $M_{b1} = M_{b2} = \frac{1}{2} Pr\,(1 - 2/\pi)$.

Oleh karena H = 0, hitungan tanpa ungkit juga mudah. Kita mempelajari belahan $B_1\, A_2\, B_2$ yang terjepit di B_1 dan terpotong bebas di B_2

Pada penampang B_2 ini bekerja gaya-gaya kelebihan V = N (dianggap tarik) dan M. (Q = 0)

Absis x diukur dari B_2 ke kiri, jadi $x = n\,(1 + \cos\alpha)$.

$\delta'_{vv} = \int x^2\, ds = r^3 \int_o^{\pi} (1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha)\, d\alpha = 1{,}5\,\pi\, r^3$: $\varphi'_{mm} = \int ds = \pi r$;

$\delta'_{vm} = \varphi'_{mv} = -\int r\, ds = -r^2 \int_o^{\pi} (1 + \cos\alpha)\, d\alpha = \pi r^2$.

$(\delta^\circ_v)' = +\int M^\circ_x.x\, dx = Pr^3 \int_o^{\pi} (\cos\alpha - \cos\alpha_o)(1 + \cos\alpha)\, d\alpha =$

$+ Pr^3\,(\sin\alpha + \frac{1}{2}\alpha_o + \frac{1}{4}\sin 2\alpha_o - \alpha_o\cos\alpha_o - \sin\alpha_o\cos\alpha_o)$.

$(\varphi^\circ_m)' = -\int M^\circ_x\, ds = -Pr^2 \int_o^{\pi} (\cos\alpha - \cos\alpha_o)\, d\alpha = -Pr^2\,(\sin\alpha_o -$

$\alpha_o\cos\alpha_o)$

$1{,}5\,\pi V - M\pi/r = P\,(\frac{1}{2}\alpha_o + \sin\alpha_o - \alpha_o\cos\alpha_o - \frac{1}{4}\sin 2\alpha_o)$.

$V\pi + M\pi/r = -P\,(\sin\alpha_o - \alpha_o\cos\alpha_o)$.

$V = M_{b2} = Q_o = P\,(\alpha_o - \frac{1}{2}\sin\alpha_o)/\pi$

$M = M_{b2} = Pr\,(\alpha_o - \sin\alpha_o + \alpha_o\cos\alpha_o - \frac{1}{2}\sin\alpha_o)/\pi$.

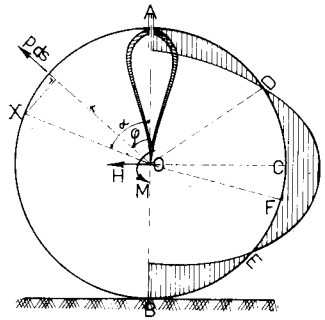
$M_c = -V_r + M = -Pr\,(\sin\alpha_o - \alpha_o\cos\alpha_o)/\pi$.

§73. **Pipa berisi cairan penuh** (gb. VI.81)

Pipa diletakkan di atas bidang mendatar, berat jenis cairan = γ dan tidak ada tekanan-kelebihan (overdruk).

Kita mengambil pipa sepanjang = l dan mengadakan belahan di puncaknya A dengan ungkit-ungkit AO.

Tekanan air setempat $r = \gamma r\,(1 - \cos\varphi)$ ke arah luar 1 dinding



Gambar VI, 81

$M^\circ_x = \int p\, ds.\, r\sin(\alpha - \varphi) = r^3\,(1 - \cos\varphi)$

$(\sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi)\, d\varphi$

$= \gamma r^3 (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos\alpha - \frac{1}{2}\alpha\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\sin^2\alpha + \frac{1}{2}\sin^2\alpha\cos\alpha)$

$= \gamma r^3\,(1 - \cos\alpha - \frac{1}{2}\alpha\sin\alpha)$ [kgm/m].

$(\delta_h^\circ) = \delta_h^\circ EI = -\int M_x^\circ \, yds = 2\gamma r^5 \int_\circ^\pi (1-\cos\alpha - \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha)\cos\alpha \, d\alpha =$

$= 2\gamma r^5 \, [\sin\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{4}\sin 2\alpha + 1/8\,\alpha\cos 2\alpha - 1/16 \sin 2\alpha]_\circ^\pi$

$= \tfrac{3}{4}\gamma\pi r^5$

$(\varphi_m^\circ)' = \varphi_m^\circ EI = -\int M_x^\circ \, ds = -2\gamma r^4 \int_\circ^\pi (1-\cos\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha\sin\alpha)\, d\alpha =$

$= -2\gamma r^4 \, [\alpha - \sin\alpha + \tfrac{1}{2}\cos\alpha - \tfrac{1}{2}\sin\alpha]_\circ^\pi = -\gamma r^4.$

$H = (\delta_h^\circ)'/\pi r^3 = -\tfrac{3}{4}\gamma^2$ [kg/m] ; $M = -\gamma\pi r^4/2\pi r = -\tfrac{1}{2}\gamma r^3$

[kgm/m]; V = 0

$M_x = M^\circ_x - H_y + M = \gamma r^3 (1-\cos\alpha - \tfrac{1}{2}\sin\alpha + \tfrac{3}{4}\cos\alpha - \tfrac{1}{2}) =$

$= \gamma r^3 (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\cos\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha\sin\alpha).$

$M_a = \tfrac{1}{4}\gamma r^3$; $M_c = -\tfrac{1}{2}\gamma r^3(\pi - 1)$; $M_b = \tfrac{3}{4}\gamma r^3$.

$M_x = 0$ terdapat di D dengan $\alpha_1 = 50^\circ 4'$ dan di E dengan $\alpha_2 = 140^\circ 20'$;

M_{max} terdapat di F dengan $\alpha_3 = 105^\circ 15'$.

Sekarang mempelajari akibat dari berat – sendirinya dinding g.

$M_x^\circ = -\int gds.(\sin\alpha - \sin\varphi) = -gr^2(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha - 1)$ [kg/m]

$(\delta_h^\circ)' = \int M_x^\circ \, yds = -2gr^4 \int_\circ^\pi (\alpha\sin\alpha + \cos\alpha - 1)\cos\alpha \, d\alpha$

$= -2\,gr^4 \, [-\tfrac{1}{4}\alpha\cos 2\alpha + 1/8\sin 2\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{4}\sin 2\alpha - \sin\alpha]_\circ^\pi = -\tfrac{1}{2}g\pi r^4$

$H = -\tfrac{1}{2}gr.$

$(\varphi_m^\circ)' = -\int M_x^\circ \, ds = 2\,gr^4 \int_\circ^\pi (\alpha\sin\alpha + \cos\alpha - 1)\, d\alpha$

$= 2\,gr^4 \, [-\alpha\cos\alpha + \sin\alpha + \sin\alpha - \alpha]_\circ^\pi = 0, M = 0$

$M_x = M_m^\circ - H_y = -gr^2(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha - 1 - \tfrac{1}{2}\cos\alpha)\, gr^2(-\tfrac{1}{2}\cos\alpha - \alpha\sin\alpha) = 2\,gr^2(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\cos\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha\sin\alpha).$

Suku di belakang $2gr^2$ serupa dengan suku di belakang γr^3 untuk M_x akibat tekanan air, jadi kedua-dua M_x ini berbentuk serupa. Kita juga dapat menjalankan hitungan tanpa ungkit, analog dengan soal di dalam § 72 (di sini V = 0).

(Soal-soal ujian T.H. Bandung).

§ 73a. Robahan suku pada cairan di dalam pipa.

Jika cairan di dalam pipa naik suhunya, ini menjalar ke dinding pipa, sehingga dinding-dalam lebih panas dari pada dinding-luarnya. Sebutlah selisih antara suku dinding-dalam dan dinding luar itu t (C°) yang diberi bila positif apabila dinding-dalam lebih panas. Tebal dinding = h (tetap)dan γ = faktor - perkembangannya bahan – pipa.

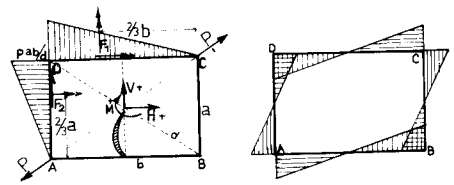
$d\varphi_m^\circ = t\gamma \, ds/h$; $\delta_h^\circ = \delta_v^\circ = 0$; (bab VI D, § 44).

$H = V = 0$; $\varphi_m^\circ = \int d\varphi_m^\circ = t\gamma \int_\circ^{2\pi} rd\alpha/h = 2\pi t\gamma \, r/h.$

$\varphi_{mm} = 2\pi r/EI$; $M = EI\, t\gamma/h$

§ 74. Sengkang persegi ABCD (gb. VI.82a)

AB = b; BC = a; BD = d. Pembedaan terdiri dari gaya P ke arah luar masing-masing menurut garis AC.



Gambar VI, 82a

$\delta'_{hh} = \delta_{hh} EI =$

$2\,(1/12\,a^3 + 1/4\,a^2b) = 1/6\,a^2\,(a + 3b).$

$\delta'_{vv} = \delta_{vv} EI = 2(1/12\,b^3 + \tfrac{1}{4}\,b^2a) = 1/6\,b^2\,(a+3b).$

$\varphi'_{mm} = 2(a + b).$

Membelah batang AB di tengah-tengahnya disertai ungkit seperlunya.

$M_d^\circ = Pab/d.$

$F_1^\circ = P.\tfrac{1}{2}\,ab^2/d$; $y_1^\circ = \tfrac{1}{2}\,a$; $x_1^\circ = 1/6\,b.$

$F_2^\circ = P.\,\tfrac{1}{2}\,a^2b/d$; $y_2^\circ = 1/6\,a$; $x_2^\circ = \tfrac{1}{2}b.$

$(\delta_h^\circ)' = F_1^\circ.y_1^\circ + F_2^\circ.y_2^\circ = P.1/12\,a^2b\,(a + 3b)/d$; $H = \tfrac{1}{2}\,Pb/d.$

$(\delta_v^\circ)' = F_1^\circ.x_1^\circ + F_2^\circ.x_2^\circ = P.1/12\,ab^2\,(3a + b)\,/d$; $V = \tfrac{1}{2}\,Pa/d.$

$(\varphi_m^\circ)' = -P.\,\tfrac{1}{2}\,ab(a + b)d$; $M = -\tfrac{1}{4}\,P\,ab/d.$

$M_a = 0 + H.\ ½\ a - V,\ ½b + M = ¼\ Pab/d - ¼\ Pab/d - ¼\ Pab/d =$

$= - ¼\ Pab/d$

$M_b = 0 + H.½\ a + V.\ ½\ b + M = ¼\ Pab/d.$

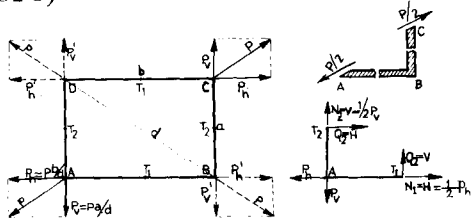
$M_c = 0 - H.½a + V.\ ½\ b + M = - ¼\ Pab/d$

$M_d = Pab/d - H.\ ½\ a - V.\ ½b + M = + ¼\ Pab/d.$

Bidang-bidang momennya berbentuk simetris terhadap diagonal-diagonalnya, dan M = 0 pada tengah-tengah sisi-sisinya.

Cara dengan alasan simetris (Gb. VI 82 b)

Gaya-gaya P diuraikan ke dalam komponenta-komponenta vertikal $P_v = Pa/d$ dan $P_h = Pb/d$. Kita pelajari titik-titik tengahnya sisi, yaitu T_1 dan T_2.



Gambar VI, 82b

Di T_1 terdapat: gaya normal tarik = $N_1 = H = \alpha_h P$. dan momen $M_1 = \alpha_{m1} P$.

Di T_2, gaya normal tarik $N_2 = V = \alpha_v P$ dan momen $M_2 = \alpha_{m2} P$.

Sekarang gaya-gaya P diganti dengan gaya-gaya P' = P yang **sesipat** di titik-titik B dan D (jadi juga ke arah luar menurut garis diagonal BD). Ini diuraikan ke dalam komponenta-komponenta $P'_v = P_v = Pa/d$ dan $P'_h = P_h = \alpha_h P$ seperti pada gaya-gaya P tadi.

Berdasarkan alasan-alasan simetri akan terdapat juga:

Di T_1 : $N'_1 = H = \alpha_h P' = \alpha_h P$; $M'_1 = \alpha_{m1} P' = \alpha_{m1} P$.

Di T_2 : $N'_2 = V = \alpha_v P' = \alpha_v P$; $M'_2 = \alpha_{m2} P' = \alpha_{m2} P$.

Kemudian kedua-kedua pasangan gaya P dan P' di kerjakan bersama-sama, yang menghasilkan:

$N''_1 = 2H = 2\alpha_h P = P_h = Pb/d$; jadi $\alpha_h = b/2d$.

$N''_2 = 2V = 2\alpha_v P = P_v = Pa/d$; jadi $\alpha_v = a/2d$

$M''_1 = M''_2 = 0$; $\alpha_{m1} = \alpha_{m2} = 0$.

Jadi akibat pembebanan P di A dan di C terdapat:

$H = ½\ Pb/d$; $V - ½\ Pa/d$; $M_1 - M_2 = 0$

Kita pelajari kwadrant $T_1 A\ T_2$. Di A bekerja gaya-gaya P_h ke kiri dan P_v ke bawah; di T_1 gaya $N_1 = H$ ke kanan dan di T_2 gaya $N_2 = V$ ke atas.

Supaya $K_x = 0$ maka di T_2 diperlukan gaya lintang $Q_2 = P_h - H = ½\ Pb/d$ (ke kanan dan supaya $K_y = 0$ di T_1 harus ada gayalintang $Q_1 = P_v - v = ½\ Pa/d$ (ke atas).

Kedua-dua gayalintang ini menimbulkan momen-momen pada batang-batang A1 dan A2 yang berjalan lurus, dengan $M_{max} = M_a = - Q_1 . ½b = - Q_2 . ½\ a = - ¼\ Pab/d$, dan seterusnya

Lebih singkat lagi, tinjauan demikian. Kita membelah bangunan menurut garis AC, sehingga penampang-penampang A dan C juga // AC (lihat gambar), yang masing-masing tidak berputar sudut dan menerima gaya ½ P (simetri), momen M yang belum diketahui dan gaya normal N⊥AC. Jika kita mempelajari bagian ABC, maka pada tampang-tampang A dan C bekerja gaya N yang searah, sehingga tidak dapat mengimbangi satu sama lain, ini berarti bahwa N = 0.

Dengan demikian hanya gaya-gaya ½ P di A dan C saja yang menimbulkan momen-momen sepanjang batang ABC. Pada titik X, sejauh x = dari A terdapat $M_x = ½\ P_v.x + M = M^\circ_x + M$ dan titik Y sejauh y dari C terdapat $M_y = ½\ P_h.y + M = M^\circ_y + M$. Di B sendiri menjadi $M_b = ½\ P_v.b + M = ½\ P_h.a + M = ½\ Pab/d + M = M^\circ_b + M$

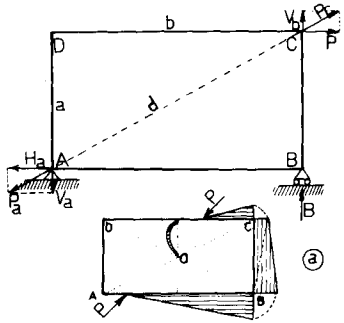
Oleh karena penampang-penampang A dan C masing-masing tidak berputar sudut, maka d = 0 atau luas bidang momen sepanjang ABC = 0

$½\ M^\circ_b\ (a + b) + M\ (a+b) = 0$; $M = - ½\ M^\circ_b = - ¼\ Pab/d = M_a = M_c$ dst.

Kejadian khusus, ABCE berbentuk **bujur sangkar**. Diagonal-diagonal juga bersifat sebagai sumbu-sumbu inersia utama, sehingga cukup mempelajari satu kwadrant saja seperti pada bentuk lingkaran di dalam § 70.

§ 75. Sengkang ABCE di atas dua. perletakan bebas (gb. VI. 83)

Perletakan di A adalah sendi dan B_1 rol. Beban terdiri dari gaya P mendatar ke kanan melalui titik C.



Gambar VI, 83

Reaksi-reaksi perletakan terdapat : $V_a = -Pa/b$; $H_a = P_1$. $B = Pa/b$.

Gaya-gaya B dan P disusun menjadi $P_c = B^2 + P^2 = Pd/b$. yang bekerja menu - rut garis AC. Begitu juga kita kerjakan pada gaya-gaya V_a dan H_a yang menghasilkan $P_a = Pd/b$ menurut garis CA. Dengan demikian soal menjadi serupa dengan di atas, bedanya hanya ada faktor d/b saja.

Jadi $M_a = M_c = -\frac{1}{4} Pa$; $M_b = M_d + \frac{1}{4} Pa$.

Cara dengan ungkit berguna pada pembebanan sembarangan, seperti terlihat pada gambar a.

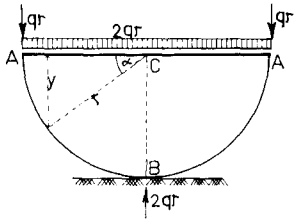
Kita mengadakan pembelahan di tengah-tengah CD umpamanya, kemudian menghitung M_b° dan M_c° dan menggambar bidang-bidang momennya (statis tĕr tentu)

Menurut contoh, M_x° itu negatif, jadi di dalam hitungan δ_h°, luas-luas bidang – momen dianggap sebagai gaya mendatar **ke kiri** dan untuk δ_v° sebagai gaya vertikal **ke bawah**.

"Momen" dari gaya-gaya ini terhadap titik 0 di beri nilai positif jika berputar ke kanan, negatif sebaliknya. Selanjutnya $EI\,\varphi_m^\circ = \Sigma$ luas bidang-bidangmo-men itu yang diberi nilai **positif** (berlawanan dengan tandanya M_x°).

§ 76. Belahan lingkaran dengan tali-busurnya (gb. VI, 84 a)

Benda ini diletakkan pada bidang mendatar di bagian busurnya (di-titik B).



Gambar VI, 84a

Tali-busurnya (batang AA) di bebani penuh merata sebesar q

Kita membelah batang AA di tengah-tengah nya, yaitu titik C yang juga titik - tengahnya lingkaran. Oleh karena keadaan simetris, gaya kelebihan $V = Q_c = 0$ jadi hanya H dan M yang belum diketahui.

Kita tidak menggunakan" titik - berat lenturan serta ungkitnya, Jadi $H = N_c$ dan $M = M_c$ bekerja di C.

Kita anggap N_c menarik dan M_c positif, dan mempelajari **separoh** bangunan saja.

$$\delta'_{hh} = \delta_{hh}\,EI = \int y^2 ds = r^3 \int_\circ^\pi \sin^2\alpha\, d\alpha = \tfrac{1}{4}\,\pi\, r^3.$$

$$\varphi'_{mm} = \varphi_{mm}\,EI = \int ds = r \int_\circ^\pi d\alpha = \tfrac{1}{2}\,\pi r.$$

$$\delta''_{hm} = \varphi''_{mh} = -\int y\,ds = -\,r^2 \int_\circ^\pi \sin\alpha\, d\alpha = -\,r^2.$$

Batang CA : $M_x^\circ = -\frac{1}{2} qx^2$; $M_a^\circ = -\frac{1}{2} qr^2$; $y = 0$

Batang AB : $M_\alpha^\circ = M_a^\circ + qr^2\,(1-\cos\alpha) = qr^2\,(\frac{1}{2} - \cos\alpha)$; $y = r\sin\alpha$.

$$(\delta_h^\circ)' = \int M_\alpha^\circ\, y\, ds = qr^4 \int_\circ^\pi (\tfrac{1}{2}\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)\, d\alpha = 0$$

$$(\varphi_m^\circ)' = -\int M_x^\circ\, dx - \int M_\alpha^\circ\, ds = \tfrac{1}{2}\, q \int_0^r x^2 dx - qr^3 \int_0^{\pi/2} (\tfrac{1}{2} - \cos\alpha)$$

$d\alpha = 1/6\ qr^2 - qr^3\,)(\frac{1}{4}\pi - 1) = qr^3\,(\ 7/6 - \pi/4)$.

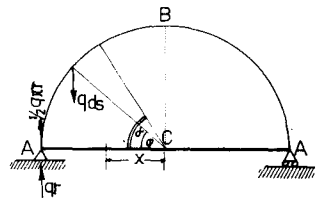
$\frac{1}{4}\,\pi\, Hr - M = 0$

$-\,Hr + M\,\pi/2 = qr^2\,(7/6 - \pi/4)$

$$M = q\,r^2\,\frac{(7/6 - \pi/4)}{4(\pi^2/8 - 1)}\ ;\quad H = 4\,M/\,r = qr\,\frac{(7/6 - \pi/4)}{\pi^2/8 - 1}$$

§ 76a. Bangunan seperti di atas terbalik (gb. VI 84 b)

Kita menghitung akibat berat sendirinya, g. Membelah batang AA di tengah-tengahnya (titik C)



Gambar VI, 84 b

Gaya-gaya kelebihan : $H = H_c$ (dianggap tarik).

$V = Q_c = o$; $M = M_c$ (dianggap positif).

tetap berlaku: $\delta_{hh} = \frac{1}{4}\,\pi r^3$; $\varphi_{mm} = \frac{1}{2}\,\pi r$; $\delta''_{hm} = \varphi''_{mh} = -\,r^2$

(separoh bangunan). Batang CA = $M_x^\circ = \frac{1}{2}\,gx^2$; $M_a^\circ = \frac{1}{2}\,gr^2$; $y = 0$

Batang AB : $M_\alpha^\circ = M_a^\circ + \frac{1}{2}\,q\pi r^2\,(1-\cos\alpha) - \int_\circ^\alpha gds.r\,(\cos\varphi - \cos\alpha) =$

$= \frac{1}{2}\,gr^2\,(1 + \pi - \pi\cos\alpha) - gr^2\,(\sin\alpha - \alpha\sin\alpha\,)$

$= gr^2\,(\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\pi\cos\alpha - \sin\alpha + \alpha\cos\alpha\ )$.

$$(\delta_h^\circ)' = \int M_\alpha^\circ\, yds = gr^4 \int_0^\pi (\ \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\pi\cos\alpha - \sin\alpha + \alpha\cos\alpha)$$

$\sin\alpha d\alpha = gr^4 [-\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\pi\cos\alpha - \frac{1}{4}\pi\sin^2\alpha - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha$

$- 1/8\ (2\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)]_o^{\pi} = gr^4\ (\frac{1}{2} + 1/8\ \pi)$.

$(\varphi_m^o)' = -\int M_x^o\,dx - \int M_\alpha^o\,ds = -\frac{1}{2}g\int_o^r x^2dx - gr^3\int_o^{\pi}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\pi -$

$\frac{1}{2}\pi\cos\alpha - \sin\alpha + \alpha\cos\alpha)\ d\alpha = -1/6\ gr^3\ (\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi - 1 + \frac{1}{2} - 1)$

$= -gr^3\ (\frac{1}{4}\ ^2 + \frac{1}{4} - 11/6)$.

$\frac{1}{4}\pi\ r\ H - M = gr^2\ (\frac{1}{2} + 1/8\ \pi)$

$-rH + \frac{1}{2}\pi M = -gr^2\ (\frac{1}{4}\pi^2 + \frac{1}{4}\pi - 11/6)$.

Pada kejadian tidak simetris, maka $V = Q_o \neq 0$, tetapi

$\delta'_{vh} = \delta'_{hv} = -\int xyds = 0$ dan $\delta''_{vm} = \varphi''_{vm} = \int xds = 0$

Jadi tidak perlu memindah titik-titik pegangannya H, V dan M ke titik-berat lenturannya, o, sebab letaknya ini tidak terdapat dengan bilangan yang mudah, dan bentuk besaran $\delta'_{hh} = \int y^2\,ds$ bukan bilangan yang sederhana.

Hanya saja, kita harus meninjau bangunan keseluruhannya jadi:

$\delta'_{hh} = \frac{1}{2}\pi r^3$; $\delta'_{vv} = \frac{1}{2}\pi r^3$; $\varphi'_{mm} = \frac{1}{2}\pi r$; $\delta''_{hm} = \varphi''_{hm} = -2r^2$.

G. BANGUNAN-BANGUNAN LAINNYA

§ 77. Balkon lingkaran.

Bangunan ini menahan muatan yang arah-kerjanya siku ($\perp$) terhadap bidang-bangunan. Berhubung dengan ini, tampang-tampangnya menahan momen-lengkung (momen biasa) dan momen-torsi.

Seperti telah diketahui, momen-lengkung M_x menimbulkan putaran-sudut $d\varphi = M_x\frac{ds}{EI}$ dan momen-torsi T_x menyebabkan torsi:

$d\psi = T_x\cdot\frac{ds}{GI_p'}$, di mana $G = \frac{m}{2(m+1)}E$ (modulus-geser) dan I_p itu besaran yang berdimensi momen-inersia serta tergantung kepada bentuk tampangnya. Pada balok-persegi dengan ukuran bd, maka momen-inersianya biasa $= \frac{1}{12}bd^3$.

Jika $\frac{b}{d} = \lambda \quad 1$ maka I_p' terdapat:

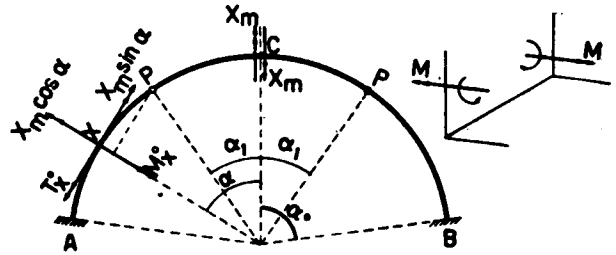
menurut Bach: $I_p' = \frac{\lambda^3}{(3{,}645 - 0{,}061\lambda)(1+\lambda^2)}\cdot d^4$

Weber: $I_p' = \frac{\omega}{\lambda}(\lambda d)^4$ dengan $\omega = \frac{1}{3}\lambda\left(\frac{1}{\lambda} - 0{,}630 + 0{,}052\,\lambda^4\right)$

atau $I_p' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\lambda} - 0{,}630 + 0{,}052\,\lambda^4\right)(\lambda d)^4$

Selanjutnya di dalam hitungan-hitungan yang berikut, diambil $\frac{EI}{GI_p'} = k$

a. Dua muatan sama dan simetris, P. Oleh karena keadaan simetris,



Gambar VI, 85

di tampang tengah-tengah, C, hanya terdapat gaya momen-lengkung (momen-torsi tak tertimbul di situ). Berhubung dengan ini, yang kita ambil sebagai gaya statis tak tertentu ialah momen-lengkung di tampang C, yaitu X_m. Keadaan menjadi statis tak tertentu tunggal. Susunan dasar statis tertentu adalah bangunan di belah di C, atau dua bagian balkon AC dan BC yang masing-masing terjepit sebelah. X_m dan P akan menimbulkan momen-lengkung dan momen-torsi pada sesuatu tampang.

Untuk memudahkan, momen-momen kita lukiskan dengan vektor bidangnya yang ujung-panahnya menunjukkan arah darimana kerjanya momen terlihat mengikuti putaran jarum-jam (ke kanan; lihat gambar VI, 85 atas-kanan).

Untuk menghitung momen-lengkung dan momen-torsi yang ditimbulkan oleh X_m pada sesuatu tampang X, kita menguraikan vektor X_m di dalam komponen-komponen menurut garis-singgung dan garis-normal (radius).

$\sin\alpha d\alpha = gr^4 [-\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\pi\cos\alpha - \frac{1}{4}\pi\sin^2\alpha - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha$

$- 1/8 (2\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)]_o^{\pi} = gr^4 (\frac{1}{2} + 1/8\pi)$.

$(\varphi_m^o)' = -\int M_x^o dx - \int M_\alpha^o ds = -\frac{1}{2} g \int_o^r x^2 dx - gr^3 \int_o^{\pi} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\pi -$

$\frac{1}{2}\pi\cos\alpha - \sin\alpha + \alpha\cos\alpha)\ d\alpha = -1/6\ gr^3\ (\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi - 1 + \frac{1}{2} - 1)$

$= -gr^3 (\frac{1}{4}\ ^2 + \frac{1}{4} - 11/6)$.

$\frac{1}{4}\pi r H - M = gr^2 (\frac{1}{2} + 1/8\pi)$

$- rH + \frac{1}{2}\pi M = -gr^2 (\frac{1}{4}\pi^2 + \frac{1}{4}\pi - 11/6)$.

Pada kejadian tidak simetris, maka $V = Q_o \neq 0$, tetapi

$\delta'_{vh} = \delta'_{hv} = -\int xyds = 0$ dan $\delta''_{vm} = \varphi''_{vm} = \int xds = 0$

Jadi tidak perlu memindah titik-titik pegangannya H, V dan M ke titik-berat lenturannya, o, sebab letaknya ini tidak terdapat dengan bilangan yang mudah, dan bentuk besaran $\delta'_{hh} = \int y^2 ds$ bukan bilangan yang sederhana.

Hanya saja, kita harus meninjau bangunan keseluruhannya jadi:

$\delta'_{hh} = \frac{1}{2}\pi r^3$; $\delta'_{vv} = \frac{1}{2}\pi r^3$; $\varphi'_{mm} = \frac{1}{2}\pi r$; $\delta''_{hm} = \varphi''_{hm} = -2 r^2$.

G. BANGUNAN-BANGUNAN LAINNYA

§ 77. Balkon lingkaran.

Bangunan ini menahan muatan yang arah-kerjanya siku ($\perp$) terhadap bidang-bangunan. Berhubung dengan ini, tampang-tampangnya menahan momen-lengkung (momen biasa) dan momen-torsi.

Seperti telah diketahui, momen-lengkung M_x menimbulkan putaran-sudut $d\varphi = M_x \frac{ds}{EI}$ dan momen-torsi T_x menyebabkan torsi:

$d\psi = T_x \frac{ds}{GI'_p}$, di mana $G = \frac{m}{2(m+1)} E$ (modulus-geser) dan I_p itu besaran yang berdimensi momen-inersia serta tergantung kepada bentuk tampangnya. Pada balok-persegi dengan ukuran bd, maka momen-inersianya biasa $= \frac{1}{12} bd^3$.

Jika $\frac{b}{d} = \lambda \quad 1$ maka I'_p terdapat:

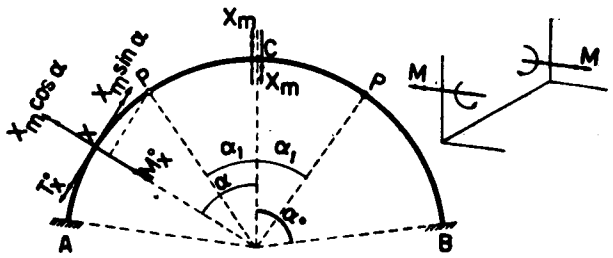
menurut Bach: $I'_p = \frac{\lambda^3}{(3{,}645 - 0{,}061\lambda)(1 + \lambda^2)} \cdot d^4$

Weber: $I'_p = \frac{\omega}{\lambda} (\lambda d)^4$ dengan $\omega = \frac{1}{3}\lambda \left(\frac{1}{\lambda} - 0{,}630 + 0{,}052\,\lambda^4\right)$

atau $I'_p = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\lambda} - 0{,}630 + 0{,}052\,\lambda^4\right)(\lambda d)^4$

Selanjutnya di dalam hitungan-hitungan yang berikut, diambil $\frac{EI}{GI'_p} = k$

a. Dua muatan sama dan simetris, P. Oleh karena keadaan simetris,



Gambar VI, 85

di tampang tengah-tengah, C, hanya terdapat gaya momen-lengkung (momen-torsi tak tertimbul di situ). Berhubung dengan ini, yang kita ambil sebagai gaya statis tak tertentu ialah momen-lengkung di tampang C, yaitu X_m. Keadaan menjadi statis tak tertentu tunggal. Susunan dasar statis tertentu adalah bangunan di belah di C, atau dua bagian balkon AC dan BC yang masing-masing terjepit sebelah. X_m dan P akan menimbulkan momen-lengkung dan momen-torsi pada sesuatu tampang.

Untuk memudahkan, momen-momen kita lukiskan dengan vektor bidangnya yang ujung-panahnya menunjukkan arah darimana kerjanya momen terlihat mengikuti putaran jarum-jam (ke kanan; lihat gambar VI, 85 atas-kanan).

Untuk menghitung momen-lengkung dan momen-torsi yang ditimbulkan oleh X_m pada sesuatu tampang X, kita menguraikan vektor X_m di dalam komponen-komponen menurut garis-singgung dan garis-normal (radius).

Komponen menurut garis-singgung, $X_m \sin\alpha$ melukiskan momen-torsi dan yang menurut radius, sebesar $X_m \cos\alpha$ berarti momen-lengkung. $X_m \cos\alpha$ menimbulkan putaran sudut pada tampang-X sebesar $X_m \cos\alpha \frac{ds}{EI}$ dan pada tampang-C sebesar $X_m \cos\alpha \frac{ds}{EI}\cos\alpha = X_m \cos^2\alpha \frac{ds}{EI}$.

Begitu pula $X_m \sin\alpha$ menimbulkan putaran sudut torsi pada tampang X sebesar $X_m \sin\alpha \cdot \frac{ds}{GI}$ yang mempunyai komponen // bidang kerja X_m sebesar $X_m \sin\alpha \frac{ds}{GI_P'} \cdot \sin\alpha = X_m \sin^2\alpha \frac{ds}{GI_P'}$.

Jadi **sebagai akibat dari X_m, tampang C berputar-sudut (melengkung)** sebanyak

$$X_m \cdot \varphi_{mm} = X_m \left(\int_{-a_o}^{+a_o} \cos^2\alpha \frac{ds}{EI} + \int_{-a_o}^{+a_o} \sin^2\alpha \frac{ds}{GI_P'} \right) =$$

$$= X_m \cdot 2r \left(\int_o^{a_o} \cos^2\alpha \frac{d\alpha}{EI} + \int_o^{a_o} \sin^2\alpha \frac{\alpha d}{GI_P'} \right).$$

$$\varphi_{mm} = 2\frac{r}{EI}\left(\int_o^{a_o} \cos^2\alpha d\alpha + k\int_o^{a_o} \sin^2\alpha d\alpha \right) =$$

$$= 2\frac{r}{EI}\{\tfrac{1}{4}\sin 2\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha_o + k(-\tfrac{1}{4}\sin 2\alpha_o + \tfrac{1}{2}\alpha_o)\}$$

$$\varphi_{mm} = \varphi_{mm} \cdot \frac{EI}{2r} = \tfrac{1}{4}(1-k)\sin 2\alpha_o + \tfrac{1}{2}(1+k)\alpha_o$$

Di sini dianggap bahwa ukuran balkon tetap sama, jadi EI dan GI_p' tetap juga.

Muatan P menimbulkan pada sesuatu tampang X dengan $\alpha > \alpha_1$:
momen-lengkung $M_x^o = -Pr \sin(\alpha_1 - \alpha)$
momen-torsi $T_x^o = -Pr\{1 - \cos(\alpha - \alpha_1)\}$, jika arah kerja $X_m \sin\alpha$ dianggap positif.

Putaran-putaran sudut yang ditimbulkan oleh M_x^o dan T_x^o itu mempunyai komponen-komponen yang sejajar dengan bidang-kerja X_m dan yang kita anggap positif jika arahnya berlawanan dengan arah putaran sudut yang disebabkan oleh X_m.

Komponen putaran sudut termaksud di atas yang disebabkan oleh

M_x^o ada $-M_x^o \frac{ds}{EI} \cdot \cos\alpha = P\frac{r^2}{EI}\sin(\alpha - \alpha_1)\cos\, d\alpha$ dan oleh T_x^o ada

$$-T_x^o \frac{ds}{GI_P'} \cdot \sin\alpha = P\frac{r^2}{GI_P'}\{1 - \cos(\alpha - \alpha_1)\}\sin\alpha d\alpha$$

Jadi

$$P\varphi_{mp} = P\frac{r^2}{EI} \cdot 2\left(\int_{a_1}^{a_o} \sin(\alpha - \alpha_1)\cos\alpha d\alpha + k\int_{a_1}^{a_o} \{\sin\alpha - \sin\alpha\cos(\alpha - \alpha_1)\}d\alpha \right)$$

$$\varphi_{mp} = \varphi_{mp} \cdot \frac{EI}{2r} = r\int_{a_1}^{a_x} \sin(\alpha - \alpha_1)\cos\alpha d\alpha + k\int_{a_1}^{a_x} \{\sin\alpha - \sin\alpha\cos(\alpha - \alpha_1)\}d\alpha$$

$$\int \sin(\alpha - \alpha_1)\cos\alpha d\alpha = \int(\sin\alpha\cos\alpha_1 - \cos\alpha\sin\alpha_1)\cos\alpha d\alpha =$$
$$= \cos\alpha_1 \int \sin\alpha\cos\alpha d\alpha - \sin\alpha_1 \int \cos^2\alpha d\alpha =$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos\alpha_1 \sin^2\alpha - \sin\alpha_1(\tfrac{1}{4}\sin 2\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$\int \sin\alpha\cos(\alpha - \alpha_1)d\alpha = \int \sin\alpha(\cos\alpha\cos\alpha_1 + \sin\alpha\sin\alpha_1) =$$
$$= \cos\alpha_1 \int \sin\alpha\cos\alpha d\alpha + \sin\alpha_1 \int \sin^2\alpha d\alpha =$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos\alpha_1 \sin^2\alpha - \sin\alpha_1(\tfrac{1}{4}\sin 2\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$\varphi_{mp} = r[\tfrac{1}{2}\cos\alpha_1(\sin^2\alpha_o - \sin^2\alpha_1 - \sin\alpha_1\{\tfrac{1}{4}(\sin 2\alpha_o - \sin 2\alpha_1) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\alpha_o - \alpha_1)\}] + rk[-(\cos\alpha_o - \cos\alpha_1) - \tfrac{1}{2}\cos\alpha_1(\sin^2\alpha_o - \sin^2\alpha_1) +$$
$$+ \sin\alpha_1\{\tfrac{1}{4}(\sin 2\alpha_o - \sin 2\alpha_1) - \tfrac{1}{2}(\alpha_o - \alpha_1)\}] =$$
$$= r(\tfrac{1}{2}\{\sin\alpha_o \sin(\alpha_o - \alpha_1) - (\alpha_o - \alpha_1)\sin\alpha_1\} - k[\cos\alpha_o - \cos\alpha_1 +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\{\sin\alpha_o \sin(\alpha_o - \alpha_1) + (\alpha_o - \alpha_1)\sin\alpha_1\}]) =$$
$$\tfrac{1}{4}r\{(1-k)\sin\alpha_o \sin(\alpha_o - \alpha_1) - (1+k)(\alpha_o - \alpha_1)\sin\alpha_1 - 2k(\cos\alpha_o - \cos\alpha_1)\}$$

$$X_m = P\frac{\varphi_{mp}}{\varphi_{mm}} =$$

$$\frac{\tfrac{1}{2}\{(1-k)\sin\alpha_o \sin(\alpha_o - \alpha_1) - (1+k)(\alpha_o - \alpha_1)\sin\alpha_1 + 2k(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_o)\}Pr}{\tfrac{1}{4}(1-k)\sin 2\alpha_o + \tfrac{1}{2}(1+k)\alpha_o} =$$

$$\frac{\{(1-k)\sin\alpha_o \sin(\alpha_o - \alpha_1) - (1+k)(\alpha_o - \alpha_1)\sin\alpha_1 + 2k(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_o)\}}{(1-k)\sin 2\alpha_o + 2(1+k)\alpha_o} 2P \cdot r$$

Sesudah itu: $M_x = M_x^o + X_m \cos\alpha$; $T_x = T_x^o + X_m \sin\alpha$, dengan mengingat bahwa M_x^o dan T_x^o itu negatif.

Kejadian-kejadian khusus :

1. $\alpha_o = 90° = \frac{1}{2}\pi$; $X_m = \frac{\{(1-k)\cos\alpha_1 - (1+k)(\frac{1}{2}\pi - \alpha_1)\sin\alpha_1 + 2k\cos\alpha_1\}}{(1+k)\pi} \cdot 2Pr$

$$= \frac{\{\cos\alpha_1 - (\tfrac{1}{2}\pi - \alpha_1)\sin\alpha_1\}}{\pi} 2 \cdot Pr$$

2. $\alpha_1 = o$, jadi muatan-sebesar 2P di tengah-tengah

$$X_m = \frac{(1-k)\sin^2\alpha_o + 2k(1-\cos\alpha_o)}{(1-k)\sin 2\alpha_o + 2(1+k)\alpha_o} \cdot 2Pr$$

3. $\alpha_o = \frac{1}{2}\pi$ dan $\alpha_1 = o$; $X_m = \frac{\{(1-k)+2k\}}{(1+k)\pi} 2P.r = \frac{1}{\pi} . 2P . r$

Jadi untuk muatan P di tengah-tengah: $X_m = \frac{Pr}{\pi}$; Momen-momen di titik A: $\alpha_a = \alpha_o = \frac{1}{2}\pi$

$$M_a = M_a^o + X_m \cos\alpha_a = M_a^o = -\tfrac{1}{2}Pr$$

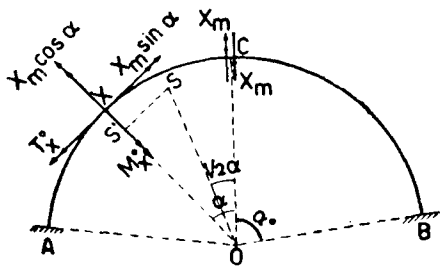
$$T_a = T_a^o + X_m \sin\alpha_a = -\tfrac{1}{2}Pr + \frac{1}{\pi}Pr = \frac{(2-\pi)}{2\pi}Pr = -\frac{(\pi-2)}{2\pi}Pr$$

b. Muatan terbagi rata simetris q. Di dalam pendapat di atas, besaran α_1 dianggap variabel dan diganti dengan α, sedang P diganti dengan $dP = qds = qrd\alpha$. Kemudian menjalankan integrasi, dari permulaan (α_1) hingga penghabisan (α_2) yaitu sepanjang bagian yang dimuati terbagi rata itu.

$$X_m = \frac{2qr^2}{(1+k)\sin 2\alpha_o + 2(1+k)\alpha_o}\int_{a_1}^{a_2}\{(1-k)\sin\alpha_o\sin(\alpha_o-\alpha) - (1+k)(\alpha_o-\alpha)\sin\alpha + 2k(\cos\alpha-\cos\alpha_o)\}d\alpha$$

Muatan penuh, jadi $\alpha_1 = o$ dan $\alpha_2 = \alpha_o$

$$X_m = \left\{\frac{-4k\alpha_o\cos\alpha_o + 4(1+k)(\sin\alpha_o - \frac{1}{2}\alpha_o) - (1-k)\sin 2\alpha_o}{(1-k)\sin 2\alpha_o + 2(1+k)\alpha_o}\right\} qr^2$$



Gambar VI, 85a

Ini juga boleh dihitung secara langsung (gambar VI, 85a).

Titik-berat bagian-busur CX adalah titik S yang letaknya ditentukan menurut:

$$OS = r\frac{\text{tali busur } CX}{\text{busur } CX} = 2r\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\alpha}$$

$$M_x^o = -q.r\alpha.OS\sin\tfrac{1}{2}\alpha = -2qr^2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$T_x^o = -q.r\alpha.S'X = -qr^2\alpha\left(1 - \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}{\alpha}\right) = -qr^2(\alpha - \sin\alpha)$$

$$\varphi_m^o = -2\left(\int_o^{a_o} M_x^o\cos\alpha\frac{ds}{EI} + \int_o^{a_o} T_x^o\sin\alpha\frac{ds}{GI_p}\right)$$

$$(\varphi_m^o)' = \varphi_m^o\frac{EI}{2r} = qr^2\{2\textstyle\int_o^{a_o}\sin^2\frac{1}{2}\alpha\cos\alpha d\alpha + k\int_o^{a_o}(\alpha-\sin\alpha)\sin\alpha d\alpha\} =$$

$$= qr^2\{2\textstyle\int_o^{a_o}\sin^2\frac{1}{2}\alpha\cos\alpha d\alpha + k(\int_o^{a_o}\sin\alpha d\alpha - \int_o^{a_o}\sin^2\alpha d\alpha)\}$$

$$2\int\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\cos\alpha d\alpha = \int(1-\cos\alpha)\cos\alpha d\alpha = \int\cos\alpha d\alpha - \int\cos^2\alpha d\alpha =$$

$$= \sin\alpha - \tfrac{1}{4}\sin 2\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\int\alpha\sin\alpha d\alpha = -\int\alpha d\cos\alpha = -(\alpha\cos\alpha - \int\cos\alpha d\alpha) = -\alpha\cos\alpha + \sin\alpha$$

$$(\varphi_m^o)' = qr^2(\sin\alpha_o - \tfrac{1}{4}\sin 2\alpha_o - \tfrac{1}{2}\alpha_o - k\alpha_o\cos\alpha_o + k\sin\alpha_o + \tfrac{1}{4}k\sin 2\alpha_o - \tfrac{1}{2}k\alpha_o) = qr^2\{(1+k)(\sin\alpha_o - \tfrac{1}{4}\alpha_o) - \tfrac{1}{2}(1-k)\sin 2\alpha_o - k\alpha_o\cos\alpha_o\}$$

$$\varphi_{mm} = \tfrac{1}{4}(1-k)\sin 2\alpha_o + \tfrac{1}{2}(1+k)\alpha_o$$

$$X_m = \frac{(\varphi_m^o)'}{\varphi_{mm}} = \left\{\frac{-k\alpha_o\cos\alpha_o + (1+k)(\sin\alpha_o - \frac{1}{2}\alpha_o) - \frac{1}{4}(1-k)\sin 2\alpha_o}{\frac{1}{4}(1-k)\sin 2\alpha_o + \frac{1}{2}(1+k)\alpha_o}\right\} qr^2 =$$

$$= \left\{\frac{-4k\alpha_o\cos\alpha_o + 4(1+k)(\sin\alpha_o - \frac{1}{2}\alpha_o) - (1-k)\sin 2\alpha_o}{(1-k)\sin 2\alpha_o + 2(1+k)\alpha_o}\right\} qr^2$$

Kejadian khusus: $\alpha_o = \frac{1}{2}\pi$; $\cos\alpha_o = o$; $\sin\alpha_o = 1$; $\sin 2\alpha_o = o$;

$$X_m = \frac{4(1+k)(1-\frac{1}{2}\pi)}{(1+k)\pi}qr^2 = \frac{(4-\pi)}{\pi}qr^2$$

$$M_a = M_a^o + X_m\cos\alpha_a;\ M_a^o = -qr^2$$

$$T_a = T_a^o + X_m\sin\alpha_a = -qr^2(\tfrac{1}{2}\pi - 1) + qr^2\frac{(4-\pi)}{\pi} = \frac{8-\pi^2}{2\pi}qr^2 =$$

$$= -\frac{(\pi^2-8)}{2\pi}qr^2$$

§ 77a. **Perjalanan-perjalanan lain.**

1. Dengan faktor-pengaruh-dalam.

$X_m = -1$ menimbulkan pada tampang X:

momen-lengkung sebesar $\alpha_m = -1.\cos\alpha$, jadi $\alpha_m = -\cos\alpha$;
momen-torsi sebesar $\alpha_t = -1.\sin\alpha$, jadi $\alpha_t = -\sin\alpha$;

$$X_m\left(\int\alpha_m^2\frac{ds}{EI} + \int\alpha_t^2\frac{ds}{GI_p}\right) = \int M_x^o\alpha_m\frac{ds}{EI} + \int T_x^o\alpha_t\frac{ds}{GI_p}$$

$$X_m\left(\int\cos^2\alpha\frac{ds}{EI} + \int\sin^2\alpha\frac{ds}{GI_p}\right) = -\left(\int M_x^o\cos\alpha\frac{ds}{EI} + \int T_x^o\sin\alpha\frac{ds}{GI_p}\right)$$

$$X_m\varphi_{mm} = P\varphi_{mp},\ \text{atau}\ \varphi_m^o$$

2. Dengan hukum Castigliano.

$$M_x = M_x^o + X_w \cos\alpha;\ T_x = T_x^o + X_m \sin\alpha$$

$$U = \int M_x^2 \frac{ds}{2EI} + \int T_x^2 \frac{ds}{2GI_p};\ \frac{dU}{dX_w} = o$$

$$\int M_x \frac{dM_x}{dX_m}\frac{ds}{EI} + \int T_x \frac{dT_x}{dX_m}\frac{ds}{GI_p} = o$$

$$\frac{dM_x}{dX_m} = \cos\alpha \text{ dan } \frac{dT_x}{dX_m} = \sin\alpha$$

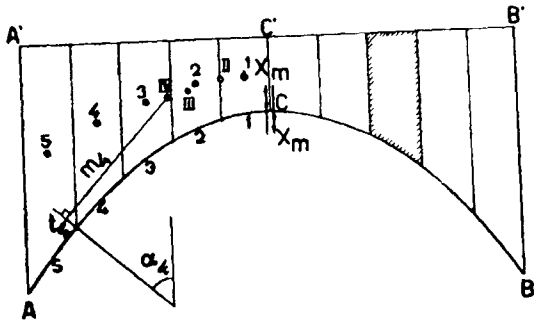
$$\int (M_x^o + X_m \cos\alpha)\cos\alpha \frac{ds}{EI} + \int (T_x^o + X_m \sin\alpha)\sin\alpha \frac{ds}{GI_p} = o$$

$$X_m \left(\int \cos^2\alpha \frac{ds}{EI} + \int \sin^2\alpha \frac{ds}{GI_p} \right) = -\left(\int M_x^o \cos\alpha \frac{ds}{EI} + \int T_x^o \sin\alpha \frac{ds}{GI_p} \right)$$

§ 78. Tekanan angin di atas busur.

Bangunan busur ter jepit atau dengan dua sendi itu. ke arah mendatar ⊥ bidangnya, boleh dianggap sebagai terjepit pada pangkal-pangkalnya.

Soal muatan ⊥ bidang busur, seperti tekanan angin, itu dapat dipecahkan sebagai soal balkon seperti di atas. Hanya saja, di sini soalnya lebih sulit, garis-pegangan muatan tidak lagi bersatu padu dengan sumbu-bangunan; pekerjaan integrasi amat sukar dijalankan.



Gambar VI, 86

Untuk ini, busur serta bidang-muatan dibagi-bagi dalam beberapa elemen.

$$\varphi_{mm} = \Sigma \cos^2\alpha \frac{\Delta s}{EI} + \Sigma \sin^2\alpha \frac{\Delta s}{GI_p}$$

$$\varphi_{mm} = EI_o \varphi_{mm} = \Sigma \cos^2\alpha \frac{I_o}{I}\Delta s + \Sigma \sin^2\alpha \frac{E}{G}\cdot\frac{I_o}{I_p}\cdot\Delta s$$

$$\varphi_m^o = -\left(\Sigma M_x^o \cos\alpha \frac{\Delta s}{EI} + \Sigma T_x^o \sin\alpha \frac{\Delta s}{GI_p} \right)$$

$$= \varphi_m^o \cdot EI_o = -\left(\Sigma M_x^o \cos\alpha \frac{I_o}{I}\Delta s + \Sigma T_x^o \sin\alpha \frac{E}{G}\cdot\frac{I_o}{I_p}\cdot\Delta s \right)$$

Pada gambar VI, 86 bidang AA'B'B adalah bidang muatan tekanan angin, yang dibagi-bagi di dalam 10 lajuran, jadi saban separo busur ada 5 bagian (keadaan simetris). Titik-titik berat lajuran-lajuran ini ditunjukkan dengan angka-angka 1, 2, ... 5 di dalam bidang-muatan tersebut. Kemudian menentukan letaknya titik-berat lajuran pertama dan kedua, yaitu titik II, titik-berat jumlah lajuran-lajuran pertama hingga dengan ketiga, titik III, dst.

$$\Sigma M_x^o \cos\alpha \frac{I_o}{I}\cdot\Delta s = M_1^o \cos\alpha_1 \cdot \frac{I_o}{I_1}\cdot\Delta s_1 + M_2^o \cos\alpha_2 \cdot \frac{I_o}{I_2}\cdot\Delta s_2 +$$

$$+ M_3^o \cos\alpha_3 \cdot \frac{I^o}{I_3}\cdot\Delta s_3 + M_4^o \cos\alpha_4 \cdot \frac{I_o}{I_4}\cdot\Delta s_4 + M_5^o \cos\alpha_5 \cdot \frac{I_o}{I_5}\cdot\Delta s_5$$

$$\Sigma T_x^o \sin\alpha \frac{E}{G}\cdot\frac{I_o}{I_p}\cdot\Delta s = T_1^o \sin\alpha_1 \frac{E}{G}\cdot\frac{I_o}{I_{p1}}\cdot\Delta s_1 + T_2^o \sin\alpha_2 \frac{E}{G}\cdot\frac{I_o}{I_{p2}}\cdot\Delta s_2 +$$

$$..... + T_5^o \sin\alpha_5 \frac{E}{G}\cdot\frac{I_o}{I_{p5}}\cdot\Delta s_5$$

Kita harus menentukan dulu: sin α_1, sin α_2, cos α_2 . . ; $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots \Delta s_5$;

$$\frac{I_o}{I_1}, \frac{I_o}{I_{p1}}, \ldots\ldots \frac{I_o}{I_5}, \frac{I_o}{I_{p5}};\ M_1^o, T_1^o, M_2^o, T_2^o \ldots\ldots M_5^o, T_5^o, \text{ dll.}$$

Untuk menghitung M_4^o dan T_4^o umpamanya, kita menarik garis-normal yang melalui tampang 4, dan kemudian menarik garis ⊥ terhadapnya dari titik IV. Dengan begitu mendapat panjang garis-garis m_4 dan t_4.

Jika R_4 = resultante muatan di atas lajuran-lajuran 1 s/d 4 kita mendapat: $M_4^o = -R_4 \cdot m_4$ dan $T_4^o = +R_4 \cdot t_4$.

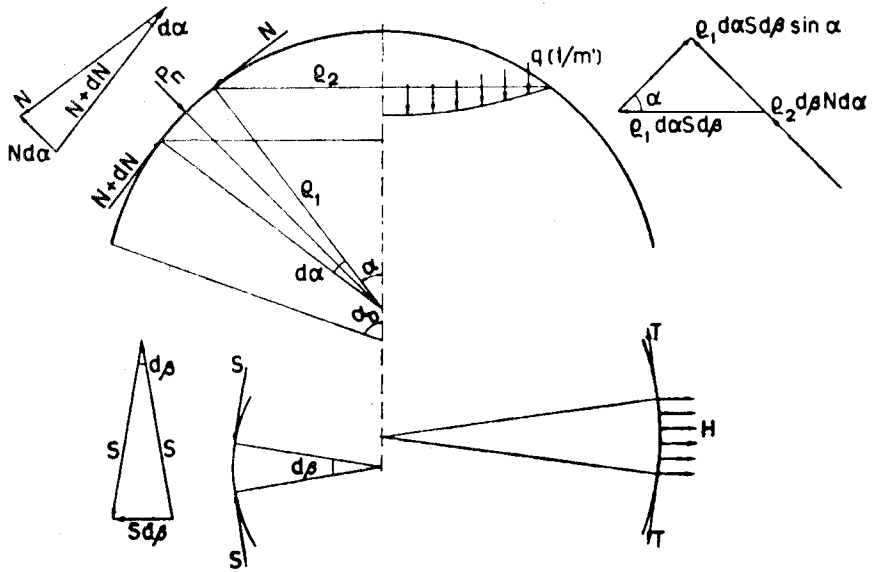
Tanda + untuk T_4^o berarti bahwa arah kerja T_4^o searah dengan X_m sin α_4.

Titik-titik II s/d V ditentukan secara melukis dengan perantaraan gambar-kutub dan poligon-batang pada kekuatan-kekuatan K_1, K_2 ..... K_5 yang bekerja pada bidang-bidang lanjuran 1, 2 . . . . 5 (bertanding lurus-dengan luas lajuran masing-masing).

Kekuatan-kekuatan K ini melalui titik-titik berat lajuran tersebut (titik-titik 1, 2, ... 5) dan digambar sebagai kekuatan-kekuatan vertikal dan mendatar.

§ 79. Kubah dengan bidang rotasi.

Ini berarti bahwa bidang dinding bangunan terjadi, jika suatu garis-bengkok yang terletak di dalam bidang vertikal, diputar (rotasi) mengelilingi sumbu vertikal di dalam bidangnya. Jadi potongan-potongan mendatar (bidang-bidang parallel) berbangun lingkaran. Muatan dianggap simetris. Dinding kubah dianggap tak menahan momen, jadi melulu tegangan-tegangan normal (membran – teori).



Gambar VI, 87

N = gaya-normal di dalam bidang meridian (diukur tiap m')

S = gaya-normal di dalam bidang parallel (diukur tiap m')

p_n = komponen muatan luar yang bekerja ⊥ bidang kubah (diukur tiap m^2).

Kita mengambil bagian-bidang kecil tak terhingga yang dibatasi oleh dua bidang meredian dan dua bidang parallel yang luasnya: $dF = \rho_1 d\alpha . \rho_2 . d\beta$, jika ρ_1=radius garis-meredian dan ρ_2 = radius lingkaran-paralel, di tempat itu.

Jumlah muatan-vertikal yang ada di atas bidang-paralel teratas adalah Q, yang boleh dianggap terbagi rata di sepanjang keliling lingkaran paralel ini, jadi menimbulkan $q = \frac{Q}{2\pi\rho_2}\ (t/m')$.

Menurut sarat seimbang maka N sin α = q, jadi:

$$N = \frac{q}{\sin\alpha} = \frac{Q}{2\pi\rho_2 \sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Gaya-gaya yang bekerja pada sisi-sisi unsur bidang tadi diuraikan di dalam komponen-komponen menurut garis normal pada bidang ini, jadi menurut arah kerja p_n.

Pula menurut sarat-seimbang, jumlah komponen-komponen harus nol. N dan N + dN menghasilkan komponen sebesar $Nd\alpha . \rho_2 d\beta$ (berdimensi kg).

Kedua-dua gaya S (kg/m') menghasilkan resultante mendatar Sdg dan komponennya menurut garis-normal tadi ada: $Sd\beta \sin\alpha\ \rho_1 d\alpha\ (k\beta)$.

Ordinat muatan luar p_n (kg/m^2) menghasilkan gaya $p_n . dF = p_n . \rho_1 d\alpha . \rho_2 d\beta$ (kg).

$$Nd\alpha . \rho_2 d\beta + S . d\beta . \rho_1 d\alpha . \sin\alpha = p_n . \rho_1 d\alpha . \rho_2 d\beta$$

$$\frac{N}{\rho_1} + \frac{S}{\rho_2}\sin\alpha = p_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Jika d = tebal dinding, tegangan-tegangan menjadi:

$$\sigma_n = \frac{N}{d}\ (kg/cm^2) \text{ dan } \sigma_s = \frac{S}{d}\ (kg/cm^2)$$

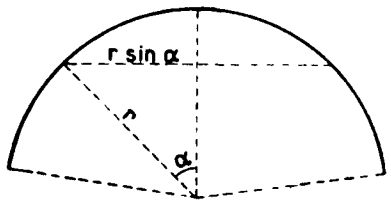
Positif untuk tegangan menekan dan negatif untuk tegangan menarik

Keadaan di pangkal:

Gaya-normal meredian adalah N_0 dan ini mempunyai komponen mendatar sebesar $H = N_o \cos\alpha_o$ yang menimbulkan gaya menarik $T = H\rho_o = N_o\rho_o \cos\alpha_o$ (kg), jika ρ_o = radius-paralel di pangkal. Ini harus ditahan oleh balok-gelang.

§ 80. Kubah bola

Pendapat-pendapat di atas menjadi lebih sederhana.



Gambar VI, 88

$\rho_1 = r$ = radius bola

$\rho_2 = r \sin\alpha$

Rumus-rumus menjadi

$$N = \frac{Q}{2\pi r \sin^2\alpha} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{N}{r} + \frac{S}{r} = p_n\ (2) \text{ atau}$$

$$N + S = rp_n\ (2a)$$

Akibat berat sendiri: gt/m^2. Jika tebal dinding tetap, g juga tetap.

$Q_g = g \times$ luas bidang segmen-bola di atas tampang-paralel.

$= g.2\pi r^2(1 - \cos\alpha)$

$$N_g = \frac{Q}{2\pi r \sin^2\alpha} = \frac{(1-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} gr = \frac{1}{(1+\cos\alpha)} g \,.\, r \,.\, (t/m')$$

$$p_{ng} = g\cos\alpha$$

$$S_g = rp_{ng} - N_g = \left(\cos\alpha - \frac{1}{1+\cos\alpha}\right) g\,.\,r = \frac{(\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1)}{1+\cos\alpha} g.r\,(t/m')$$

$S_g = o$ jika $\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = o$, jadi $\cos\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ atau

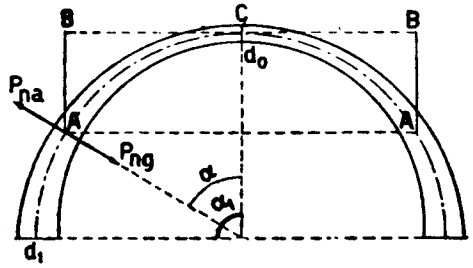
$$\alpha = 51°50'$$

Jadi jika $\alpha \geq 51°50'$, S bernilai negatif, yang berarti menarik. Akibat muatan terbagi rata p t/m^2 diukur tiap m^2 mendatar.

$Q_p = \pi(r\sin\alpha)^2 \,.\, p$; $p_{np} = p\cos\alpha$

$$N_p = \frac{Q}{2\pi r \sin\alpha^2} = \tfrac{1}{2}pr(t/m')$$

$$S_p = rp_n - N_p = rp\cos\alpha - -\tfrac{1}{2}pr = (-\tfrac{1}{2} + \cos\alpha)pr = (-\tfrac{1}{2} + \cos\alpha)pr$$



Gambar VI, 88a

Sebagai contoh, tandon-air berbangun belahan-bola.

Tebal dinding di puncak $= d_o$ dan di pangkal $= d_1$; $\alpha_1 = 90° = \frac{1}{2}\pi$.

$$d = d_o + (d_1 - d_o)\frac{\alpha}{\frac{1}{2}\pi}$$

Akibat-berat sendiri, jika γ = berat jenis bahan kubah. Tebal dinding rata-rata pada segmen-bola di atas tampang AA ada.

$$d_m = d_o + \tfrac{1}{2}(d_1 - d_o)\frac{\alpha}{\frac{1}{2}\pi}$$

Berat segmen-bola ini: $G = \gamma \,.\, d_m \,.\, 2\pi r^2(1 - \cos\alpha)$

$$q_g = \frac{G}{2\pi\, r\sin\alpha}\,;\; g = \gamma \,.\, d;\; p_{ng} = g\cos\alpha = \gamma d\cos\alpha$$

Menurut pendapat di atas:

$$N_q = \frac{g_m\, r}{1+\cos\alpha} = \frac{\gamma \,.\, d_m\, r}{1+\cos\alpha}\,;\; S_g = \frac{(\cos^2\alpha + \cos\alpha - d_m/d}{1+\cos\alpha}\gamma \,.\, d \,.\, r$$

Harus diingat bahwa $d = f(\alpha)$

Akibat tekanan-air: Q_a = $\div$ berat air ACABB (tebal dinding diabaikan)

$Q_a = -1.$ (isi silinder AABB – isi segmen ACA) $= -\pi r^3 \sin^2\alpha(1-\cos\alpha) -$

$$-\pi r^3(\tfrac{2}{3} - \cos\alpha + \tfrac{1}{3}\cos^3\alpha) =$$

$$= -\pi r^3\{\sin^2\alpha(1-\cos\alpha) - (\tfrac{2}{3} - \cos\alpha + \tfrac{1}{3}\cos^3\alpha)\}$$

$$p_{na} = -1\,.\,r(1-\cos\alpha)$$

$$N_a = \frac{Q_a}{2\pi r\sin^2\alpha} = -\tfrac{1}{2}r^2\left(1 - \cos\alpha - \frac{\frac{2}{3} - \cos\alpha + \frac{1}{3}\cos^3\alpha}{1-\cos^2\alpha}\right) =$$

$$= -\tfrac{1}{6}\,.\,r^2\left(1 - \frac{2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)(kg/m')$$

$$S_a = rp_{na} - N_a = -1/6\,r^2\left\{5 - 6\cos\alpha + \frac{2\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha}\right\}(kg/m')$$

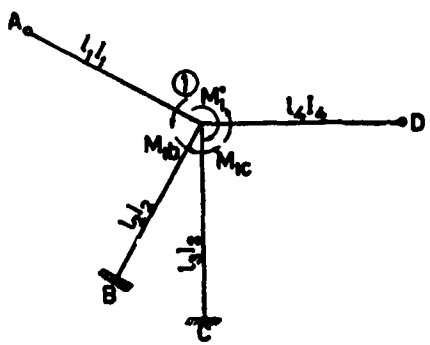
BAB VII

CARA CROSS

A. PENGANTAR

§ 1. Pembagian (distribusi) momen

Kita mempelajari beberapa batang masing-masing dengan EI tetap, yang dihubungkan satu sama lain pada satu ujungnya, sehingga terbentuk *titik-hubungan atau titik kumpul* yang teguh (di sini titik-1). Pada titik-hubungan ini bekerjalah momen M_1^o, yang berputar ke kanan terhadapnya. Ini mengakibatkan, bahwa ujung-ujung batang yang berjumpa di situ, terputar ke kanan yang *sama besarnya*, yaitu φ_1, Jadi: $\varphi_{1a} = \varphi_{1b} = \varphi_{1c} = \varphi_{1d} = \varphi_1$.



Gambar VII, 1

Putaran-putaran sudut ini menimbulkan momen-momen reaksi pada ujung-ujung batang yang arah kerjanya *berlawanan* (jadi ke kiri terhadap titik hubungan 1). Momen-momen ujung ini adalah:

M_{1a} di ujung 1 pada batang 1A

M_{1b} di ujung 1 pada batang 1B dst

Sarat imbang menentukan bahwa $\Sigma M_1 = M_1^o + M_{1a} + M_{1b} + M_{1c} + M_{1d} = 0$

Dengan mengingat bab IV, E - § 31 kita mendapat:

$\varphi_{1a} = M_{1a}\varphi_{11a} = M_{1a}\, l_1/3EI_1$ (A adalah sendi)

$\varphi_{1b} = M_{1b}\varphi_{11b} = M_{1b}\, l_2/4EI_2$ (B adalah jepitan)

$\varphi_{1c} = M_{1c}\varphi_{11c} = M_{1c}\, l_3/4EI_3$ (C adalah jepitan)

$\varphi_{1d} = M_{1d}\varphi_{11d} = M_{1d}\, l_4/3EI_4$ (D adalah sendi)

Perhatikan faktor-faktor $\frac{1}{3}$ dan $\frac{1}{4}$ di atas itu.

$M_{1a}\varphi_{11a} = M_{1b}\varphi_{11b} = M_{1c}\varphi_{11c} = M_{1d}\varphi_{11d}$

$M_{1a} : M_{1b} : M_{1c} : M_{1d} = 1/\varphi_{11a} : 1/\varphi_{11b} : 1/\varphi_{11c} : 1/\varphi_{11d}$.

Oleh karena $M_{1a} + M_{1b} + M_{1c} + M_{1d} = -M_1^o$ **maka**:

$$M_{1a} = -\frac{1/\varphi_{11a}}{\Sigma\, 1/\varphi_{11}} \cdot M_1^o = -\mu_{1a} M_1^o$$

$$M_{1b} = -\frac{1/\varphi_{11b}}{\Sigma\, 1/\varphi_{11}} \cdot M_1^o = -\mu_{1b} M_1^o \text{ dst.}$$

$$-(\mu_{1a} + \mu_{1b} + \mu_{1c} + \mu_{1d})\, M_1^o + M_1^o = 0$$

$$\Sigma\, \mu_1 . = \mu_{1a} + \mu_{1b} + \mu_{1c} + \mu_{1d} = 1$$

$$\mu_{1a} = \frac{1/\varphi_{11a}}{\Sigma\, 1/\varphi_{11}}, \quad \mu_{1b} = \frac{1/\varphi_{11b}}{\Sigma\, 1/\varphi_{11}} \text{ dst.}$$

Bilangan μ yang selalu < 1, dinamakan *faktor-distribusi* atau — *pengrataan*. Di dalam hitungan selanjutnya, arah kerjanya momen-ujung itu dilihat terhadap titik-hubungannya, kemudian diberi tanda aljabar + jika berputar ke kanan dan – jika ke kiri (jadi *tidak* didasarkan atas bagaimana melengkungnya balok sebagai akibatnya).

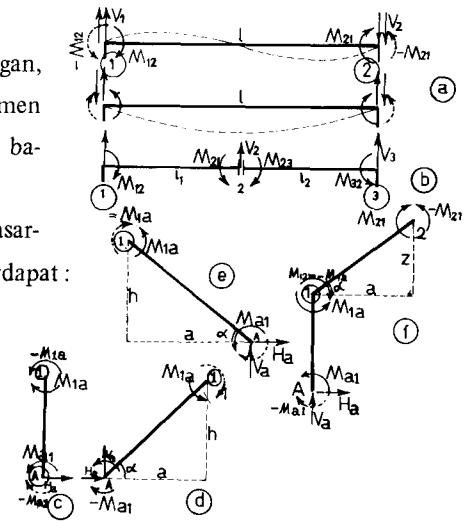
Arah momen-ujung *terhadap titik-hubungan* itu berlawanan dengan arah kerjanya *terhadap ujung balok sendiri* (lihat gambar, perhatikan deformasi-deformasinya).

Untuk mempelajari keseimbangan, kita menggunakan momen-momen yang bekerja pada ujung-ujung batang.

Menurut gambar VII, 2a, berdasarkan sarat bahwa $\Sigma M_2 = 0$ terdapat:

$V_1 l - M_{12} - M_{21} = 0$;

$V_1 = (M_{12} + M_{21})/l$.


Gambar VII, 2

$\Sigma M_1 = 0$ menghasilkan :

$-V_2 l - M_{12} - M_{21} = 0; V_2 = -(M_{12} + M_{21}) / l.$

Pada gambar b terdapat :

$V_1 = (M_{12} + M_{21}) / l_1$

$V_2 = -(M_{12} + M_{21})/l_1 + (M_{23} + M_{32}) / l_2$

$V_3 = -(M_{23} + M_{32})/l_3.$

Jadi terdapat tanda plus (+) untuk titik-perletakan kiri, dan minus (–) untuk perletakan kanan, dengan mengingat bahwa M, ini mungkin plus atau minus, yang berarti bahwa tanda-aljabarnya harus diperhitungkan. Sekarang reaksi-reaksi-perletakan mendatar pada batang vertikal, yang dianggap **positif** jika bekerja **ke kanan** (gb. c).

$\Sigma M_1 = 0; -H_a h - M_{a1} - M_{1a} = o; H_a = -(M_{a1} + M_{1a})/h.$

$\Sigma M_A = 0; H_1 = +(M_{a1} + M_{1a})/h.$

Pada tihang serong menurut **gambar d** terdapat :

$\Sigma M_1 = 0; -H_a h - M_{a1} - M_{1a} + V_a a = 0; H_a = -(M_{a1} + M_{1a})/h + V_a \operatorname{cotg} \alpha$

jika $a/h = \operatorname{cotg} \alpha$.

Menurut gambar c dengan $\Sigma M_1 = 0$ terdapat :

$-H_a h - M_{a1} - M_{ai} - V_a a = 0 ; H_a = -(M_{a1} + M_{1a}) - V_a \operatorname{cotg} \alpha.$

Kita juga memperoleh hasil $+ V_a \operatorname{cotg} \alpha$ jika yang diambil itu sudut di sebelah kanannya tihang (sudut tumpul), konsekwen dengan pada gambar d.

Pada kejadian menurut **gambar f** terdapat dengan $\Sigma M_2 = o$

$V_a a - H_a (h + z) - M_{a1} - M_{21} = 0$ sedang $-H_a h = M_{a1} + M_{1a}$

dan $M_{1a} = -M_{12}.$

$V_a a + M_{a1} + M_{1a} - H_a z - M_{a1} - M_{21} = 0$

$V_a = (M_{12} + M_{21})/ a + H_a \operatorname{tg} \alpha.$

Momen-jalar atau-induksi.

Kita melihat lagi gambar VII, 1 pada ujung-ujung batang 1B dan 1C yang terjepit pada ujung-ujung lawannya. Ini berarti, bahwa $\varphi_b = o$, dan $\varphi_c = 0$. Menurut persamaan putaran-sudut terdapat (bab IV, §31, gb 61 a),

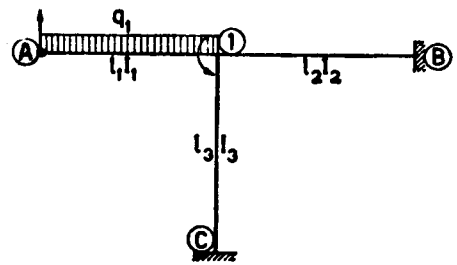
$M_{b1} = -\frac{1}{2} M_{1b}$ dan $M_{c1} = -\frac{1}{2} M_{1c}$; tanda minus oleh karena deformasi-deformasinya berlawanan terhadap satu sama lain. Tetapi jika ditulis menurut istilah Cross, arah putarannya momen terhadap titik-pemegangnya batang, sama tandanya. Jadi di dalam hitungan cara Cross, harus kita tulis $M_{b1} = +\frac{1}{2} M_{1b}$ dan $M_{c1} = + M_{1c}$ (lihat juga gambar 2 a). Kita mengatakan, bahwa pada ujung-jepit ada **momen-induksi** atau **momen jalar** dengan **faktor induksi** atau **faktor jalari**.

Pada batang dengan EI tetap ke seluruhannya, maka $i = +\frac{1}{2}$.

Jika EI - batang tidak tetap, faktor-induksi $i \neq \frac{1}{2}$ dan tergantung pada variasinya besaran EI itu; lihat § 35 di belakang.

§ 2. **Penggunaan.**

Pada bangunan seperti gambar ini, ditentukan:



$l_1 : l_2 : l_3 = 4 : 5 : 3$

$I_1 : I_2 : I_3 = 2 : 3 : 1$

A sendi, B dan C jepitan

Gambar VII, 3

$$1/\varphi_{11a} : 1/\varphi_{11b} : 1/\varphi_{11c} = \frac{3EI_1}{l_1} : \frac{4EI_2}{l_2} : \frac{4EI_3}{l_3} = 3 \cdot \tfrac{2}{4} : 4 \cdot \tfrac{3}{5} : 4 \cdot \tfrac{1}{3} = 45 : 72 : 40$$

$$\Sigma\, 1/\varphi_{11} = 45 + 72 + 40 = 157.$$

$$\mu_{1a} = \tfrac{45}{157} ; \mu_{1b} = \tfrac{72}{157} ; \mu_{1c} = \tfrac{40}{157} ; \Sigma \mu = 1.$$

a. Muatan penuh merata q_1(t/m') di atas A1.

Sementara titik hubungan 1 kita pegang teguh, hingga tidak dapat berputar, jadi seolah-olah ada jepitan sempurna di situ. Dengan begitu kita mendapatkan *momen-momen ujung pertama* atau *primar* (diberi petunjuk atau index "o"):

$M^o_{1a} = -\frac{1}{8}q_1 l_1^2$ (berputar ke kiri terhadap titik 1)

$$M^o_{1b} = M^o_{1c} = 0$$

Jadi pada titik-tunggal 1 terdapat $M^o_1 = M^o_{1a} = -\frac{1}{8}q_1 l_1^2$.

Setelah titik ini kita lepaskan lagi, maka akan berputar (ke kiri) yang menimbulkan momen-momen-ujung sebagai reaksi seperti diterangkan di dalam § 1 di atas.

$$\begin{aligned}
\triangle M_{1a} &= -\mu_{1a} M^o_1 = -\tfrac{45}{157}(-\tfrac{1}{8}q_1 l_1^2) = +\tfrac{45}{157}\cdot\tfrac{1}{8}q_1 l_1^2 \\
\triangle M_{1b} &= -\mu_{1b} M^o_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots = +\tfrac{72}{157}\cdot\tfrac{1}{8}q_1 l_1^2 \\
\triangle M_{1c} &= -\mu_{1c} M^o_1 = \qquad\qquad\quad +\tfrac{40}{157}\cdot\tfrac{1}{8}q_1 l_1^2
\end{aligned}$$

Momen-momen $\triangle M_1$ ini disebut *momen-distribusi* atau *pengrataan* yang-ditambahkan (superposisi) secara aljabar kepada momen-momen-primar tadi, jadi :

$$\begin{aligned}
M_{1a} &= M^o_{1a} + \triangle M_{1a} = -\tfrac{1}{8}q_1 l_1^2 + \tfrac{45}{157}\cdot\tfrac{1}{8}q_1 l_1^2 = -\tfrac{112}{157}\cdot\tfrac{1}{8}q_1 l_1^2 = -\tfrac{14}{157}q_1 l_1^2 \\
M_{1b} &= M^o_{1b} + \triangle M_{1b} = \quad 0 \quad + \tfrac{72}{157}\cdot\tfrac{1}{8}q_1 l_1^2 = +\tfrac{72}{157}\cdot\tfrac{1}{8}q_1 l_1^2 = +\tfrac{9}{157}q_1 l_1^2 \\
M_{1c} &= M^o_{1c} + \triangle M_{1c} = \quad 0 \quad + \tfrac{40}{157}\cdot\tfrac{1}{8}q_1 l_1^2 = +\tfrac{40}{157}\cdot\tfrac{1}{8}q_1 l_1^2 = +\tfrac{5}{157}q_1 l_1^2
\end{aligned}$$

Ternyata $\Sigma M_1 = 0$

Hitungan momen belum selesai, sebab pada ujung-ujung-jepitan juga tertimbul momen-momen jalar yaitu sebagai akibat beban itu (M_{b1} dan M_{c1}).

$M_{b1} = +\frac{1}{2}M_{1b} = +\frac{9}{314}q_1 l_1^2$ (ke kanan terhadap titik B)

$M_{c1} = +\frac{1}{2}M_{1c} = +\frac{5}{314}q_1 l_1^2$ (ke kanan terhadap titik C)

Untuk lengkapnya kita hitung reaksi-reaksi perletakannya dan perjalanan garis-garis gaya-lintang serta momennya.

$V^o_a = \frac{1}{2}q_1 l_1$; $V^o_c = V^o_1 = \frac{1}{2}q_1 l_1$; $V^o_b = o$ (statis tertentu)

$V_a = V^o_a + \frac{1}{l_1}(M_{a1} + M_{1a}) = (\frac{1}{2} - \frac{14}{157})q_1 l_1 = \frac{129}{314}q_1 l_1$ (lihat gb. VII, 2)

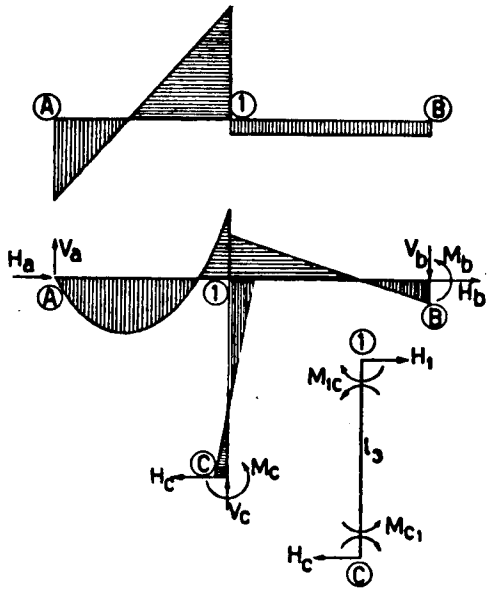
$V_c = V_1 = V^o_1 - \frac{1}{l_1}(M_{a1} + M_{1a}) + \frac{1}{l_2}(M_{1b} + M_{b1}) =$
$(\frac{1}{2} + \frac{14}{157} + \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{157})q_1 l_1 =$
$(\frac{1}{2} + \frac{14}{157} + \frac{54}{785})q_1 l_1 = \frac{1033}{1570}q_1 l_1$

$V_b = V^o_b - \frac{1}{l_2}(M_{1b} + M_{b1}) =$
$-\frac{54}{785}q_1 l_1$; $\Sigma V = q_1 l_1$

$Q^o_{a1} = +\frac{1}{2}q_1 l_1$; $Q^o_{1a} =$
$-\frac{1}{2}q_1 l_1$; $Q^o_{1b} = Q^o_{b1} = 0$

$Q_{a1} = Q^o_{a1} + \frac{1}{l_1}(M_{a1} + M_{1a}) =$
$(\frac{1}{2} - \frac{14}{157})q_1 l_1 = +\frac{129}{314}q_1 l_1$

$Q_{1a} = Q^o_{1a} + \frac{1}{l_1}(M_{a1} + M_{1a}) =$
$(-\frac{1}{2} - \frac{14}{157})q_1 l_1 = -\frac{185}{314}q_1 l_1$



Gambar VII, 3a

$Q_{1b} = Q^o_{1b} + \frac{1}{l_2}(M_{1b} + M_{b1}) = +\frac{54}{785}q_1 l_1$

$Q_{b1} = Q^o_{b1} + \frac{1}{l_2}(M_{1b} + M_{b1}) = +\frac{54}{785}q_1 l_1$

Pada perletakan C masih terdapat reaksi mendatar H_c sebagai akibat dari M_{1c} dan M_{c1}, dan diberi tanda + jika ke kanan.

$H_c = -\frac{1}{l_3}(M_{1c} + M_{c1}) = -\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{157}q_1 l_1 = -\frac{10}{157}q_1 l_1$ (ke kiri)

Oleh karena beban luar tidak menghasilkan komponenta mendatar, maka H_c ini harus diimbangi oleh H_a dan H_b sehingga $H_a + H_b = H_c$ nilai mutlaknya, dan berlawanan arahnya.

Batang A1 tertekan oleh gaya normal sebesar H_a dan batang 1B tertarik oleh gaya sebesar $H_b = H_c - H_a$.

$$\triangle l_1 = -H_a l_1/EF_1;\ \triangle l_2 = H_b l_2/EF_2 = (H_c - H_a)\, l_2/EF_2.$$
$$\triangle l_1 + \triangle l_2 = 0 \text{ yang menghasilkan } H_a \text{ dan } H_b$$

M_b dan M_c bekerja sebagai momen-reaksi (*momen-luar*) yang arahnya berlawanan dengan arah M_{b1} dan M_{c1} (sebab dilihat terhadap ujung-ujung batang).

Pada akhirnya dicocokkan dengan pendapat menurut cara dengan persamaan-persamaan momen atau Clapeyron (lihat IV, E – § 34).

$$M_{1c} = M_{1a} - M_{1b};\quad M_{b1} = -\tfrac{1}{2}M_{1b};\quad M_{c1} = -\tfrac{1}{2}M_{1a}$$

$$\tfrac{1}{24}q_1 l^3_1/EI_1 - \tfrac{1}{8}M_{1a}l_1/EI_1 = \tfrac{1}{4}(M_{1a} - M_{1b})\, l_3/EI_3 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$0 - \tfrac{1}{4}M_{1b}l_2/EI_2 = -\tfrac{1}{4}(M_{1a} - M_{1b})\, l_3/EI_3 \quad \ldots\ldots (2)$$

$$M_{1a}\left(\tfrac{1}{8}\frac{l_1}{l_3}\frac{I_3}{I_1} + \tfrac{1}{4}\right) - \tfrac{1}{4}M_b = \tfrac{1}{24}q_1 l_1^2 \cdot \frac{l_1}{l_3}\frac{I_3}{I_1} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\tfrac{1}{4}M_{1a} - M_{1b}\left(\tfrac{1}{4}\frac{l_2}{l_3}\frac{I_3}{I_2} + \tfrac{1}{4}\right) = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

$\frac{17}{56}M_{1a} - \frac{1}{4}M_{1b} = \frac{1}{56}q_1 l_1^2$

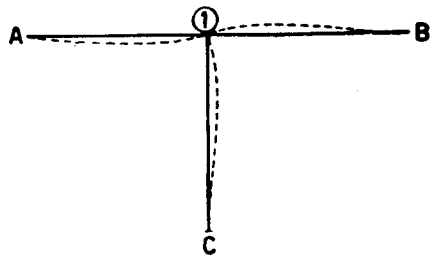
$\frac{1}{4}M_{1a} - \frac{7}{18}M_{1b} = 0;\ M_{1b} = \frac{9}{14}M_{1a}.$

$M_{1a} = \frac{14}{157}q_1 l_1^2$ (bekerja negatif)

$M_{1b} = \frac{9}{157}q_1 l_1^2$ (bekerja negatif)

$M_{1c} = \frac{5}{157}q_1 l_1^2$ (bekerja negatif)

$M_{b1} = -\frac{1}{2}M_{1b} = -\frac{9}{314}q_1 l_1^2$ (bekerja positif) dst.



Gambar VII, 3b

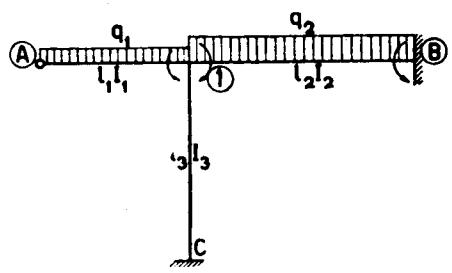
b. Muatan penuh merata $q_1 l_1$ dan $q_2 l_2$.

$M^o_{1a} = -\frac{1}{8}q_1 l_1^2;\ M^o_{1b} = -M^o_{b1} = +\frac{1}{12}q_2 l_2^2;\ M^o_{1c} = 0$

$M^o_1 = M^o_{1a} + M^o_{1b} + M^o_{1c} = \frac{1}{8}q_1 l_1^2 + \frac{1}{12}q_2 l_2^2$

$\triangle M_{1a} = -\mu_{1a}M^o_1 = -\frac{45}{157}\left(-\frac{1}{8}q_1 l_1^2 + \frac{1}{12}q_2 l_2^2\right).$

$\triangle M_{1b} = -\mu_{1b}M^o_1 = -\frac{72}{157}\left(-\frac{1}{8}q_1 l_1^2 + \frac{1}{12}q_2 l_2^2\right)$



Gambar VII, 3c

$\triangle M_{1c} = -\mu_{1c}M^o_1 = -\frac{40}{157}\left(-\frac{1}{8}q_1 l_1^2 + \frac{1}{12}q_2 l_2^2\right)$

$M_{1a} = M^o_{1a} + \triangle M_{1a} = \left(-1 + \frac{45}{157}\right)\frac{1}{8}q_1 l_1^2 - \frac{45}{157}\cdot\frac{1}{12}q_2 l_2^2$

$M_{1b} = M^o_{1b} + \triangle M_{1b} = \frac{72}{157}\cdot\frac{1}{8}q_1 l_1^2 + \left(1 - \frac{72}{157}\right)\cdot\frac{1}{12}q_2 l_2^2$

$M_{1c} = M^o_{1c} + \triangle M_{1c} = -\frac{40}{157}\left(-\frac{1}{8}q_1 l_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12}q_2 l_2^2\right)$

$\Sigma M_1 = 0$

$M_{b1} = M^o_{b1} + \frac{1}{2}\triangle M_{1b} = \frac{30}{157}\cdot\frac{1}{8}q_1 l_1^2 - \left(1 + \frac{36}{157}\right)\frac{1}{12}q_2 l_2^2$

$M_{c1} = \frac{1}{2}M_{1c} = -\frac{20}{157}\left(-\frac{1}{8}q_1 l_1^2 + \frac{1}{12}q_2 l_2^2\right).$

Usaha supaya $M_k = 0$ itu disebut *meratakan* momen primar pada titik – hubungan *k*.

Apabila di dalam contoh-contoh di atas itu, batang 1C diganti dengan perletakan biasa, maka batang A1B menjadi balok terusan di atas tiga titik perletakan, dan cara hitungan dapat dipertahankan.

§ 2a. **Contoh dengan tihang serong (gb. VII, 4)**

$l_1 = 8$ m; $l_2 = 12$ m; s = 5m; tgα = 4/3, jadi h = 4 m;

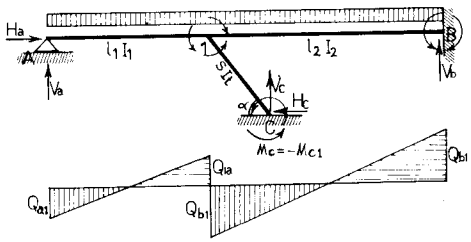
$l_1 : l_2 : l_t = 10 : 24 : 5.$

Beban penuh merata q = 1 t/m.

$\mu_{1a} : \mu_{1c} : \mu_{1b} = 3.12/8 : 4.5/5 : 4.24/12 =$

$= 3 : 2 : 4\ ;\ \mu_{1a} = 3/9 = 1/3;\ \mu_{1c} = 2/9;\ \mu_{1b} = 4/9.$

$M^o_{a1} = o;\ M^o_{1a} = q\, l_1^2/8 = -8{,}o$ tm;



Gambar VII 4

$M^{\circ}_{1b} = + ql^2/12 = + 12{,}o$ tm; $M^{\circ}_{b1} = - 12{,}o$ tm.

$M^{\circ}_{1c} = M^{\circ}_{c1} = 0$

$M^{\circ}_{1} = M^{\circ}_{1a} + M^{\circ}_{1b} + M^{\circ}_{1c} = + 4{,}o$ tm yang diratakan.

Hitungan dibuat secara daftar.

=	1A 1/3	1C 2/9	1B 4/9	B1	C1
M° tm	–8,0	–	+ 12,0	– 12,0	
ΔM "	–4/3	–8/9	–16/9	–8/9	–4/9
M tm	–28/3	–8/9	+ 92/9	–116/9	–4/9

Penjelasan :

$\Delta M_{1a} = \mu_{1a} M^{\circ}_{1} = - 1/3.4 = - 4/3$ tm.

$\Delta M_{1c} = - \mu_{1c} M^{\circ}_{1} = - 8/9$ tm.

$\Delta M_{1b} = - \mu_{1b} M^{\circ}_{1} = - 16/9$ tm.

$\Delta M_{b1} = ½ \times M_{1b} = 4/9$ tm sebagai momen induksi.

$M_c = ½ M_{1c} = - 4/9$ tm (induksi).

$M_{1a} = M^{\circ}_{1a} + \Delta M_{1a} = - 8 - 4/3 = - 28/3$ tm dan seterusnya ternyata $\Sigma M_1 = 0$

$V^{\circ}_{a1} = V^{\circ}_{1a} = ½ q l_1 = 4$ t; $V^{\circ}_{1b} = V^{\circ}_{b1} = ½ ql_2 = 6$ t.

$V'_{a1} = - V'_{1a}$ ($M_{a1} + M_{1a}$) $l_1 = -7/6.$ t; $V'_{1b} = - V'_{b1} = (M_{1c} + M_{c1})/l_2 =$

$= - 2/9$ t.

$V_a = V^{\circ}_{a1} + V_{a1} = 17/6.$t; $V_c = V_1 = V_{1a} + V_{1b} = (V^{\circ}_{1a} + V'_{1a}) + (V^{\circ}_{1b} + V'_{1b})$

$= 31/6 + 52/9 = 197/18.$t.

$Q_a = V_a = 17/6.$t ; $Q_{1a} = - V_{1a} = - 31/6.$t; $Q_{1b} = V_{1b} = 52/9.$t; $Q_b =$

$= - V_b = - 56/9.$t

$H_c = - (M_{c1} + M_{1c})/h - V_c \operatorname{cotg} \alpha = 12/9. ¼ - 197/18. 3/4 = - 189/24.$t

(ke kiri)

Apabila serongnya tihang di balik sehingga C jatuh di kirinya 1 (dengan yang sama), maka $H_c = - (M_{c1} + M_{1c})/h + V_c \operatorname{cotg} \alpha = + 205/24$ (ke kanan). – Momen-momen ujung dan reaksi-reaksi vertikalnya tidak berubah.

Kemudian, jika tihang 1C diganti dengan perletakan biasa (sendi atau rol), sehingga terdapat balok terusan A 1 B, maka cara Cross ini juga dapat dipergunakan.

$\mu_{1a} : \mu_{1b} = 3 : 4$; $\mu_{1a} = 3/7$; $\mu_{ab} = 4/7$

	1A 3/7	1B 4/7	B1
M^{o}.. tm.	– 8	+ 12	– 12
ΔM..	– 12/7	– 16/7	– 8/7
M.. tm	– 68/7	+ 68/7	– 92/7

Dicocogkan dengan cara Glapoyron:

$M_1 (l_1/3\,EI_1 + l_2/3EI_2) + M_b l_2/6EI_2 = ql_1^3/24\,EI_1 + ql_2^3/24\,EI_2$

$M_1 l_2/6\,EI_2 + M_b l_2/3\,EI_2 = q\,l_2^3/24\,EI_2$

PERPUSTAKAAN DAERAH JAWA TIMUR
JL. MENUR PUMPUNGAN No. 32
S U R A B A Y A

Dikalikan dengan EI_2/l_2 sedang $(l_1/l_2)(I_2/I_1) = 1$ menjadi

$2/3\ M_1 + 1/6\ M_b = 1/24\ q\ (l_1^2 + l_2^2) = 26/3$

$1/6\ M_1 + 1/3\ M_b = 1/24\ ql_2^2 = 6$

$7/6.\ M_1 = 34/3;\ M_1 = 68/3$ tm; $M_b = 92/7$ tm.

§ 3. **Dasar cara Cross.**

Cara dengan pengrataan momen dapat diperluas pada susunan berbatangan yang mengandung beberapa titik-titik-hubungan yang dapat berputar, tanpa atau dengan peralihan tempat (geseran atau goyangan).

Sebelum beban-luar dikerjakan,titik-titik-hubungan dianggap terpegang teguh hingga tak dapat berputar serta bergeser. Kemudian titik-titik hubungan itu dilepaskan satu per satu sambil menghitung momen-momen-distribusinya. Misalnya mulai melepaskan titik No 1. Momen-distribusi $\Delta_1\ M_{12}$ yang terdapat ini, menimbulkan momen-jalar sebesar ½ nya pada titik No. 2, sedang di sini semula sudah ada momen primar M_2°. Setelah titik 1 dipegang teguh lagi, kita melepaskan titik 2 dan momen yang harus diratakan ialah jumlah aljabar M_2° dan $\frac{1}{2}\Delta_1 M_{12}$ itu.

Sebagai akibat dari pengrataan ini, timbullah momen-jalar sebesar $\frac{1}{2}\Delta_1\ M_{21}$ pada titik 1 dan momen-induksi sebesar $\frac{1}{2}\Delta_1\ M_{23}$ pada titik-hubungan No 3 yang dijumlahkan secara aljabar dengan M_3°. Kemudian titik 2 dipegang teguh kembali dan melepaskan titik 3 dan seterusnya. Setelah semua titik-titik-hubungan satu per satu dilepaskan dan dipegang teguh lagi untuk pertama kalinya, kita katakan, bahwa *pengrataan pertama* pada seluruh bangunan selesai. Kemudian kita mulai dengan pengrataan fasal *kedua,* mulai dengan titik 1 lagi. Momen yang diratakan di sini ialah momen-induksi berasal dari titik 2 ketika pengrataan pertama.

Momen-distribusi $\Delta_2\ M_{12}$ menjalarkan lagi separohnya pada titik 2 sedang di sini telah ada $\frac{1}{2}\Delta_1\ M_{32}$ sebagai momen-induksi berasal dari

titik 3 ketika ini diratakan untuk pertama kalinya. Jadi nanti yang diratakan dititik 2 ialah $\frac{1}{2}(\Delta_1\ M_{32} + \Delta_2\ M_{12})$ dan seterusnya.

Untuk mencapai hasil yang betul, kita harus meratakan ∞ kali banyaknya supaya $\Sigma\ M_k = 0$ di tiap-tiap titik hubungan.

Tetapi di dalam praksis tidak usah begitu, sebab tiap pengrataan memperkecil ΣM_k secara cepat (convergent) sehingga 4 kali pengrataan biasanya sudah cukup saksama.

Apabila titik-titik hubungan itu di samping berputar juga dapat bergoyang maka kita menjalankan hitungan dalam dua babak:

a. Pertama meratakan seolah-olah titik-titik hubungan tidak dapat bergoyang. Hasil-hasilnya ialah $M'_{1a}, M'_{12}, M'_{21}, \ldots\ldots M'_{kj}$.

b. Beban dilenyapkan, dan menghitung akibat dari goyangan-goyangan mungkin terjadi.

   Pendapat-pendapat ini *sebagai koreksi* ditambahkan pada pendapat-pendapat pertama.

Di bawah ini kita membagi-bagi soal dalam dua bagian utama:

I. Titik-titik hubungan tidak dapat bergoyang.

II. Titik-titik hubungan dapat bergoyang.

Bagian II nanti akan dibagi lagi dalam goyangan tunggal, yaitu ke satu arah dan sama untuk tiap-tiap titik-hubungan dan goyangan ke berbagai-bagai arah dan tidak sama, kita sebut *goyangan berganda.*

Selanjutnya dianggap, bahwa masing-masing batang mempunyai faktor kekakuan EI yang tetap. Soal-soal dengan EI tidak tetap, akan menyusul terakhir.

Urutnya melepaskan titik-titik hubungan satu per satu ialah seyogianya mulai dengan titik yang *bilangan-mutlak* momen-primarnya itu *terbesar.*

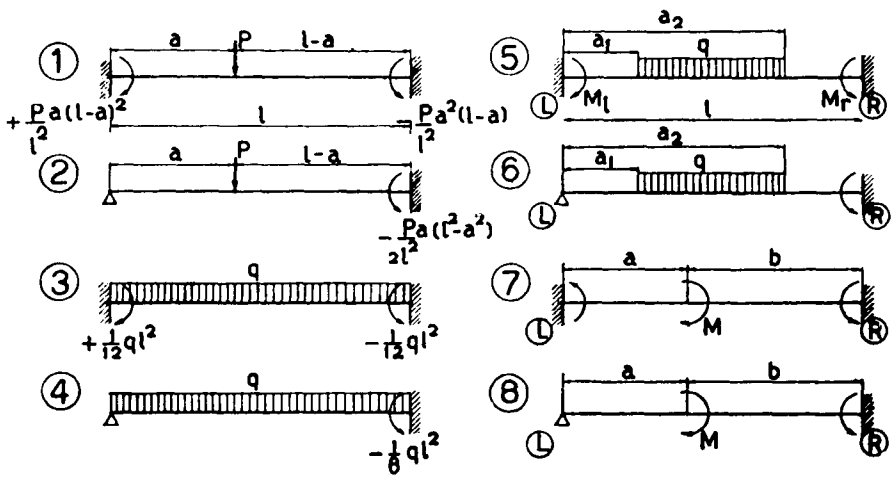
§ 4. Menghitung momen-ujung primar, M°_{kj}.

Oleh karena titik-titik hubungan itu sementara dipegang teguh hingga tak dapat berputar, maka ini berarti bahwa ujung batang di situ dianggap terjepit sempurna. Batang yang diapit oleh dua titik hubungan dipandang sebagai balok terjepit pada kedua-dua ujungnya. Batang luar yang berakhir dengan sendi dihitung sebagai balok terjepit sebelah, bersendi pada ujung lawannya. Jadi hitungan didasarkan atas balok terjepit (bab IV D – § 29).

Gambar di bawah ini memperlihatkan keadaan-keadaan dan hasil-hasilnya yang sering terjadi.

Pada kejadian No. 5 terdapat:

$$M_l = \frac{q}{l^2}\{\tfrac{1}{2}\,l^2(a_2^2 - a_1^2) - \tfrac{2}{3}l\,(a_2^3 - a_1^3) + \tfrac{1}{4}\,(a_2^4 - a_1^4)\}$$



Gambar VII, 5

$$M_r = \frac{q}{l^2}\{\tfrac{1}{2}\,l\,(a_2^3 - a_1^3) - \tfrac{1}{4}(a_2^4 - a_1^4)\}$$

Khusus: $a_1 = 0,\ a_2 = \tfrac{1}{2}l$

$$M_l = +\tfrac{11}{192}\,ql^2;\quad M_r = -\tfrac{5}{192}\,ql^2$$

Kejadian 6: $M_r = -\dfrac{q}{2l^2}\{\tfrac{1}{2}\,l^2(a_2^2 - a_1^2) - \tfrac{1}{4}\,(a_2^4 - a_1^4)\}$

Khusus dengan $a_1 = 0$ dan $a_2 = \tfrac{1}{2}l$: $M_r = -\tfrac{7}{128}\,ql^2$

$a_1 = \tfrac{1}{2}l,\ a_2 = l$: $M_r = -\tfrac{9}{128}\,ql^2$

Kejadian 7: EI $\varphi_l^{\circ} = -\tfrac{1}{6}\,Ml(1 - 3\,b^2/l^2)$; EI $\varphi_r^{\circ} = \tfrac{1}{6}\,Ml(1 - 3\,a^2/l^2)$.

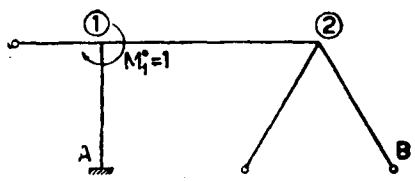
$$M_l = -M\,\frac{b}{l}\,(2\,a/l - b/l);\quad M_r = -M\,\frac{a}{l}(2\,b/l - a/l)$$

Kejadian 8: $M_r = -\tfrac{1}{2}M(1 - 3\,a^2/l^2)$.

B. TITIK-HUBUNGAN TAK BERGESER

§ 5. Dua titik-hubungan.

Kita mempelajari akibat $M_1^{\circ} = +1$.



Gambar VII, 6

Hasil pengrataan *pertama* (mulai dengan 1)

$\triangle_1 M_{1a} = -\mu_{1a} M^{\circ}_{1a} = -\mu_{1a}$

$\triangle_1 M_{12} = -\mu_{12} M^{\circ}_{1a} = -\mu_{12}$,

ini menginduksikan momen pada titik 2 sebesar $-\tfrac{1}{2}\,\mu_{12}$.

$\triangle_1 M_{2b} = -\mu_{2b}(-\tfrac{1}{2}\mu_{12}) = +\tfrac{1}{2}\mu_{2b}\,\mu_{12}$

$\triangle_1 M_{21} = -\mu_{21}(-\tfrac{1}{2}\mu_{12}) = +\tfrac{1}{2}\,\mu_{21}\,\mu_{12}$ yang memiliki di titik 1 momen-jalar sebesar $+\tfrac{1}{4}\,\mu_{21}\,\mu_{12}$.

Pengrataan kedua:

$\triangle_2 M_{1a} = -\mu_{1a} \cdot \tfrac{1}{4}\,\mu_{21}\,\mu_{12}$

$\triangle_2 M_{12} = -\mu_{12} \cdot \tfrac{1}{4}\,\mu_{21}\,\mu_{12} = -\tfrac{1}{4}\,\mu_{12}^2\,\mu_{21}$ (indusksi separohnya di 2)

$\triangle_2 M_{2b} = -\mu_{2b} \cdot \tfrac{1}{8}\,\mu_{12}^2\,\mu_{21}$

$\triangle_2 M_{21} = -\mu_{21} \cdot \tfrac{1}{8}\,\mu_{12}^2\,\mu_{21} = -\tfrac{1}{8}\,\mu_{12}^2\,\mu_{21}^2$, dan seterusnya.

Selanjutnya lihat daftar :

1A	12	21	2B
$-\mu_{1a}$	$-\mu_{12}\rightarrow$	$-\frac{1}{2}\mu_{12}\downarrow\searrow$	
	$+\frac{1}{2}\mu_{12}\mu_{21}\swarrow\downarrow$	$\leftarrow+\frac{1}{2}\mu_{12}\mu_{21}$	$+\frac{1}{2}\mu_{2b}\mu_{12}$
$-\frac{1}{4}\mu_{1a}\mu_{12}\mu_{21}$	$-\frac{1}{4}\mu_{12}^2\mu_{21}\rightarrow$	$-\frac{1}{8}\mu_{12}^2\mu_{21}\downarrow\searrow$	
	$+\frac{1}{16}\mu_{12}^2\mu_{21}^2\swarrow\downarrow$	$\leftarrow+\frac{1}{8}\mu_{12}^2\mu_{21}^2$	$+\frac{1}{8}\mu_{2b}\mu_{12}^2\mu_{21}$
$-\frac{1}{16}\mu_{1a}\mu_{12}^2\mu_{21}^2$	$-\frac{1}{16}\mu_{12}^3\mu_{21}^2\rightarrow$	$-\frac{1}{32}\mu_{12}^3\mu_{21}^2\downarrow\searrow$	
	$+\frac{1}{64}\mu_{12}^3\mu_{21}^3\swarrow\downarrow$	$\leftarrow+\frac{1}{32}\mu_{12}^3\mu_{21}^3$	$+\frac{1}{32}\mu_{2b}\mu_{12}^3\mu_{21}^2$
$-\frac{1}{64}\mu_{1a}\mu_{12}^3\mu_{21}^3$	$-\frac{1}{64}\mu_{12}^4\mu_{21}^3\rightarrow$	$-\frac{1}{128}\mu_{12}^4\mu_{21}^3\downarrow\searrow$	
	$+\frac{1}{256}\mu_{12}^4\mu_{21}^4\swarrow\downarrow$	$\leftarrow+\frac{1}{128}\mu_{12}^4\mu_{21}^4$	$+\frac{1}{128}\mu_{2b}\mu_{12}^4\mu_{21}^3$
$-\frac{1}{256}\mu_{1a}\mu_{12}^4\mu_{21}^4$	$-\frac{1}{256}\mu_{12}^5\mu_{21}^4\rightarrow$	dst.	

Terlihat, bahwa yang berulang-ulang terdapat itu besaran $\frac{1}{4}\mu_{12}\mu_{21}$ atau-lipatannya. Untuk mempermudah kita tulis $\frac{1}{4}\mu_{12}\mu_{21} = \alpha < 1$.

$$\Delta M_{1a} = -\mu_{1a}(1+\alpha+\alpha^2+\ldots\ldots\alpha^{\infty}) = -\mu_{1a}(1+\beta)$$

jika $\beta = \sum_1^{\infty}\alpha^k = \frac{\alpha}{1-\alpha}$

$$\Delta M_{12} = -\mu_{12}(1+\alpha+\alpha^2+\ldots\ldots\alpha^{\infty}) + (\alpha+\alpha^2+\ldots\alpha^{\infty}) = -\mu_{12}(1+\beta)+\beta$$

$$\Delta M_{21} = -\tfrac{1}{2}\mu_{12}(1+\alpha+\alpha^2+\ldots\alpha^{\infty}) + 2(\alpha+\alpha^2+\ldots\alpha^{\infty}) = -\tfrac{1}{2}\mu_{12}(1+\beta)+2\beta$$

$$\Delta M_{2b} = +\tfrac{1}{2}\mu_{2b}\mu_{12}(1+\alpha+\alpha^2+\ldots\ldots\alpha^{\infty}) = +\tfrac{1}{2}\mu_{2b}\mu_{12}(1+\beta)$$

Untuk batang-batang luar lainnya, pendapat-pendapatnya serupa dengan ΔM_{1a} atau ΔM_{2b} dengan μ yang selaras.

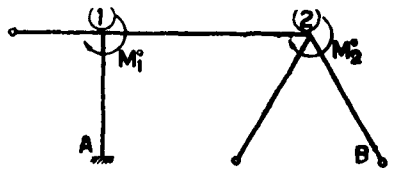
Kemudian hasil-hasil dari akibat $M_2^o = +1$ terdapat secara tukar menukar berdasarkan atas analogos. Jadi sebagai akibat dari M_1^o dan M_2^o terdapat:

$$\Delta M_{1a} = -\mu_{1a}(1+\beta)M_1^o + \tfrac{1}{2}\mu_{1a}\mu_{21}(1+\beta)M_2^o$$

$$\Delta M_{12} = -\{\mu_{12}(1+\beta)-\beta\}M_1^o - \{\tfrac{1}{2}\mu_{21}(1+\beta)-2\beta\}M_2^o$$

$$\Delta M_{21} = -\{\tfrac{1}{2}\mu_{12}(1+\beta)-2\beta\}M_1^o - \{\mu_{21}(1+\beta)-\beta\}M_2^o$$

$$\Delta M_{2b} = \tfrac{1}{2}\mu_{2b}\mu_{12}(1+\beta)M_1^o - \mu_{2b}(1+\beta)M_2^o$$



Gambar VII. 6a

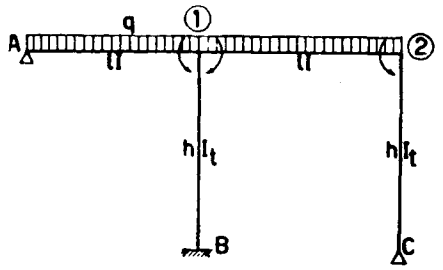
§ 6. Contoh dengan dua titik-hubungan.

Ditentukan: $l_1 : l_2 : h = 3:4:2$
$I_1 : I_2 : I_t = 2:3:1.$

$\mu_{1a} : \mu_{1b} : \mu_{12} = 3 \cdot \frac{2}{5} : 4 \cdot \frac{1}{2} : 4 \cdot \frac{3}{4} =$
$= 2:2:3$

$\mu_{1a} = 2/7;\ \mu_{1b} = 2/7;\ \mu_{12} = 3/7$

$\mu_{21} : \mu_{2c} = 4 \cdot \frac{3}{4} : 3 \cdot \frac{1}{2} =$
$2:1;\ \mu_{21} = 2/3;\ \mu_{2c} = 1/3$



Gambar VII. 7

Beban penuh merata q di atas A 12

$M_{1a}^o = -\frac{1}{8}ql_1^2$

$M_{12}^o = +\frac{1}{12}ql_2^2 = +\frac{4}{27}ql_1^2 = -M_{21}^o;\ M_{1b}^o = M_{1c}^o = 0$

$M_1^o = M_{1a}^o + M_{12}^o = +\frac{5}{216}ql_1^2;\ M_2^o = -\frac{4}{27}ql_1^2 = -\frac{32}{216}ql_1^2$

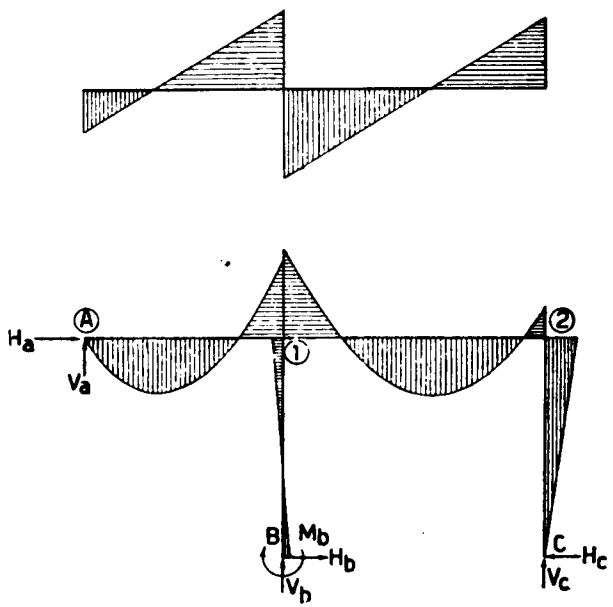
Kita tulis $+\frac{5}{216}ql_1^2 = +0{,}500$, jadi $-\frac{32}{216}ql_1^2 = -3{,}200$ dan $-\frac{1}{32}ql_1^2 = -2{,}700$, yang kemudian kita ratakan secara daftar, mulai dengan titik-hubungan 2.

	$M_1^o = +0{,}500$			$M_2^o = -3{,}200$	
Ujung	1A	1B	12	21	2C
$\mu =$	2/7	2/7	3/7	2/3	1/3
	−2,700	—	+3,200	−3,200	—
			+1,067	← +2,133	$\frac{1}{3}\cdot3{,}200 = +1{,}067$
	−0,447	−0,447	$-\frac{3}{7}\cdot1{,}567 =$		
			−0,672 →	−0,334	
			+0,111	← +0,223	+0,111
	−0,032	−0,032	−0,048 →	−0,024	
			+0,008	← +0,016	+0,008
	−0,002	−0,002	−0,004		
$21{,}6M/ql_1^2 =$	−3,181	−0,481	+3,662	−1,186	+1,186
$M/ql_1^2 =$	−0,147	−0,022	+0,170	−0,054	+0,054

$M_{b1} = \frac{1}{2}M_{1b} = -0{,}011\ ql_1^2$; $M_b = -M_{b1} = 0{,}011\ ql_1^2$ (terhadap ujung B1)

Sekedar penjelasan : $\Delta_1\ M_{21} = -\mu_{21}\ M_2^o = +2{,}133$ dan ini menjalarkan momen di titik 1 sebesar separohnya = 1,067 yang ditambahkan pada M_1^o semula, menghasilkan 1,567, dan ini nanti diratakan dan seterusnya.

$$V_a^o = \tfrac{1}{2}\ ql_1;\ V_b^o = \tfrac{1}{2}\ q(l_1 + l_2) = \tfrac{7}{6}\ ql_1;$$
$$V_c^o = \tfrac{1}{2}\ ql_2 = \tfrac{8}{3}\ ql_1$$



Gambar VII, 7a

$V_a = V_a^o + M_{1a}/l_1 = \frac{1}{2}\ ql_1 - 0{,}147\ ql_1 = 0{,}353\ ql_1$

$V_b = V_b^o - M_{1a}/l_1 + (M_{12} + M_{21})/l_2 = (\frac{7}{6} + 0{,}147 + 0{,}088)ql_1 = 1{,}402ql_1$

$V_c = V_c^o - (M_{12} + M_{21})/l_2 = (\frac{2}{3} - 0{,}088)ql_1 = 0{,}579ql_1$

$\Sigma V = 2{,}333ql_1$ sedang $q(l_1 + l_2) = 2{,}333\ ql_1$

$Q_{a1} = +0{,}353\ ql_1$

$Q_{1a} = Q_{1a}^o + M_{1a}/l_1 = -0{,}647\ ql_1$

$Q_{12} = Q_{12}^o + (M_{12} + M_{21})/l_1 = +0{,}755\ ql_1$

$Q_{21} = Q_{21}^o + (M_{12} + M_{21})/l_1 = -0{,}579\ ql_1$

$H_b = -(M_{1b} + M_{b1})/h = +0{,}050\ ql_1$ (ke kanan)

$H_c = -M_{2c}/h = -0{,}081\ ql_1$ (ke kiri)

$H_a = -(H_b + H_c) = +0{,}031\ ql_1$

Dicocokkan dengan cara § 5.

$\alpha = \frac{1}{4}\ \mu_{12}\mu_{21} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{14}$.

$\beta = \dfrac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1}{13}$; $1 + \beta = \frac{14}{13}$

$M_{1a} = \{-\frac{1}{8} - \frac{2}{7} \cdot \frac{14}{13} \cdot \frac{5}{216} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{14}{13}\ (-\frac{4}{27})\}\ ql_1^2 = -3{,}183\ ql_1^2/21{,}6.$

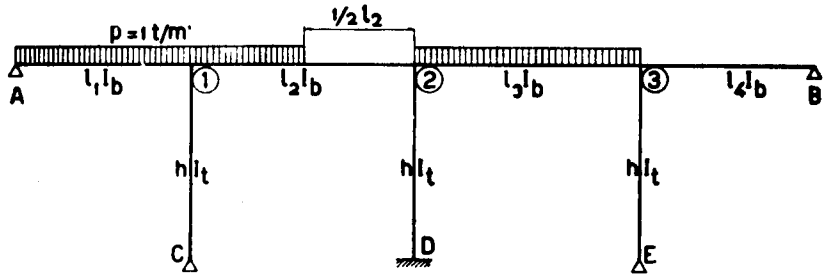
$M_{12} = \{\frac{4}{27} - (\frac{3}{7} \cdot \frac{14}{13} \cdot -\frac{1}{13})\ \frac{5}{216} - (\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{14}{13} - \frac{2}{13})(-\frac{4}{27})\}ql_1^2 = +3{,}664ql_1^2/21{,}6$

$M_{21} = \{-\frac{4}{27} - (\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{14}{13} - \frac{3}{13})\ \frac{5}{216} - (\frac{2}{3} \cdot \frac{14}{13} \cdot \frac{1}{13})(-\frac{4}{27})\}ql_1^2 = -1{,}187ql_1^2/21{,}6$

$M_{2c} = \{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{14}{13} \cdot \frac{5}{216} - \frac{1}{3} \cdot \frac{14}{13}(-\frac{4}{27})\}ql_1^2 = +1{,}187ql_1^2/21{,}6.$

§ 7. Portal tiga kaki.

$l_1 = 10\ m$; $l_2 = 12\ m$; $h = 6\ m$; $l_3 = l_2$; $l_4 = l_1$.
$I_b = 5\ I_t$



Gambar VII, 8

A,B,C dan E sendi; D jepit

$\mu_{1a} : \mu_{1c} : \mu_{12} = 3 \cdot \frac{5}{10} : \frac{3}{5} \cdot 1 : 4 \cdot \frac{5}{12} = 9 : 3 : 10$

$\mu_{21} : \mu_{2d} : \mu_{23} = 4 \cdot \frac{5}{12} : 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 : 4 \cdot \frac{5}{12} = 5 : 2 : 5$

$\mu_{1a} = \mu_{3b} = 5/22 = 0{,}409$; $\mu_{1c} = \mu_{3c} = 3/22 = 0{,}137$; $\mu_{12} = \mu_{32} =$
$= 10/22 = 0{,}454$

$\mu_{21} = \mu_{23} = 5/12 = 0{,}417$; $\mu_{2d} = 2/12 = 0{,}167$

Muatan merata $p = 1$ t/m' di atas bentang A1, separoh bentang 12 dan bentang 23

$M_{1a}^o = -\frac{1}{8}\ pl_1^2 = -12{,}500\ tm$; $M_{12}^o = +\frac{11}{192}\ pl_2^2 = +8{,}250\ tm$;
$M_{21}^o = -\frac{5}{192}\ pl_2^2 = -3{,}750\ tm$;
$M_{23}^o = -M_{32}^o = +\frac{1}{12}\ pl_2^2 = +12{,}000\ tm$.
$M_1^o = -4{,}250\ tm$; $M_2^o = +8{,}250\ tm$; $M_3^o = -12{,}00\ tm$ (terbesar)

Hitungan di atas didasarkan atas $\Sigma M_k = 0$ pada tiap-tiap pengrataan berhubung dengan nilai-nilainya μ dan M_k^o yang bersangkutan. Kesalahan kesalahan di dalam hitungan μ dan M_k^o ini tidak akan diketahui, sebab

sebagai kontrol hanya pendapat bahwa $\Sigma M_k^o = 0$. untuk mengontrol hitungan pada akhirnya, kita menyaratkan keadaan seimbang:

Σ gaya vertikal = 0; Σ gaya mendatar = 0; Σ momen = 0

Sebagai gaya dihitung beban-beban luar dan reaksi-reaksi perletakan.

Sebagai momen dihitung momen-momen yang bekerja pada ujung-ujung batang (di sini hanya $M_d = -M_{d2}$) dan momen-momen luar yang bekerja sebagai beban (tak ada di sini). Daftar halaman 412.

$V_a^o = \frac{1}{2} pl_1 = 5{,}00t$; $V_c^o = \frac{1}{2} pl_1 + \frac{3}{8} pl_2 = 9{,}500t$; $V_d^o = \frac{5}{8} pl_2 + \frac{1}{2} pl_3 = 7{,}500t$
$V_c^o = \frac{1}{2} pl_3 = 6{,}00t$; $V_b^o = 0$
$V_a = V_a^o + M_{1a}/l_1 = 5{,}000 - 0{,}964 = 4{,}036t.$
$V_c = V_c^o - M_{1a}/l_1 + (M_{12} + M_{21})/l_2 = 9{,}500 + 0{,}964 + 0{,}085 = 10{,}549t.$
$V_d = V_d^o - (M_{1a} + M_{21})/l_2 + (M_{23} + M_{32})/l_3 = 7{,}500 - 0{,}085 + 0{,}149 =$
$= 7{,}564t.$
$V_e = V_e^o - (M_{23} + M_{32})/l_3 + M_{3b}/l_4 = 6{,}000 - 0{,}149 + 0{,}603 = 6{,}454t.$
$V_b = V_b^o - M_{3b}/l_4 = -0{,}603t.$ Jika betul, harus terdapat:
$\Sigma V = p(l_1 + \frac{1}{2} l_2 + l_3) = 28{,}000t$ (syarat imbang pertama).

$H_c = -M_{1c}/h = -0{,}160t$; $H_d = -(M_{2d} + M_{d2})/h = +0{,}548t.$
$H_e = -M_{3e}/h = -0{,}337t$; $H_c + H_d + H_e = +0{,}051\ t$
Jadi $H_a + H_b = -0{,}051\ t$ (ke kiri), dengan sendirian memenuhi syarat imbang kedua.

yang terpenting sekarang ialah syarat $\Sigma M = 0$. terhadap titik semba rangan

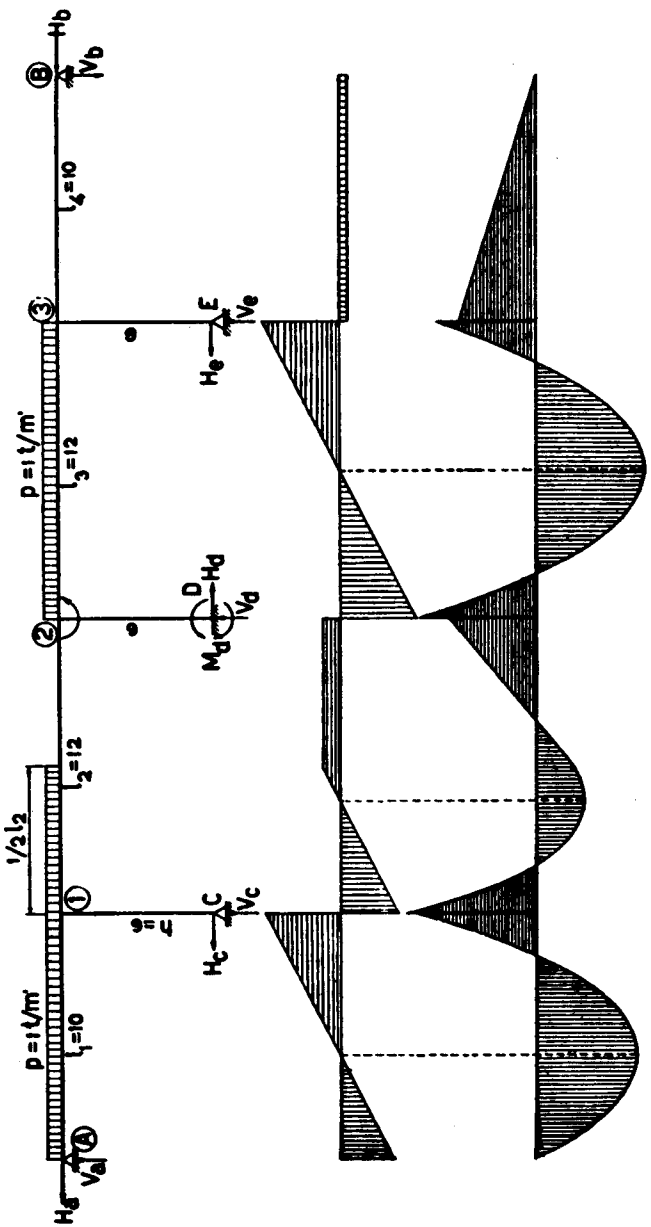
Kita ambil ujung D dan menjumlah secara aljabar momen-momen terhadapnya.

Ke kanan $M^+ = V_a(l_1 + l_2) + V_c l_2 - V_b(l_4 + l_3) + M_d + \frac{1}{2} pl_3^2 =$
$= 4{,}036.22 + 10{,}549.12 + 0{,}603.22 + 1{,}095 + \frac{1}{2}.144$
$= 301{,}741$

Ke kiri: $M^- = V_e l_2 + (H_a + H_b) h + pl_1(\frac{1}{2} l_1 + l_2) + \frac{1}{2} pl_2 . \frac{3}{4} l_2 =$
$= 6{,}454.12 + 0{,}051.6 + 10.17 + 6.9 = 301{,}754$
$\Sigma M_d = +301{,}741 - 301{,}754 \simeq 0.$

H_a dan H_b dapat dihitung bahwa $\Sigma \Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = 0$
$H_a l_1/EF_1 + (H_a + H_c) l_2/EF_2 - (H_b + H_c) l_3/EF_3 - H_b l_4/EF_4 = 0 \ldots . (1)$
$H_a + H_b = H_d - (H_c + H_e) \ldots . (2)$
Semua besaran H diambil nilai mutlaknya.

$Q_{a1} = Q_a^o + M_{1a}/l_1 = 5{,}000 - 0{,}964 = +4{,}036t.$
$Q_{1a} = Q_{1a}^o + M_{1a}/l_1 = -5{,}000 - 0{,}964 = -5{,}964t.$ } $V_c = 10{,}549t$
$Q_{12} = Q_{12}^o + (M_{12} + M_{21})/l_2 = 4{,}500 + 0{,}085 = +4{,}585t$ }



Gambar VII, 8a

$Q_{21} = Q_{21}^o + (M_{12} + M_{21})/l_2 = -1{,}500 + 0{,}085 = -1{,}415t.$ } $V_d = 7{,}564t.$
$Q_{23} = Q_{23}^o + (M_{23} + M_{32})/l_3 = 6{,}000 + 0{,}149 = +6{,}149t$ }
$Q_{32} = Q_{32}^o + (M_{23} + M_{32})/l_3 = -6{,}000 + 0{,}149 = -5{,}851t$ } $V_e = 6{,}454t.$
$Q_{3b} = Q_{3b}^o + M_{3b}/l_4 = 0 + 0{,}603 = 0{,}603t$ }
$Q_{b3} = Q_{bb}^o + M_{3b}/l_4 = 0{,}603 = +0{,}603t.$

Di samping itu masih ada gaya-gaya normal H (lihat atas).

	$M_1^0 = -4{,}250$			$M_2^0 = +8{,}250$			$M_3^0 = -12{,}000$			
	1A 0,409	1C 0,137	12 0,454	21 0,417	2D 0,167	23 0,417	32 0,454	3E 0,137	3B 0,409	
	−12,500		+ 8,250	− 3,750		+ 12,000	−12,000			
	+ 1,738	+ 0,582	+ 1,930 →	+ 0,965		+ 2,724	+ 5,448 ↓	+ 1,644	+ 4,908	
			− 2,490	− 4,979	− 1,981	− 4,979 →	− 2,490			
	+ 1,018	+ 0,342	+ 1,130 →	+ 0,565		+ 0,565	+ 1,130 ↓	+ 0,342	+ 1,018	
			− 0,235	− 0,471	− 0,188	− 0,471 →	− 0,235			
	+ 0,096	+ 0,032	+ 0,107 →	+ 0,054		+ 0,054	+ 0,107 ↓	+ 0,032	+ 0,096	
			− 0,022	− 0,045	− 0,018	− 0,045 →	− 0,022			
	+ 0,009	+ 0,003	+ 0,010 →	+ 0,005		+ 0,005	+ 0,010 ↓	+ 0,003	+ 0,009	
				− 0,004	− 0,002	− 0,004				
$M =$	− 9,639	+ 0,959	+ 8,680	− 7,660	− 2,189	+ 9,849	− 8,052	+ 2,021	+ 6,031	
					$M_{d2} = -1{,}095$					

Penjelasan : M^0 yang terbesar nilai mutlaknya ialah $M^0_3 = -12{,}000$. Kita melepaskan pertama-tama titik hubungan 3, yang menghasilkan $\Delta_1 M_{32} = -0{,}454\ (-12{,}000) = +5{,}448$ dan ini menimbulkan M_{23} terjalar = + 2,724. Kemudian titik 1 (atau seketika dengan titik 3) dilepaskan; menghasilkan $\Delta_1 M_{12} = -0{,}454\ (-4{,}250) = +1{,}930$, M_{12} terjalar = + 0,965. Jadi yang nanti diratakan di titik-hubungan 2 ialah $M^0_2 + 2{,}724 + 0{,}965 = 11.939$.
Ini menghasilkan $\Delta_1 M_{21} = \Delta_1 M_{32} = -0{,}417.\ 11{,}939 = -4{,}979$, $\Delta_1 M_2 d = -0{,}167.\ 11{,}939 = -1{,}981$ dan seterusnya.

Jika panjang tihang F = 0, soal menjadi balok terusan di atas 5 titik perletakan, dan cara Cross ini boleh dipergunakan juga.

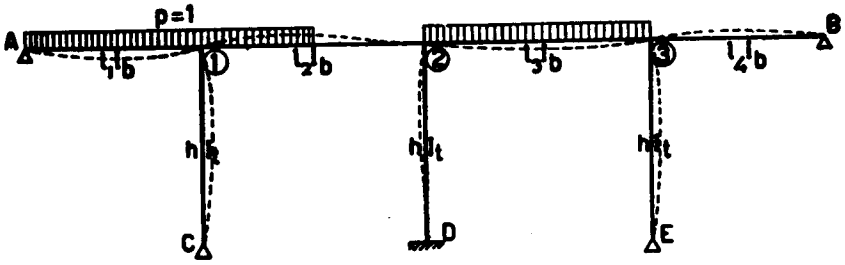
§ 8. Cara dengan persamaan tiga-momen.

Ini sebagai perbandingan saja.

Kita memakai besaran-besaran bantuan k

$k_1 = (h/l_1)(I_b/I_t) = \frac{6}{10} \cdot 5 = 3$ $\qquad k_3 = (h/l_3(I_b/I_t) = 2{,}5$

$k_2 = (h/l_2)(I_b/I_t) = \frac{6}{12} \cdot 5 = 2{,}5$ $\qquad k_4 = k_1 = 3.$



Gambar VII, 8b

$$\varphi_{1a} = \frac{p}{24EI_b} l_1^3 - \frac{l_1}{3EI_b} M_{1a} = \frac{h}{3EI_t}(M_{1a} - M_{12}) \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\varphi_{12} = \frac{9p}{384EI_b} l_2^3 - \frac{l_2}{3EI_b} M_{12} - \frac{l_2}{6EI_b} M_{21} = -\frac{h}{3EI_t}(M_{1a} - M_{12}) \quad (2)$$

$$\varphi_{21} = \frac{7p}{384EI_b} l_2^3 - \frac{l_2}{6EI_b} M_{12} - \frac{l_2}{3EI_b} M_{21} = -\frac{h}{4EI_t}(M_{23} - M_{21}) \quad (3)$$

$$\varphi_{23} = \frac{p}{24EI_b} l_3^3 - \frac{l_3}{3EI} M_{23} - \frac{l_3}{6EI} M_{32} = \frac{h}{4EI_t}(M_{23} - M_{21}) \quad (4)$$

$$\varphi_{32} = \frac{p}{24EI_b} l_3^3 - \frac{l_3}{6EI_b} M_{23} - \frac{l_3}{3EI_b} M_{32} = \frac{h}{3EI_t}(M_{32} - M_{3b}) \quad (5)$$

$$\varphi_{3b} = -\frac{l_4}{3EI_b} M_{32} = -\frac{h}{3EI_t}(M_{32} - M_{3b}) \quad (6)$$

Dilipatkan dengan EI_b/l yang bersangkutan, dan diatur menulisnya:

$$\tfrac{1}{3} M_{1a} + \tfrac{1}{3}(M_{1a} - M_{12}) k_1 = \tfrac{1}{24} p l_1^2 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\tfrac{1}{3} M_{12} - \tfrac{1}{3}(M_{1a} - M_{12}) k_1 + \tfrac{1}{6} M_{21} = \tfrac{9}{384} p l_2^2 \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\tfrac{1}{6} M_{12} - \tfrac{1}{4}(M_{23} - M_{21}) k_2 + \tfrac{1}{3} M_{21} = \tfrac{7}{384} p l_2^2 \quad \ldots\ldots (3)$$

$$\tfrac{1}{3} M_{23} + \tfrac{1}{4}(M_{23} - M_{3b}) k_2 + \tfrac{1}{6} M_{32} = \tfrac{1}{24} p l_3^2 \quad \ldots\ldots (4)$$

$$\tfrac{1}{6} M_{23} + \tfrac{1}{3}(M_{32} - M_{3b}) k_3 + \tfrac{1}{3} M_{32} = \tfrac{1}{24} p l_4^2 \quad \ldots\ldots (5)$$

$$\tfrac{1}{3} M_{23} - \tfrac{1}{3}(M_{32} - M_{3b}) k_4 = 0 \quad \ldots\ldots (6)$$

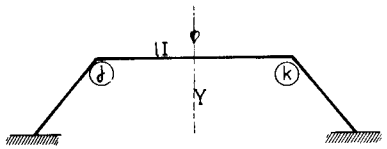
Diisi dengan bilangan:

$$
\begin{aligned}
4\,M_{1a} - 3\,M_{12} &= 12{,}50 \ldots\ldots\ldots 3 \times (1)\\
20\,M_{1a} + 18\,M_{12} + 4\,M_{21} &= 81{,}00 \ldots\ldots\ldots 24 \times (2)\\
4\,M_{12} + 23\,M_{21} - 15\,M_{23} &= 63{,}00 \ldots\ldots\ldots 24 \times (3)\\
15\,M_{21} + 23\,M_{23} + 4\,M_{32} &= 144{,}00 \ldots\ldots\ldots 24 \times (4)\\
M_{23} + 7\,M_{32} - 5\,M_{3b} &= 36{,}00 \ldots\ldots\ldots 6 \times (5)\\
4\,M_{32} + 3\,M_{3b} &= 0 \ldots\ldots\ldots 3 \times (6)
\end{aligned}
$$

Untuk membandingkan ssl, di belakang pendapat-pendapat ini, terkurung hasil-hasil cara Cross.

$M_{1a} = 9{,}63\ (9{,}639)$; $M_{1c} = 0{,}96\ (0{,}959)$; $M_{12} = 8{,}67\ (8{,}680)$
$M_{21} = 7{,}65\ (7{,}660)$; $M_{2d} = 2{,}20\ (2{,}189)$; $M_{23} = 9{,}86\ (9{,}849)$
$M_{32} = 8{,}04\ (8{,}052)$; $M_{3e} = 2{,}01\ (2{,}021)$; $M_{3b} = 6{,}02\ (6{,}031)$

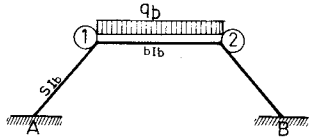
§9. **Kejadian simetris.** Ini berarti, bahwa bangunan serta pembebanannya bersifat simetris terhadap sesuatu sumbu Y. Jika sumbu-simetri Y ini membelah batang jk, maka $M_{jk} = M_{kj}$ berdasarkan deformasi-deformasinya. Jadi menurut istilah Cross justru tertulis $M_{jk} = -M_{kj}$ (gb VII, 9). Pada kejadian $M_{jk} - M_{kj} = 1$ maka bidang-momennya pada batang jk berupa persegi seluas l dan dengan demikian $\varphi_{jj,k} = \varphi_{kk,j} = l/2lEI$. Berhubung dengan ini di dalam menghitung faktor $\mu_{jk} = \mu_{kj}$ kita menggunakan besaran $2\,EI/l$. Kemudian kita cukup menjalankan hitungan distribusi-momen pada separoh bangunan saja, yaitu bagian sebelah kirinya titik-kumpul j atau kanannya titik-kumpul k. Satu dengan yang lain memudahkan pekerjaan hitungan (tetapi cara ini hanya berlaku pada kepada kejadian simetris seperti termaksud, terutama mengenai hitungan $\mu_{jk} = \mu_{kj}$).



Gambar VII, 9

Apabila bangunan hanya terdiri dari dua titik-kumpul saja, jadi j = 1 dan k = 2, cukup menjalankan pengrataan momen di titik 1 atau 2 saja, dan kita memperoleh pendapat secara **exakta**, bukan secara pendekatan, sebab tidak ada lagi momen-momen-induksi yang harus diperhitungkan.

Sebagai contoh, kita ambil portal-jepit simetris seperti pada gambar VII, 9a.
Kita menggunakan besaran $k = (s/b)\,(I_b/I_t)$



Gambar VII, 9a

$\mu_{1a} : \mu_{12} = 4\,I_t/s : 2\,I_b/b = 2 : k$

$\mu_{1a} = \mu_{2b} = 2/(2+k)$; $\mu_{12} = \mu_{21} = k/(2+k)$.

$M^o_{12} = q\,b^2/12 = -M^o_{21}$ (istilah Cross).

$M_{1a} = 0 - \mu_{1a}\,M^o_{12} = -kq\,b^2/6\,(2+k)$

$M_{12} = M^o_{12} - \mu_{12}M^o_{12} = +k\,q\,b^2/6\,(2+k)$; $M_{a1} = M_{b2} = \frac{1}{2}\,M_{1a}$.

Dengan cara Clapeyron, sedang $M_1 = M_2$ terdapat :

$M_1\,(s/4\,E\,I_t + b/3\,E\,I_b + b/6\,E\,I_b) = q\,b^3/24\,E\,I_b$.

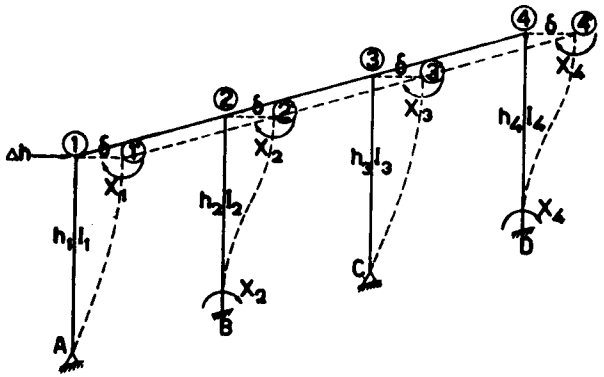
$M_1\,(\frac{1}{4}k + \frac{1}{2}) = \frac{1}{24}\,q\,b^2$; $M_1 = q\,b^2/6\,(k+2)$ dst.

C. GESERAN TUNGGAL

§ 10. Momen-momen ujung akibat goyangan.

Goyangan tunggal terdapat pada balok lurus terusan di atas tihang-tihang yang sejajar terhadap satu sama lain.

Goyangan δ berjalan ke arah tegak lurus terhadap sumbu-sumbu tihang,



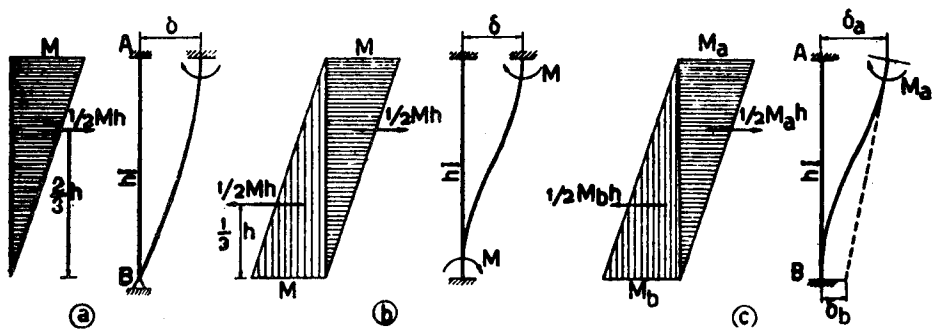
Gambar VII, 10

sehingga titik-titik hubungan antara balok dan tihang letak di atas garis lurus yang sejajar dengan sumbu balok semula (1'2'3'4'//1 2 3 4)

Sebelum bergoyang titik-titik hubungan dipegang sehingga *tidak dapat berputar.*

Sebagai akibat geseran secara demikian, maka terjadilah momen-momen pada kepala-kepala tiang dan juga pada kaki-kakinya jika ini terjepit.

Hubungan antara besarnya momen-momen ini dan besarnya geseran δ dapat dipelajari dengan perantaraan gambar VII, 11.



Gambar VII, 11

Gambar a. menunjukkan kaki tihang *bersendi.* Kepala tihang bergoyang sejauh δ (di sini ke kanan) menurut persamaan

$$\delta = \frac{1}{EI} \cdot \tfrac{1}{2} Mh \cdot \tfrac{2}{3}h = \tfrac{1}{3} Mh^2/EI \quad \text{atau} \quad M = 3\delta EI/h^2.$$

Gambar b. memperlihatkan kaki-tihang terjepit. Oleh karena keadaan simetris, momen-kepala = momen-kaki = *M.*

$$\delta = \frac{1}{EI}(\tfrac{1}{2}Mh \cdot \tfrac{2}{3}h - \tfrac{1}{2} Mh \cdot \tfrac{1}{3}h) = \tfrac{1}{6}Mh^2/EI \text{ atau } M = 6\,\delta\, EI/h^2$$

Setelah titik hubungan atas (A) berputar gambar c), momen ujung-tihang berobah besarnya, sehingga $M_a = M - \Delta M$ dan $M_b = M - \frac{1}{2}\Delta M$

$$\delta_a = (\tfrac{1}{2} M_b h \cdot \tfrac{2}{3}h - \tfrac{1}{2}M_a h \cdot \tfrac{1}{3}h)/EI = \tfrac{1}{6}(2M_b - M_a)\,h^2/EI = \tfrac{1}{6} Mh^2/EI$$

(tak berobah).

$$\delta_b = (\tfrac{1}{2} M_a h \cdot \tfrac{2}{3}h - \tfrac{1}{2} M_b h \cdot \tfrac{1}{3}h)/EI = \tfrac{1}{6}(2\,M_a - M_b)/EI.$$

Ternyata, bahwa goyangan *ke kanan* selaras dengan *momen-momen ujung positif* (berputar ke kanan terhadap titik-hubungannya).

Pendapat-pendapat di atas ini digunakan di dalam contoh menurut gambar VII, 10.

Jika kepala-kepala tihang digeser ke kanan sejauh δ, timbullah momen-momen ujung primar pada tihang-tihang yang besarnya kita sebut X dengan index menurut nomer-urutnya tihang. Jadi:

Tihang pertama **(A1)** : $X_1 = 3\delta\, EI_1/h_1^2$ (ujung atas)

Tihang kedua **(B2)** : $X_2 = \delta\, 6EI_2/h_2^2$ (ujung-ujung atas dan bawah)

Tihang ketiga **(C3)** : $X_3 = \delta\, 3EI_3/h_3^2$ (ujung atas)

Tihang keempat **(D4)** : $X_4 = \delta\, 6EI_4/h_4^2$ (ujung-ujung atas dan bawah)

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = I_1/h_1^2 : 2I_2/h_2^2 : I_3/h_3^2 : 2I_4/h_4^2$$

Jika $X_1 = X$ maka

$$X_2 = 2\,X(I_2/I_1)(h_1/h_2)^2$$
$$X_3 = X(I_3/I_1)(h_1/h_3^2)$$
$$X_4 = 2\,X(I_4/I_1)(h_1/h_4)^2$$

Pada saat menggeser, sedang kepala-kepala tihang tidak boleh berputar, maka pada *ujung-ujung balok tidak* timbul momen-momen primar.

Kemudian kita meratakan satu persatu titik-titik hubungan itu, sehingga terdapat momen-momen ujung yang besarnya ditentukan oleh besarnya X, jadi masing-masing adalah f(x). Momen-momen ujung ini kita sebut X .....

jadi $X_{1a}, X_{12}, X_{2b}, X_{b2}$ dan seterusnya.

$H_{X1} = X_{1a}/h_1$; $H_{XZ} = (X_{2b} + X_{b2})/h_2$; $H_{X3} = X_{3c}/h_3$; H_{X4}

$= (X_{4d} + X_{d4})/h_4$

Yang penting ialah menentukan besarnya koeffisien α ini, yang tidak dipengaruhi oleh muatan, jadi boleh dinamakan sesuatu *konstanta-bangunan.*

Di antara besaran-besaran $X_1, X_2 \ldots$ dipilih sebagai dasar perbandingan ialah yang terkecil. Kemudian kita mempelajari muatan yang bekerja. Titik-titik hubungan dianggap *tidak bergeser,* hanya berputar. Dengan cara seperti di dalam bagian B kita mendapat momen-momen ujung yang kita namakan: M'_{1a}, M'_{12}, dan seterusnya.

$H'_1 = M'_a/h_1$; $H'_2 = (M'_{2b} + M'_{b2})/h_2$; $H'_3 = M'_{3c}/h_3$; $H'_4 = (M'_{4d} + M'_{d4})/h_4$.

$H' = \Sigma H_. = H'_1 + H'_2 + H'_3 + H'_4$, berarti gaya mendatar yang di perlukan untuk mencegah goyangan, sedang H_X di atas berarti gaya yang justru menggeserkan. Pada beban vertikal (tiada komponenta mendatar), maka jumlah gaya mendatar pada kepala-kepala tihang harus nol.

Jadi $H_x + H' = 0$

$\alpha X + H' = 0$, yang menghasilkan besaran X dan kemudian besaran-besaran

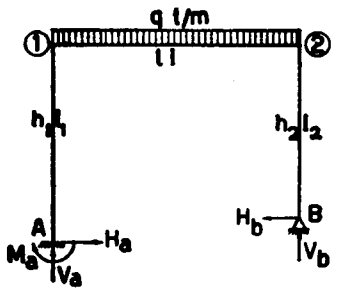
X_{1a}, X_{12}, dan seterusnya. Pada akhir-akhirnya,

$M_{1a} = M'_{1a} + X_{1a}$: $M_{12} = M'_{12} + X_{12}$ dan seterusnya.

Jika beban luar menghasilkan komponenta-komponenta mendatar yang bekerja pada kepala-kepala tihang dan yang jumlah aljabarnya = K (*positif* berarti *ke kanan*), maka persamaan menjadi : $\alpha X + H' = K$.

§ 11. **Contoh, portal dua kaki.**

Ditentukan: $h_1 : h_2 : l = 9 : 8 : 12$; $I_1 = \frac{1}{4} I$; $I_2 = \frac{3}{8} I$



Gambar VII, 12

A jepitan B sendi

$\mu_{1a} : \mu_{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} : 1 \cdot \frac{1}{12} = 1 : 3$

$\mu_{1a} = \frac{1}{4}$; $\mu_{12} = \frac{3}{4}$.

$\mu_{2b} : \mu_{21} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} : 1 \cdot \frac{1}{12} = 1 : 4$

$\mu_{2b} = \frac{1}{5}$; $\mu_{21} = \frac{4}{5}$

Akibat goyangan *ke kanan*

$X_1 : X_2 = 2\, I_1/h_1^2 : I_2/h_2^2$

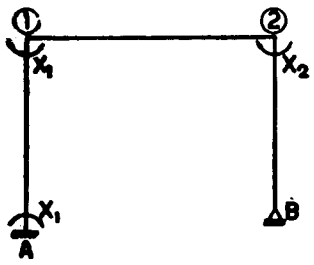
$X_1 = X_2 . 2(I_1/I_2)(h_2/h_1)^2 =$

$X_2 . 2 . \frac{9}{8}(\frac{8}{9})^2 = \frac{16}{9} X_2$.

$X_2 = X$; $X_1 = \frac{16}{9} = 1{,}778\, X$

Daftar pengrataan:

	A1	1A 1/4	12 3/4	21 4/5	2B 1/5
Mulai melepaskan titik-hubungan 1	+ 1,778 X	+ 1,778 X			+ 1,000 X
	− 0,222 X	− 0,444 X	− 1,334 X	− 0,667 X	
			− 0,133 X	− 0,266 X	− 0,067 X
	+ 0,016 X	+ 0,033 X	+ 0,100 X	+ 0,050 X	
$\Delta_1 M_{12} = -\frac{3}{4} . 1.778X = -1{,}334X$;			− 0,020 X	− 0,040 X	− 0,010 X
	+ 0,003 X	+ 0,005 X	+ 0,015 X	+ 0,008 X	
			− 0,003 X	− 0,006 X	− 0,002 X
(M_{21}) induksi = −0,667X, dst.		+ 0,001 X	+ 0,002 X		
X.. =	+ 1,575 X	+ 1,373 X	− 1,373 X	− 0,921 X	+ 0,921 X



Gambar VII, 12a

$H_{x1} = (X_{a1} + X_{1a})/h_1 = +(1{,}575 + 1{,}373) . \frac{8}{9} X/l = +3{,}931\, X/l$

$H_{x2} = .X_{2b}/h_2 = +0{,}921 . \frac{3}{2} X/l = +1{,}382\, X/l$

$H_x = H_{x1} + H_{x2} = 5{,}313\, X/l = \alpha . X/l$

Sekarang akibat muatan luar tanpa goyangan.

Ditentukan bahwa beban luar adalah penuh merata q *t/m'*

$M^o_{12} = -M^o_{21} = +\frac{1}{12} q l^2$.

Di dalam daftar pengrataan, kita tulis $\frac{1}{12} q l^2 = 1{,}000$.

Titik hubungan No 2 dilepaskan lebih dari satu

	A1	1A 1/4	12 3/4	21 4/5	2B 1/5
			+ 1,000	− 1,000	
			+0,400	+ 0,800	+ 0,200
	−0,175	−0,350	− 1,050	− 0,525	
			+ 0,210	+ 0,420	+ 0,105
	−0,026	−0,052	− 0,158	− 0,079	
			+ 0,032	+ 0,063	+ 0,015
	−0,004	−0,008	− 0,024	− 0,012	
			+ 0,005	+ 0,010	+ 0,002
		−0,001	− 0,001		
M' =	−0,205	−0,411	+ 0,411	−0,323	+ 0,323
X.. =	+ 0,100	+ 0,088	− 0,088	−0,059	+ 0,059
M =	− 0,105	−0,323	+ 0,323	− 0,382	+ 0,382

$H' = H'_1 + H'_2 = (M_{a1} + M'_{1a})/h_1 + M'_{2b}/h_2 = \{(-0{,}205 - 0{,}411)\frac{4}{9} . + 0{,}323 . \frac{3}{2}\} \frac{1}{l} = \frac{0{,}339}{l}$; $H_x + H' = 0$

$5{,}313\, X/l - 0{,}339/l = 0$; $X = 0{,}339/5{,}313 = 0{,}0635(\frac{1}{12} q l^2)$

Ini dapat diartikan demikian:

Supaya kepala-kepala tiang tetap tidak bergeser akibat muatan, harus dipegang oleh gaya mendatar sebesar H' yang ternyata negatif tandanya, jadi berarti *ke kiri*. Pada hakekatnya *gaya-pegang ini tidak ada, dan* supaya lenyap kita mengadakan gaya lawannya, yaitu $\alpha X/l$ tadi, dan yang bekerja *ke kanan*. Yang terakhir ini sesuai dengan pendapat positif untuk X.

Setelah X ini terdapat, maka kita hitung besaran-besaran ΔM yang kita tulis di bawah pendapat-pendapat M', kemudian dijumlahkan pada s.s.l. secara aljabar yang menghasilkan momen-momen ujung M. Pada akhirnya bilangan-bilangan ini masih harus dilipatkan dengan $\frac{1}{12} q l^2$.

Ujung	*A1*	*1A*	*12*	*21*	*2B*
$M/ql^2 =$	− 0,0089	− 0,0270	+ 0,0270	− 0,0319	+ 0,0319

$V_a = \{0{,}500 + (0{,}0270 - 0{,}0319)\}\, ql = (0{,}500 - 0{,}0049) ql = 0{,}4951\, ql$

$V_b = (0{,}500 + 0{,}00491)\, ql = 0{,}5049\, ql$

$H_a = (0.0089 + 0{,}0270) . \frac{4}{9} ql = 0{,}048\, ql$; $H_b = -0{,}0319 . \frac{3}{2} ql = -0{,}048\, ql$

$\Sigma M_a = -V_b l + H_b (h_1 - h_2) - M_{a1} + \frac{1}{2} ql^2 = (-0{,}5049 - 0{,}048 (\frac{3}{4} - \frac{8}{9}) + 0{,}0089 + 0{,}500)\, ql^2 \approx 0$.

Oleh karena hanya ada dua titik hubungan, kita juga boleh menggunakan rumus-rumus di dalam § 5.

$\alpha = \frac{1}{4}\mu_{12}\mu_{21} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{3}{20}$; $\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{3}{17}$; $1+\beta = \frac{20}{17}$

$X_{1a} = \frac{16}{9}X - \frac{1}{4}\cdot\frac{20}{17}\cdot\frac{16}{9}X + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{20}{17}X = (\frac{16}{9} - \frac{64}{153})X = +\ .\ \frac{70}{51}X = +\ 1{,}372\ X$

$X_{a1} = \frac{16}{9}X - \frac{1}{2}\cdot\frac{64}{153}X = +\frac{241}{153}X = +\ 1{,}575\ X$

$X_{12} = (-\frac{3}{4}\cdot\frac{20}{17} + \frac{3}{17})\frac{16}{9}X - (\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{20}{17} - \frac{116}{17})X = -\frac{70}{51}X = -1{,}372X$

$X_{21} = (-\frac{4}{5}\cdot\frac{20}{17} + \frac{3}{17})X - (\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{20}{17} - \frac{116}{17})\frac{16}{9}X = -\frac{47}{51}X = -0{,}922X$

$X_{2b} = X - \frac{1}{5}\cdot\frac{20}{17}X + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{20}{17}\cdot\frac{16}{9}X = +\frac{47}{51}X = +\ 0{,}922X.$

$H_x = (X_{a1} + X_{1a})/h_1 + X_{2b}/h_2 = \frac{4}{3}(\frac{70}{51} + \frac{241}{153})X/l + \frac{3}{2}\cdot\frac{47}{51}X/l =$
$= \frac{4877}{918}Xl = 5{,}313X/l.$

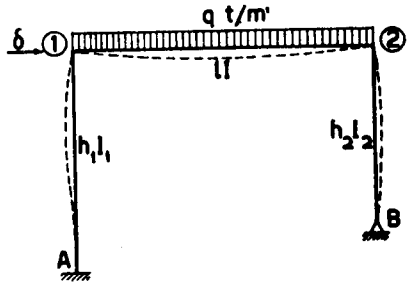
$M'_{1a} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{20}{17} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{20}{17} = -\frac{7}{17} = -0{,}412$; $M'_{a1} = \frac{1}{2}M'_{1a} = -\frac{7}{34} =$
$= -0{,}206.$

$M_{12} = 1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{20}{17} + \frac{3}{17} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{20}{17} - \frac{6}{17} = +\frac{7}{17} = +\ 0{,}412$

$M_{21} = -1 + \frac{4}{5}\cdot\frac{20}{17} - \frac{3}{7} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{20}{17} + \frac{6}{17} = -\frac{11}{34} = -0{,}324.$

$M_{2b} = \frac{1}{5}\cdot\frac{20}{17} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{20}{17} = +\frac{11}{34} = +\ 0{,}324.$

$H' = \frac{1}{l}(-\frac{21}{34}\cdot\frac{4}{3} + \frac{11}{34}\cdot\frac{3}{2}) = -\frac{23}{68}\cdot 1/l$; $H_x + H' = 0$; $X = \frac{918}{4877}\cdot\frac{23}{68} =$
$= 0{,}0637\ .\ (\frac{1}{12}ql^2)$ dan seterusnya.



Gambar VII, 12b

§ 11a. **Dengan persamaan-persamaan putaran-sudut.**

$M_{1a} = M_{12} = M_1$; $M_{21} = M_{2b} = M_2$
$k_1 = (h_1/l)\ (I/I_1) = \frac{3}{4}\cdot 4 = 3$
$k_2 = (h_1/l)\ (I/I_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2} = 3$
Jadi kebetulan $k_1 = k_2 = k = 3$

$\frac{1}{24}ql^3/\mathrm{EI} - \frac{1}{3}M_1l/EI - \frac{1}{6}M_2\,l/EI = \frac{1}{4}M_1h_1/EI_1 + \frac{3}{2}\delta/h_1$ ..... (1)

$\frac{1}{24}ql^3/\mathrm{EI} - \frac{1}{6}M_1l/EI - \frac{1}{3}M_2\,l/EI = \frac{1}{3}M_2h_2/EI_2 - \delta/h_2$ ..... (2)

$\frac{3}{2}M_1/h_1 - 3EI_1\,\delta/h_1 = M_2/h_2$ ..... (3)

(1) dan (2) dilipatkan dengan $24EI/l$

$8M_1 + 4M_2 + 6.3M_1 = ql^2 - 36\ EI\delta/lh_1$ ..... (1)

$4M_1 + 8M_2 + 8\ .\ 3\ M_2 = ql^2 + 24\ EI\delta/lh$ ..... (2)

$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}M_1 - \frac{3}{2}\cdot M_2 = 3\ E(\frac{1}{4}I)\ \delta l/(\frac{3}{4}l)^3$ ..... (3)

$26\ M_1 + 4\ M_2 = ql^2 - 48\ EI\ \delta/l^2$ ..... (1)

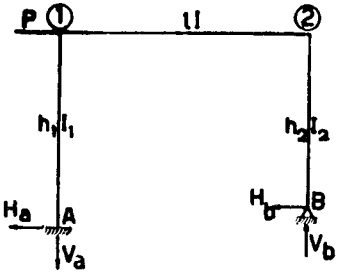
$4\ M_1 + 32\ M_2 = ql^2 + 54\ EI\ \delta/l^2$ ..... (2)

$18\ M_1 - 13{,}5\ M_2 = \quad 16\ EI\ \delta/l^2$ ..... (3)

$M_1 = 0{,}0276\ ql^2$; $M_2 = 0{,}032\ ql^2$; $EI\delta/l^2 = \frac{0.054}{16}ql^2$.

$EI_1\ \delta/h_1^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{16}{9}\cdot\frac{0.054}{16}ql^2 = 0{,}0015\ ql^2$; $M_a = -(\frac{1}{2}M_1 - 3EI_1\ \delta/h_1^2) = -$
$= -0{,}0090\ ql^2$, dst.

§ 12. **Beban mendatar P melalui kepala tihang.**



Gambar VII, 12c

Pendapat $H_x = 5{,}313\ X/l$ di dalam § 9 tetap berlaku.

Jika P bekerja *ke kanan,* sedang geseran dicegah, maka semua besaran-besaran

$M = 0$ dan $H' = 0$

$H_x + H' = P$; $5{,}313\ X/l = P$;

$X = Pl/5{,}313 = 0{,}188\ Pl$

$M_{a1} = \Delta X_{a1} = +\ 1{,}575\ X = +\ 0{,}296\ Pl$;
$M_{1a} = +\ 1{,}373X = +\ 0{,}258\ Pl = -\ M_{12}$
$M_{21} = -\ 0{,}921\ X = -\ 0{,}174\ Pl$; $M_{2b} = +\ 0{,}174\ Pl$.
$V_a = (M_{12} + M_{21})/l = -\ 0{,}432P$; $V_b = +\ 0{,}432\ P$; $V_a + V_b = 0$
$H_a = -(M_{a1} + M_{1a})/h_1 = -(0{,}296 + 0{,}258).\ \frac{4}{3}P = -\ 0{,}739\ P.$
$H_b = -\ M_{2b}/h_2 = -\ 0{,}174.\ \frac{3}{2}P = -\ 0{,}261\ P$; $H_a + H_b + P = 0$

Jumlah momen terhadap $A = Ph_1 - V_bl - H_b(h_2 - h_1) - M_{a1} =$
$= Pl(0{,}750 - 0{,}432 - 0{,}261/12 - 0{,}296) \simeq 0$

Dengan persamaan-persamaan putaran-sudut (lihat § 9a);

Kita mengisi $ql^2 = 0$ di dalam persamaan-persamaan (1) dan (2) dan mengisi:

$\frac{3}{2}M_1/h_1 - 3\ EI_1\ \delta/\ h_1^3 - M_2/h_2 = -P$ ..... (3)

Apabila P bekerja *ke kiri,* kita mendapat:

$H_x + H' = -\ P$; $X = -\ 0{,}188\ Pl$ dst.

§ 13. **Balok di atas tiga tihang**

$l = 10{,}0\ m$; $h_1 = h_3 = 3{,}0\ m$; $h_2 = 5{,}0\ m$

$I_1 = I_3 = \frac{1}{5} I_b$; $I_2 = \frac{1}{4} I_b$

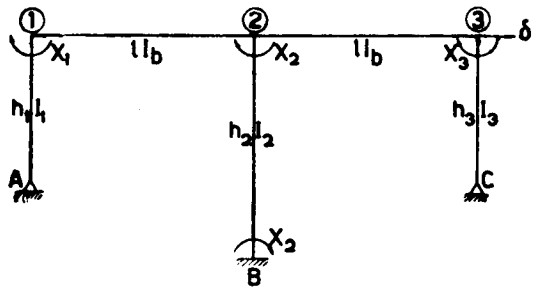
$\mu_{1a} : \mu_{12} = \frac{3}{3} . 1 : \frac{4}{10} . 5 = 1 : 2$

$\mu_{1a} = \mu_{3c} = \frac{1}{3}$; $\mu_{12} = \mu_{32} = \frac{2}{3}$

$\mu_{21} : \mu_{2b} : \mu_{23} =$

$\frac{4}{10} . 4 : \frac{4}{5} . 1 : \frac{4}{10} . 4 = 2 : 1 : 2$

$\mu_{21} = \mu_{23} = \frac{2}{5}$; $\mu_{2b} = \frac{1}{5}$.



Gambar VII, 13

Akibat goyangan ke kanan

$X_1 : X_2 = I_1/h_1^2 : 2\ I_2/h_2^2 = (I_1/I_2)(h_2/h_1)^2 : 2 = \frac{4}{5} . \frac{25}{9} : 2 = 10 : 9$

$X_1 = X_3 = +\ 1{,}000X$; $X_2 = +\ 0{,}900\ X$.

	1A 1/3	12 2/3	21 2/5	2B 1/5	23 2/5	32 2/3	3C 1/3
	+ 1,000 X			+ 0,900 X			+ 1,000 X
	− 0,333 X	− 0,667 X	− 0,333 X		− 0,333 X	− 0,667 X	− 0,333 X
		− 0,046 X	− 0,093 X	− 0,047 X	− 0,093 X	− 0,046 X	
	+ 0,015 X	+ 0,031 X	+ 0,015 X		+ 0,015 X	+ 0,031 X	+ 0,015 X
		− 0,006 X	− 0,012 X	− 0,006 X	− 0 012 X	− 0,006 X	
	+ 0,002 X	+ 0,004 X				+ 0,004 X	+ 0,002 X
X..=	+ 0,684 X	− 0,684 X	− 0,423 X	+ 0,847 X	− 0,423 X	− 0,684 X	+ 0,684 X

$X_{b2} = +\ 0{,}900\ X - \frac{1}{2}(0.900 - 0{,}847)\ X = +\ 0{,}874\ X.$

$H_x = \{\frac{2}{3} . 0{,}684 + \frac{1}{5}(0{,}847 + 0{,}874)\} X = 0{,}801\ X\ (t)$

Penjelasan: Kita melepaskan titik-titik hubungan 1 dan 3 bersamaan waktu yang menghasilkan masing-masing $\Delta_1\ X_{12} = \Delta_1\ X_{32} = -\frac{2}{3} X$. Ini semuanya menjalarkan $-\frac{2}{3} X$ pada titik 2 sehingga momen yang diratakan di sini menjadi $0.900 - \frac{2}{3}$) X = 0,233 yang kemudian menghasilkan $\Delta_1\ X_{21} = \Delta_1\ X_{23} = -\frac{2}{5} . 0{,}233\ X = -\ 0{,}093\ X$ dst.

Sekarang ditentukan beban penuh merata p = 1,2 *t/m'* diatas 12; $M^o_{12} = +\frac{1}{12} pl^2 = +\ 10{,}000\ tm$; $M^o_{21} = -\ 10{,}000\ t/m'$.

	1A 1/3	12 2/3	21 2/5	2B 1/5	23 2/5	32 2/3	3C 1/3
		+ 10,000	− 10,000				
	− 3,333	− 6,667	− 3,333				
		+ 2,667	+ 5,333	+ 2,667	+ 5,333	+ 2,667	
	− 0.889	− 1,778	− 0,899		− 0,889	− 1,778	− 0,889
		+ 0,356	+ 0,711	+ 0,356	+ 0,711	+ 0,356	
	− 0,119	− 0,237	− 0,119		− 0,119	− 0,237	− 0,119
		1 0,048	+ 0,095	+ 0,047	+ 0,095	+ 0,048	
	− 0,016	− 0,032	− 0,016		− 0,016	− 0,032	− 0,016
		+ 0,006	+ 0,013	+ 0,006	+ 0,013	+ 0,006	
	− 0,002	− 0,004				− 0,004	− 0,002
$M'_{..}$	− 4,359	+ 4,359	− 8,205	− 3,076	+ 5,128	+ 1,026	− 1,026

$M'_{b2} = +\ 1{,}538$

$H' = M'_{1a}/h_1 + (M'_{2b} + M'_{b2})/h_2 + M'_{3c}/h_3 = -\frac{1}{3}(4{,}359 + 1{,}026) + \frac{3}{2} . \frac{1}{5} . 3{,}076 = -\ 0{,}872\ t$

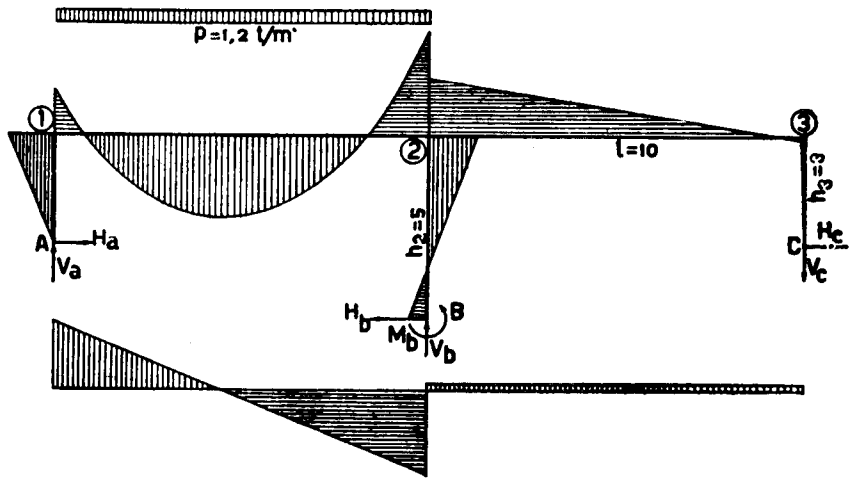
$H_x + H' = 0$

$0{,}801\ X - 0{,}872 = 0$

$X = 1{,}090\ tm.$

$X_{1a} = 0{,}684X = 0{,}744\ tm = -\ M_{x,12}$

$X_{21} = -\ 0{,}423\ X = -\ 0{,}460$, dst.



Gambar VII, 13a

Pendapat-pendapat ini dijumlahkan pada besaran $M_{..}$ yang menghasilkan $M_{..} = M'_{..} + M_{x..}$ (lihat daftar di bawah).

	1A	12	21	2B	23	32	3C
M' =	— 4,359	+ 4,359	— 8,205	+ 3,076	+ 5,128	+ 1,026	— 1,026 tm
$X_{..}$ =	+ 0,744	— 0,744	— 0,460	+ 0,921	— 0,460	— 0,744	+ 0,744 tm
M =	— 3,615	+ 3,615	— 8,665	+ 3,997	+ 4,668	+ 0,282	— 0,282 tm

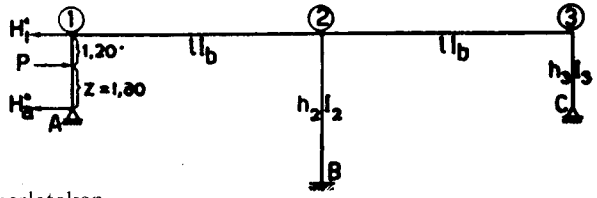
$$M_{b2} = 1{,}538 + 0{,}874\,X = +\,2{,}488\ tm.$$

$Q_{12} = \frac{1}{2}\,pl + (M_{12} + M_{21})/l = 6{,}000 - 0{,}505 = +\,5{,}495\ t.$
$Q_{21} = -\frac{1}{2}\,pl + (M_{12} + M_{21})/l = -6{,}000 - 0{,}505 = -6{,}505\ t.$
$Q_{23} = O + (M_{23} + M_{32})/l = +\,0{,}495\ t.$
$Q_{32} = O + (M_{23} + M_{32})/l = +\,0{,}495\ t.$
$V_a = Q_{12} = 5{,}495\ t;\ V_b = Q_{23} - Q_{21} = 7{,}000\ t;\ V_c = -Q_{32} = -0{,}495\ t;$
$\Sigma V = pl.$
$H_a = -M_{1a}/h_1 = +\frac{1}{3} \cdot 3{,}615 = +\,1{,}205\ t.$
$H_b = -(M_{2b} + M_{b2})/h_2 = -\frac{1}{5}(3{,}977 + 2{,}488) = -\,1{,}299\ t.$
$H_c = -M_{3c}/h_3 = +\frac{1}{3} \cdot 0{,}282 = +\,0{,}094\ t;\ \Sigma H \simeq 0$
$\Sigma M_b = V_a\,l + H_a(h_2 - h_1) + H_c(h_2 - h_3) - V_c \cdot l - \frac{1}{2}\,pl^2 - M_{b2} =$
$= 54{,}95 + 2{,}410 + 0{,}188 + 4{,}95 - 60 - 2{,}488 \simeq 0$

§ 14. Muatan mendatar.

Gaya mendatar P = 5,0 t ke kanan bekerja pada tihang A1 setinggi 1,80 m

$H_1^o = Pz/h_1 = 3{,}0\ t(-)$
$H_a^o = P - H_1^o = 2{,}0\ t(-)$



Gambar VII, 14

Berarti reaksi-reaksi perletakan pada batang A1 secara *statis-tertentu tanpa* geseran; bekerja ke-kiri atau *negatif.*

Faktor-faktor untuk M_X (di muka X) dan H_X tidak berobah Jadi H_X = 0,801 X. (pag. 422)

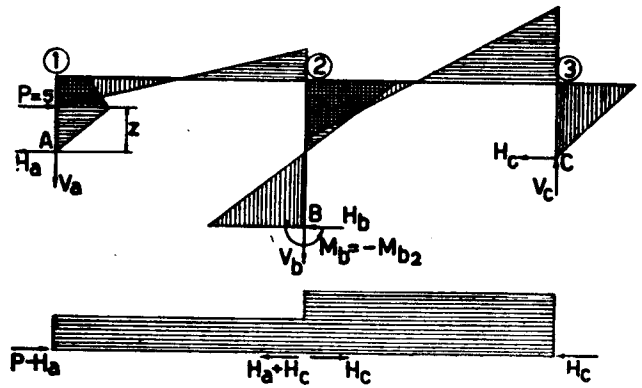
Ujung	1 A	12	21	2B	23	32	3C	B2
M_x/X	+ 0,684	— 0,684	— 0,423	+ 0,847	— 0,423	— 0,684	+ 0,684	+ 0,874

$$M_a^o = -\frac{P}{2h_1^2}\,z\,(h_1^2 - z^2) = -\frac{5}{18} \cdot 1{,}80\,(9 - 3{,}24) = -\,2{,}880\ tm.$$

Daftar pengrataan:

	1A 1/3	12 2/3	21 2/5	2B 1/5	23 2/5	32 2/3	3C 1/3	B2 —
	— 2,880							
	+ 0,960	+ 1,920	+ 0,960					
		— 0,192	— 0,384	— 0,192	— 0,384	— 0,192		— 0,096
	+ 0,064	+ 0,128	+ 0,064		+ 0,064	+ 0,128	+ 0,064	
		— 0,026	— 0,051	— 0,026	— 0,051	— 0,026		— 0,013
	+ 0,009	+ 0,017	+ 0,009		+ 0,009	+ 0,017	+ 0,009	
		— 0,003	— 0,007	— 0,004	— 0,007	— 0,003		— 0,002
	+ 0,001	+ 0,002				+ 0,002	+ 0,001	
$M'_{..}$ =	— 1,846	+ 1,846	+ 0,591	— 0,222	— 0,369	— 0,073	+ 0,073	— 0,111
$M_{x..}$ =	+ 3,120	— 3,120	— 1,935	+ 3,870	— 1,935	— 3,120	+ 3,120	+ 4,000
M (tm)	+ 1,274	— 1,276	— 1,344	+ 3,646	— 2,304	— 3,193	+ 3,193	+ 3,889

$H' = (M'_{1a} + M'_{3c})/h_1 + (M'_{2b} + M'_{b2})/h_2 =$
$= -\frac{1}{3}(1{,}846 - 0{,}073) - \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot 0{,}222 =$
$= -\,0{,}658\ t.$



Gambar VII, 14a

$H_x + H''_1 + H' = 0$
$0{,}801\,X - 3{,}000 - 0{,}658 = 0$
$X = 4{,}573\ tm.$

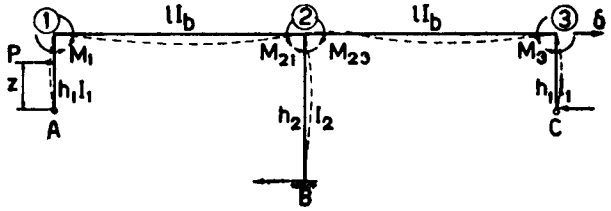
$M_{x,1a} = +\,0{,}648\,X = +\,3{,}120\ tm$, dan seterusnya. Hasil-hasil M_X ini ditulis di bawah besaran-besaran M'ybs, kemudian dijumlahkan (lihat daftar atas).

$Q_{12} = Q_{21} = (M_{12} + M_{21})/l = -\,0{,}262\ t;\ Q_{23} = Q_{32} = (M_{23} + M_{32})/l =$
$= -\,0{,}550\ t.$
$V_a = Q_{12} = -\,0{,}262;\ V_b = Q_{23} - Q_{21} = -\,0{,}288\ t;\ V_c = -Q_{32} =$
$+\,0{,}550\ t;\ \Sigma V = 0$

$H_a = H_a^o - M_{1a}/h_1 = -(2{,}000 + 0{,}425)\,t = -2{,}425\,t.$
$H_b = -(M_{2b} + M_{b2})/h_2 = -1{,}507\,t;$
$H_c = -M_{3c}/h_3 = -1{,}064\,t;\ P + \Sigma H = 0$
$\Sigma M_b = P(z + h_2 - h_1) + V_a\,l - V_c\,.\,l + H_a(h_2 - h_1) + H_c(h_2 - h_3) -$
$- M_{b2} = 5{,}380 - 0{,}262.10 - 5{,}50 - 2{,}425.2 - 1{,}604.2 - 3{,}889 =$
$= 19{,}00 - 2{,}62 - 5{,}50 - 4{,}85 - 3{,}208 - 3{,}889 = \approx 0$

$$M_d = M_d^o + (z/h_1)\,M_{1a} = 3{,}60 + \frac{1{,}8}{3{,}0}\,.\,1{,}274 = 4{,}364\ tm.$$

Batang 12 menahan gaya normal tekan $N_{12} = N_{21} = P - H_a = H_b + H_c'$
Batang 23 menahan gaya normal tekan $N_{23} = N_{32} = H_c = P - H_a - H_b$



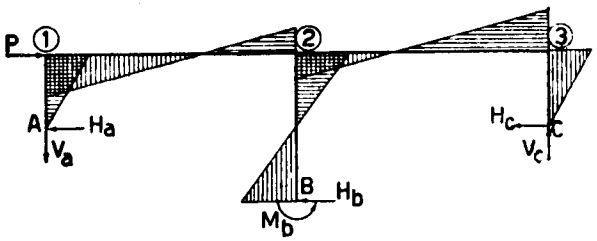
Gambar VII, 14b

Besaran-besaran H diambil nilai mutlaknya.
Dicocokkan dengan cara *persamaan tiga momen.*

$-\frac{1}{3}M_1 l/EI_b - \frac{1}{6}M_{21} l/EI_b = \frac{1}{3}M_1 h_1/EI_1 - \frac{1}{6}Pz(h_1^2 - z^2)/EI_1 + \delta/h_1$ (1)
$-\frac{1}{6}M_1 l/EI_b - \frac{1}{3}M_{21} l/EI_b = \frac{1}{4}(M_{21} - M_{23})\,h_2/EI_2 - \frac{3}{2}\delta/h_2$ ..... (2)
$-\frac{1}{3}M_{23}\,l/EI_b - \frac{1}{6}M_3\,l/EI_b = -\{\frac{1}{4}(M_{21} - M_{23})\,h_2/EI_2 - \frac{3}{2}\delta/h_2\}$ .... (3)
$-\frac{1}{6}M_{23}\,l/EI_b - \frac{1}{3}M_3\,l/EI_b = \frac{1}{3}M_3\,h_1/EI_1 - \delta/h_1$ ..... (4)
$Pz/h_1 + M_1/h_1 - \frac{3}{2}(M_{21} - M_{23})/h_2 - 3\,EI_2\delta/h_2^3 - M_3/h_3 = 0$ .... (5)

§ 14a. **Khusus: P melalui kepala tihang (ke kanan).**

$H_x = 0{,}801\,X$ (tetap)
$H' = 0;\ M' = 0$
$H_x + H' = P$
$0{,}801\,X = P;\ X =$
1,25 tm



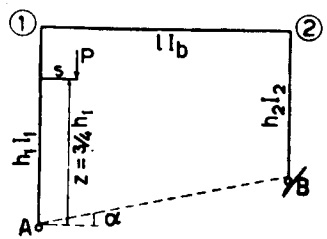
Gambar VII, 14c

	1A	12	21	2B	23	32	3C	B2
M_x/X =	+ 0,684	– 0,684	– 0,423	+ 0,847	– 0,423	– 0,684	+ 0,684	+ 0,874
$M/P(m)$ =	+ 0,855	– 0,855	– 0,529	+ 1,059	– 0,529	– 0,855	+ 0,855	+ 1,093

$V_a = (M_{12} + M_{21})/l = -0{,}138\,P;\ V_b = -(M_{12} + M_{21})/l +$
$+ (M_{23} + M_{32})/l = 0$
$V_c = -(M_{23} + M_{32})/l = +0{,}138\,P$
$H_a = -M_{1a}/h_1 = -0{,}285\,P;\ H_b = -(M_{2b} + M_{b2})/h_2 = -0{,}430\,P$
$H_c = -M_{3c}/h_1 = -0{,}285\,P;\ \Sigma H + P = 0$
$\Sigma M_b = Ph_2 + V_a l - V_c l + (H_a + H_c)(h_2 - h_1) - M_{b2} =$
$= P(5{,}00 - 1{,}38 - 1{,}38 - 1{,}14 - 1{,}093) \approx 0$

§ 15. Momen-konsol.

Portal dua tihang bersendi; tidak simetris.



Gambar VII, 15

$h_1 : h_2 : l = 4 : 3 : 5$
$I_1 : I_2 : I_b = 3 : 2 : 5$
$\mu_{1a} : \mu_{12} = 3\,.\,\frac{3}{4} : 4\,.\,\frac{5}{5} = 9 : 16$
$\mu_{1a} = 9/25;\ \mu_{12} = 16/25$
$\mu_{21} : \mu_{2b} = 4\,.\,\frac{5}{5} : 3\,.\,\frac{2}{3} = 2 : 1.$
$\mu_{21} = 2/3;\ \mu_{2b} = 1/3$

Geseran ke kanan:
$X_1 = X$
$X_2 = (I_2/I_1)(h_1/h_2)^2\,X = \frac{32}{27}X$

Oleh karena hanya ada dua titik hubungan saja, kita dapat menggunakan rumus-rumus di dalam B § 5.

$\varkappa = \frac{1}{4}\mu_{12}\mu_{21} = \frac{1}{4}\,.\,\frac{16}{25}\,.\,\frac{2}{3} = \frac{8}{75};\ \beta = \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{8}{67};\ 1 + \beta = \frac{75}{67}$

$X_{1a} = X - \mu_{1a}(1+\beta)X + \frac{1}{2}\mu_{1a}\,.\,\mu_{21}(1+\beta)\,.\,\frac{32}{27}\,X = (\frac{40}{67} + \frac{32}{201})\,X = \frac{152}{201}X$
$X_{12} = \{-\mu_{12}(1+\beta) + \beta\}\,X - \{\frac{1}{2}\mu_{21}(1+\beta) - 2\beta\}\,\frac{32}{27}\,X =$
$= -(\frac{40}{67} + \frac{32}{201})\,X = -\frac{152}{201}X$
$X_{21} = \{-(\frac{1}{2}\mu_{12}(1+\beta) + 2\beta\} + \{-\mu_{21}(1+\beta) + \beta\}\,\frac{32}{27}\,X =$
$= -(\frac{8}{67} + \frac{42}{67}\,.\,\frac{32}{27})\,X = -\frac{520}{603}X$
$X_{2b} = \frac{32}{27}X + \frac{1}{2}\mu_{2b}\mu_{12}(1+\beta)\,X - \mu_{2b}(1+\beta)\,\frac{32}{27}\,X = +\frac{520}{603}X$
$H_x = X_{12}/h_1 + X_{2b}/h_2 = (\frac{152}{201}\,.\,\frac{5}{4} + \frac{520}{603}\,.\,\frac{5}{3})\,X/l = \frac{1310}{1809}\,X/l = 2{,}382X/l$

Beban P pada konsol yang letaknya $z = \frac{3}{4}h_1$ di atas kaki tihang pertama. Lengan momen = s. Jadi M_c = Ps. Kemudian lihat B, § 4 gb. 5 kejadian 8:

$M_{1a}^o = -\frac{1}{2}M_c(1 - 3z^2/h_1^2) = \frac{11}{32}Ps = 1;\ H_1^o = -Ps/h_1 = -\frac{5}{4}Ps/l =$
$= -\frac{5}{4}\,.\,\frac{32}{11}\,.\,\frac{1}{l} = -\frac{40}{11}\,.\,\frac{1}{l}$

$M'_{1a} = 1 - \frac{9}{25} \cdot \frac{75}{67} = \frac{40}{67}$; $M'_{12} = -\frac{16}{25} \cdot \frac{75}{67} + \frac{8}{75} = -\frac{40}{67}$

$M'_{21} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{16}{25} \cdot \frac{75}{67} + \frac{16}{67} = -\frac{8}{67}$; $M'_{2b} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{25} \cdot \frac{75}{67} = \frac{8}{67}$

$H' = M'_{1a}/h_1 + M'_{2l}/h_2 = (\frac{40}{67} \cdot \frac{5}{4} + \frac{8}{67} \cdot \frac{5}{3}) \frac{1}{l} = \frac{190}{201 l}$

$H_x + H' + H_o = 0$

$\frac{4310}{1809} X + \frac{190}{201} - \frac{40}{11} = 0$; $X = \frac{1809}{4310} \cdot \frac{5950}{201.11} = \frac{9.595}{431.11} (\frac{11}{82} Ps)$

$M_{1a} = (\frac{40}{67} + \frac{162}{201} \cdot \frac{9.596}{431.11}) \frac{11}{82} Ps = \frac{215}{431} Ps.$

$M_{12} = -M_{1a} = -\frac{215}{431} Ps.$

$M_{2b} = +\frac{162}{431} Ps.$

$V_a^o = P$; $V_b^o = 0$

$V_a = V_a^o + (M_{12} + M_{21})/l = P(1 - \frac{377}{431} s/l)$

$V_b = -(M_{12} + M_{21})/l = \frac{377}{431} Ps/l$

$V_a + V_b = P.$

$H_a^o = + Ps/h_1 = + \frac{5}{4} Ps/l.$

$H_a = H_a^o - M_{1a}/h_1 = \frac{5}{4}(1 - \frac{215}{431}) Ps/l = \frac{270}{431} Ps/l.$

$H_b = -M_{2b}/h_2 = \frac{5}{8} M_{2b}/l = -\frac{5}{8} \cdot \frac{162}{431} Ps/l = -\frac{270}{431} Ps/l$; $\Sigma H = 0$

$M_{c1} = -\frac{1}{4} Ps - \frac{3}{4} M_{1a} = -\frac{269}{431} Ps$; $M_{ca} = -\frac{3}{4} Ps + \frac{3}{4} M_{1a} = -\frac{162}{431} Ps = H_a z.$

$M_{cd} = + Ps$; $\Sigma M_c = 0.$

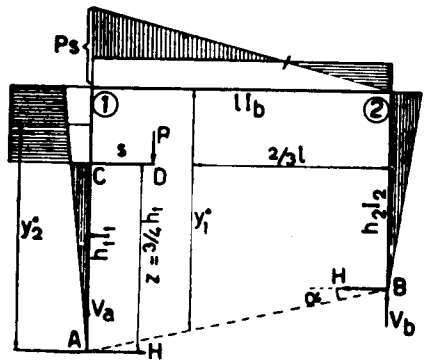
§ 15a. Dihitung sebagai pelengkung dua sendi.

$\delta_{hh} = \int y^2 \, ds/EI$; $\operatorname{tg} \alpha = (h_1 - h_2)/l = \frac{1}{5}$

Untuk tiang-tiang diisi: $ds = dy$.

Untuk balok diisi : $ds = dx = dy/\operatorname{tg} \alpha = 5 \, dy$

$$\delta_{hh} = \int_o^{h_1} y^2 \, dy/EI_1 + \int_o^{h_2} y^2 \, dy/EI_2 + 5 \int_{h_2}^{h_1} y^2 \, dy/EI_b = \frac{1}{3E} \left\{ h_1^3/I_1 + h_2^3/I_1 + \frac{5}{I_b} (h_1^3 - h_2^3) \right\}$$



Gambar VII, 15a

$EI_b \delta_{hh} = \delta'_{hh} = \frac{1}{8} \{ \frac{20}{6} h_1^3 - \frac{5}{2} h_2^3 \} = \frac{431}{450} l^3$

$\delta_h^o = \frac{1}{2} Psl \, . \, y_1^o/EI_b + Ps(h_1 - z) \, y_2^o/EI_1$

$y_1^o = h_2 + \frac{3}{8} l \operatorname{tg} \alpha = \frac{11}{16} l$; $y_2^o = \frac{7}{8} h_1 = \frac{7}{10} l$; $h_1 - z = \frac{1}{4} h_1 = \frac{1}{5} l.$

$EI_b \, \delta_h^o = (\delta_h^o)' = (\frac{1}{2} \cdot \frac{11}{16} + \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{8}) Ps \, l^2 = \frac{3}{5} Ps \, l^2.$

$H = (\delta_h^o)'/(\delta_{hh})' = \frac{3}{5} \cdot \frac{450}{431} Ps/l = \frac{270}{431} Ps/l = H_a = H_b$

$V_a^o = P(1 - s/l)$; $V_b^o = Ps/l.$

$V_a = V_a^o + H \operatorname{tg} \alpha = P\{1 - (1 - \frac{54}{431}) s/l\} = P(1 - \frac{377}{431} s/l)$

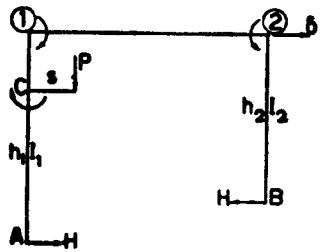
$V_b = V_b^o - H \operatorname{tg} \alpha = \frac{377}{431} Ps/l.$

$M_1 = Ps - Hh_1 = Ps(1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{270}{431}) = \frac{215}{431} Ps.$

$M_{c1} = Ps - H \frac{3}{4} h_1 = Ps(1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{270}{431}) = \frac{269}{431} Ps.$

$M_{ca} = H \, . \, \frac{3}{4} h_1 = \frac{162}{431} Ps$; $M_2 = Hh_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{270}{431} Ps = \frac{162}{431} Ps.$

§ 16. Dengan persamaan putaran sudut.



Gambar VII, 15b

$\varphi_{1a}^o = -\frac{1}{6EI_1} Psh_1(1 - 3z^2/h_1^2) = \frac{11}{96} Psh_1/EI_1$

$-\frac{1}{3} M_1 l/EI_b - \frac{1}{6} M_2 l/EI_b = \frac{11}{96} Ps \, h_1/EI_1 + \frac{1}{3} M_1 h_1/EI + \delta/h_1$ ..... (1)

$-\frac{1}{6} M_1 l/EI_b - \frac{1}{3} M_2 l/EI_b = \frac{1}{3} M_2 h_2/EI_2 - \delta/h_2$ ..... (2)

$(M_1 + Ps)/h_1 = M_2/h_2 = H$ ..... (3)

$-\frac{1}{3} M_1 - \frac{1}{6} M_2 = \frac{11}{72} Ps + \frac{4}{9} M_1 + \frac{5}{4} EI\delta_b/l^2$ ..... (1)

$-\frac{1}{6} M_1 - \frac{1}{3} M_2 = \frac{1}{2} M_2 - \frac{6}{5} EI_b/l^2$ ..... (2)

$\frac{5}{4} M_1 - \frac{5}{3} M_2 = -\frac{5}{4} Ps$ ..... (3)

$\frac{28}{9} M_1 + \frac{2}{3} M_2 = -\frac{11}{16} Ps - 5EI_b \, \delta/l^2$ ..... (1)

$\frac{1}{2} M_1 + \frac{5}{2} M_2 = + 5EI_b \, \delta/l^2$ ..... (2)

$\frac{65}{18} M_1 + \frac{19}{6} M_2 = -\frac{11}{16} Ps$ ..... (1) + (2)

$\frac{1}{4} M_1 - \frac{1}{3} M_2 = \frac{1}{4} Ps$ ..... (3)

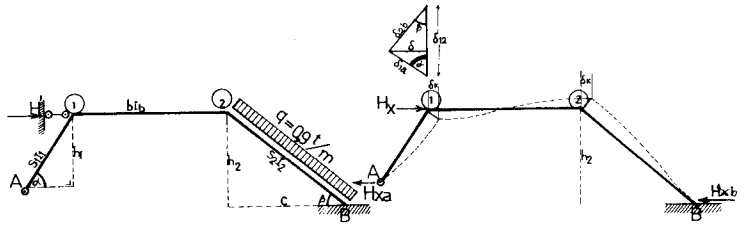
$M_1 = -\frac{215}{431} Ps$. (bekerja positif pada balok)

$M_2 = \frac{162}{431} Ps$ (bekerja negatif pada balok)

§ 17. **Portal dengan tihang serong (gb VII, 16)**

Kita ambil bangunan seperti di dalam bab IV, § 37, gb 69 a). A 1 = s_1=5m; 1 – 2 = b = 10 m; 2 B = S_2 = 10 m; tg α = 4/3; tg β = 3/4; $I_1 : I_2 : I_b$ = 2 : 3 : 3.

Jadi a = 3 m; h_1 = 4 m; c = 8 m; h_2 = 6 m; l = a+b+c = 21 m.



Gambar VII, 16

Beban merata penuh sebesar q = 0,9 t/m ⊥ tihang B_2, ke arah dalam.

$\mu_{1a} : \mu_{12} = 3\ I_1 / s_1 : 4\ I_b/b = 1 : 1 : \mu_{1a} = \mu_{12} = 0{,}5$

$\mu_{21} : \mu_{2b} = 4\ I_b/b : 4\ I_2/s_2 = 1 : 1 ; \mu_{21} = \mu_{2b} = 0{,}5.$

I. **Akibat goyangan ke kanan.** Menurut diagram Williot pada gambar kanan atas terdapat:

$\delta_{1a} : \delta_{12} : \delta_{2b} = \delta / \sin\alpha : \delta\ (\text{cotg}\,\alpha + \text{cotg}\,\beta) :$

$\delta/\sin\beta = 5/4 : 25/12 : 5/3 = 3 : 5 : 4.$

Momen-momen ujung primar : $X^\circ_{1a} : X^\circ_{12} : X^\circ_{2b} = I_1\ \delta_{1a}/s_1^2 : -2\ I_b\ \delta_{12}/b_1^2$

$2\ I_2\ \delta_{12b}/s_2^2 = 4 : -5 : 4.$

$X^\circ_{1a} = X;\ X^\circ_{12} = X^\circ_{21} = -1{,}250\ X\ ;\ X^\circ_{2b} = X^\circ_{b2} = X$

	1A 0,5	12 0,5	21 0,5	2B 0,5	B2 —
$X^\circ_{..}$	+ 1,000X	−1,250X	−1,250x	+1,000x	+1.000x
	+ 0,125"	+0,125"	+0,125"	+0,125"	+0,063"
		−0,0631	+0,063		
	+ 0,031"	0,031"	−0,031"	−0,031"	−0,016"
		−0,016"	−0,016"		
	+0,008"	+0,008"	+0,008"	+0,008"	+0,004"
		+0,004"	+0,004"		
	−0,002"	−0,002"	−0,002"	−0,002"	−0,001"
$X_{..}$	+ 1,100X	−1,100x	−1,100x	+1,100X	+1,050x

$V_{xa} = V_{x1} = (X_{12} + X_{21})/b = -0{,}220\ X.$

$H_{xa} = -X_{1a}/h_1 + V_{xa}\ \text{cotg}\,\alpha = -0{,}440\ X.$

$M_b = 0$

$H_x \cdot h_2 + V_{xa} \cdot l + H_{xa} \cdot (h_2 - h_1) - X_{b2} = 0$

$6\ H_x + 4{,}62\ X - 0{,}880\ X - 1{,}050\ X = 0$

$H_x = 1{,}092\ X$ (exakta 131/120. X).

II. **Akibat beban, tanpa goyangan.**

$M^\circ_{2b} = +\ q\ s_2^2 / 12 = 0{,}9 \cdot 100/12 = 7{,}5\ \text{tm} = -M^\circ_{b2}$

	1A 0,5	12 0,5	21 0,5	2B 0,5	B2 —
M° tm		− 1,875	− 3,750	+ 7,500	−7,500
	− 0,938	− 0,938	− 0,469	− 3.750	−1.875.
		− 0,117	− 0,234	− 0,234	− 0,117
	+ 0,058	+ 0,059	+ 0,029		
		− 0,007	− 0,014	− 0,007	
	+ 0,004	+ 0,003			
$M'_{..}$ tm	+ 1,000	− 1,000	− 3,500	+ 3,500	− 9.500
$X_{..}$"	− 7,744	+ 7,744	+ 7,744	− 7,744	− 7,392
$M_{..}$ tm	− 6.744	+ 6,744	+ 4,244	− 4,244	− 16,892

$V'_a = V'_1 =)\ (M'_{12} + M'_{21})/b = -0{,}450$ t.

$Ha' = -H'_{1a}/h_1 + V'_a\ \text{cotg}\,\alpha = -0{,}588$ t.

Lagi $\Sigma M_b = 0$

$H'h_2 + V'_a\ 1 + H'_a\ (h_2 - h_1) - M'_{b2} - M'_{b2} - \tfrac{1}{2}\ q\ s_2^2 = 0$

$6\ H' - 9.450 - 1{,}176 + 9{,}500 - 45 = 0$

$H' = 7{,}688$ t.

$H_x + H' = 1{,}092\ X + 7{,}688 = 0$

$X = -\ 7{,}04$ tm, berarti bergoyang ke kiri. akibat beban

$V_a = V_1 = (M_{12} + M_{21})/b = 1{,}099$ t; $V_b = q\ s_2 \cos\beta - V_a = 7{,}200 - 1{,}099$ $= 6.101$ t.

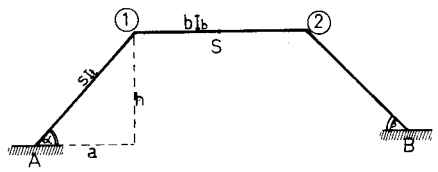
$H_a = -\ M_{1a}/h_1 + V_a \operatorname{Cotg}\alpha = 1{,}686 + 0{,}824 = 2{,}510$ t

$H_b =)-\ (M_{b2} + M_{2b})\ /h_2 - V_b \operatorname{cotg}\beta + \tfrac{1}{2}\ q\ s_2^2/h_2 = 1/6\ (21{,}136 -$ $6{,}101.3 + 45) = 2{,}89$ t.

$H_a + H_b = q\ s_2 \sin\beta = 5{,}4$ t (sebagai kontrol).

Bandingkan juga dengan bab I, § 37.

§ 18. **Goyangan pada portal simetris.** Di dalam bab VI, § 62 sudah di – terangkan berdasarkan alasan simetirs, bahwa pada goyangan yang disebabkan oleh gaya mendatar pada salah satu kepala tihang. titik-tengah S palangnya (di sini palang 1–2) tidak naik/turun serta tidak menerima momen, jadi boleh dianggap seolah-olah ada sendi di S itu.



Gambar VII, 17

Ini kita pergunakan di dalam menghitung faktor-distribusi $\mu_{12} = \mu_{21}$, yaitu :

$\mu_{1a} : \mu_{12} = 4\ I/s : 31_b/\ 0{,}5\ b = 2 : 3\ k$, jika $k = (s/b)\ I_b/I_t$.

Pada goyangan ke kanan, terdapat

$X^\circ_{1a} : X^\circ_{12} = I_t/s^2 \sin\alpha : I_b\ (\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha)/b^2$

Ambillah sebagai contoh $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$; $b/s = 1{,}2$; $k = 3$.

$\mu_{1a} : \mu_{12} = 2 : 3k = 2 : 9$; $\mu_{1a} = 2/11$; $\mu_{12} = 9/11$; $X^\circ_{1a} : X^\circ_{12} =$ $I_t/s^2 \sin\alpha : -\ 2(I_b/b^2) \operatorname{tg}\alpha = b/s : -\ 2\ k \cos\alpha = 1{,}2 : -\ 2.3.4/5$ $= 1 : -4$; $X^\circ_{a1} = X^\circ_{1a} = X^\circ_{2b} 2 = X^\circ_{2b} = +\ X$; $X^\circ_{21} = -\ 4\ X$.

Kita cukup meratakan satu titik-kumpul saja, yaitu titik 1 atau 2, yang tidak menimbulkan momen-momen induksi lagi, jadi pendapatnya secara

	A1 = B2	1A = 2B 2/11	12 = 21 9/11
$X^\circ_{..}$	+ X + 3/11"	+ X + 6/11"	– 4 X + 27/11
X.. atau	+ 14/11 X + 1,293 X	+ 17/11 X + 1,545 X	– 17/11 X – 1,545 X

$V_{xa} = V_{x1} = 2\ X_{12}/b = -2X_{1a}/b = -V_{xb}$

$H_{xa} = -\ (X_{a1} + X_{1a})/h + V_{xa} \operatorname{cotg}\alpha = H_{x}b.$

$H_{x2} = -\ (H_{xa} + H_{xb}) = -\ 2\ H_{xa} =$

$2/h\ (X_{a1} + X_{1a} + X_{1a}\ a/b).$

Sebagai akibat dari pembebanan, koeffisien - koeffisien μ harus dihitung secara biasa.

Lebih mudah lagi, jika tihang-tihangnya bersendi. Kita tidak perlu menjalarkan hitungan distribusi-momen, tidak perlu menentukan $X^\circ_{1a} : X^\circ_{12}$. Sebagai hasil pengrataan momen, selalu terdapat $X_{1a} = -\ X_{12}$, jadi boleh kita tulis: $X_{1a} = X_{2b} = +\ X$; $X_{12} = X_{21} = -\ X$ (goyangan ke kanan).

	1A = 2B	12 = 21
X..	+ X	– X

$V_{xa} = V_{x1} = (X_{12} + X_{21})/b = - 2X/b = - V_{xb}$

$H_{xa} = - X_{1a}/h + V_{xa}$ cotg $\alpha = - X/h - 2(X/b)(a/h) = H_{xb}$

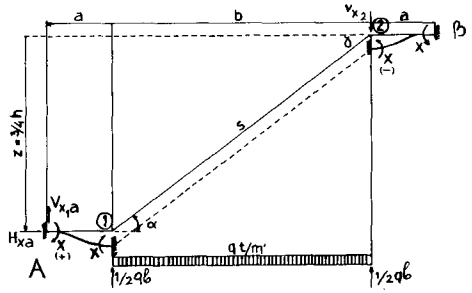
$H_x = - 2 H_{xa} = 2 X/h (1 + 2 a/b).$

§ **19. Geseran vertikal.** Sebagai contoh kita ambil balok atau pelat-tangga simetris dengan EI tetap keseluruhannya, serta terjepit pada kedua - dua ujungnya (gb. VII, 18).

A1 = B2 = a = b/4 = s/5; jadi tg α = 3/4.

Supaya tidak ada geseran, diperlukan pendel Vertikal di 1 atau di 2.

1. Pendel lepas, geseran ke bawah. Titik-titik 1 dan 2 turun sama jauhnya, kejadian menjadi simetis terhadap sumbu Y ⊥ garis 1 – 2 yang membelahnya. Berhubung dengan ini, kita



Gambar VII, 18

boleh menggunakan cara seperti diuraikan di dalam § 9

$\mu_{1a} : \mu_{12} = 4\ I/a : 2\ I/s = 10 : 1$

$\mu_{1a} = \mu_{2b} = 10/11;\ \mu_{12} = \mu_{21} = 1/11.$

$X^\circ_{a1} = X^\circ_{1a} = + X\ ;\ X^\circ_{b2} = X^\circ_{2b} = - X.$

	A1 = – B2	1A = – 2B	12 = – 21
X^0..	+ X – 5/11"	+ X – 10/11"	– 1/11 "
X..	+ 6/11X	+ 1/11 X	– 1/11 X

$V_{xa} = (X_{a1} + X_{1a})/a = 7\ X/11a.$

$V_{xb} = - (X_{b2} + X_{2b})/a = 7X/11a = V_{xa}$

$V_x = -(V_{xa} + V_{xb}) = -14\ X/11a =$ –56X/11b.

II). Akibat beban merata qb di atas bagian 1 - 2, tanpa adanya geseran (pendel bekerja).

$X^\circ_{12} = qb^2/12 = - X^\circ_{21}$

Keadaan juga simetris, jadi juga boleh menggunakan cara di atas (besaran-besaran μ sama).

	A 1 = – B 2	1 A = – 2 B	12 = – 21
$M^\circ../qb^2$	— – 5/132	— – 10/132	+ 1/12 – 1/132
$M'../qb^2$	– 5/132	– 10/132	+ 10/132
$X.../qb^2$	+ 18/88	+ 3/88	– 3/88
$M .../qb^2$	+ 1/6	– 1/24	+ 1/24

$V'_a = (M'_{a1} + M'_{1a})/a = - 15\ qb^2/132\ a = - 5\ qb/11 = V'_b.$

$V' = -(V'_a + V'_b + qb = 21\ qb/11.$

$V_X + V' = 0;\ X = 11/56.\ 21/11\ qb^2 = 3/8\ qb^2$

$V_a = V_b = (M_{a1} + M_{1a})/a = qb^2/8a = ½\ qb = Vb$ (simetris).

$\Sigma M_b = 0$ menghasilkan $H_a = 0$ juga $H_b = 0$

Titik-titik 1 dan 2 masing-masing turun sejauh

$y = 1/6 \times a^2/EI = qb^2\ a^2/16\ EI.$

Dicocokkan dengan Clapeyron secara langsung. Oleh karena keadaan simetris. maka $M_a = M_b$ dan $M_1 = M_2 = M$; selanjutnya titik-titik 1 dan 2 masing-masing turun sejauh y.

$M_a . a/3\ EI + M_b . a/6\ EI = y/a$ ---------- (1)

$M_a . a/6\ EI + M_1 (a/3\ EI + s/3EI + s/6\ EI) = qb^2\ s/24\ EI$ — y/a. -------- (2)

$1/3\ M_a + 1/6\ M_1 =$ ---------- EI y/a ---------- (1)

$1/6\ M_a + 17/6\ M_1 = 5/24\ qb^2$ – EI y/a ---------- (2)

$½\ M_a + 3\ M_1 = 5/24\ qb^2$ atau $M_a + 6\ M_1 = 5/12\ qb^2$ ---- (3)

$V_a = (M_a - M_1) / a = ½\ q\ b$ ..... (4)

$M_a - M_1 = 1/8\ q\ b^2$ ----- (4) | $M_1 = 1/7\ (5/12 - 1/8)\ qb^2 - 1/24\ qb^2$

$M_a + 6\ M_1 = 5/12\ qb^2$ --- (3) | $M_a = 1/8\ qb^2 + M_1 = 1/6\ qb^2$

III. Beban ½ qb di atas 1–2 bagian kiri. Oleh karena sekarang keadaan tidak lagi simetris, hitungan u dikerjakan seperti biasa; jadi

$\mu_{1a} : \mu_{12} = 4\ I/a : 4\ I/s = 5\ ;\ 1;\ \mu_{1a} = \mu_{2b} = 5/6\ ;\ \mu_{12} = \mu_{21} = 1/6$

$M^{\circ}_{12} = 11/192\ qb^2;\ M^{\circ}_{21} = -\ 5/192\ qb^2.$

Kita menggunakan cara di dalam § 5.

$\alpha = ½\ u_{12}\ u_{21} = 1/144;\ \beta = \alpha/\ 9\ (1-\alpha) = 1/143;\ 1 + \beta = 144/143.$

$M'_{1a} = -\ \mu_{1a}\ (1 + \beta)\ M^{\circ}_1 + ½\ \mu_{21}\ u_{1a}\ (1 + \beta)\ M^{\circ}_2 = (\ -\ 5/6.\ 144/143.\ 11/192 - ½.1/6.\ 5/6.\ 144/143.\ 5/192\ )\ qb^2$

$= -(685/13728)\ qb^2 = -0{,}050\ qb^2 = -M'_{12}$

$M'_{a1} = ½\ M'_{1a} = -\ 0{,}025\ qb^2.$

$M'_{2b} = ½\ \mu_{12}\ \mu_{2b}\ (1 + \beta)\ M^{\circ}_1 - \mu_{2b}\ (1+\beta)\ M^{\circ}_2 - (½.1/6.5/6.\ 144/143.11/192 + 5/6.\ 144/143.\ 5/192)\ qb^2$

$= (355/13728)\ qb^2 = 0{,}026\ qb^2 = -\ M'_{21}$

$M'_{b2} = ½\ M'_{2b} = 0.013\ qb^2$. Kemudian di daftar:

	A1	1A	12	21	2B	B2
M'.. /qb	–0,025	–0,050	+0,050	–0,026	+0,026	+0,013
X.. /qb^2	+0,103	+0,017	–0,017	+0,017	–0,017	–0,102
M.. /qb^2	+0,078	–0,033	+0,033	–0,009	+0,009	–0,089

$V'_a = (M'_{a1} + M'_{1a})/a = -\ 0{,}075\ qb^2/a = -\ 0{,}300\ qb.$

$V_b = -(M_{b2} + M_{2b})/a = -\ 0{,}039\ qb^2/a = -\ 0{,}156\ qb^2$

$V' = -\ (V'_a + V^1_b\ ) + ½\ qb = 0{,}956\ qb$

$V_x = (56/11)\ X/b$ (tetap); $V_x + V' = 0.$

$X = 11/56.\ 0.956\ qb^2 = 0{,}188\ qb^2.$

$V_a = (M_{a1} + M_{1a})/a = 4(0{,}078 - 0{,}033)\ qb = 0{,}180\ qb.$

$V_b = -\ (M_{b2} + M_{2b})/a = 4(0{,}089 - 0{,}009)\ qb = 0{,}320\ qb;$ V

$V_a + V_b = ½\ qb.$

$\Sigma M_b = 0$

$-\ H_a.\ 3a + V_a.\ 6a - ½\ qb.\ 4q - M_{a1} - M_{b2} = 0$

$-\ 3H_a + (6.0.180 - 2.000 + 4.\ 0{,}012)\ qb = 0;\ H_a = -\ 0{,}291\ qb$

$\Sigma M_a = 0;\ +\ 3\ H_b + (-6.0{,}320 + 2.0{,}500 + 4.0{,}012)\ qb = 0$

$H_b = +\ 0{,}291\ qb = -\ H_a$

Dibandingkan dengan cara Clapeyron:

$M_a = -½\ M_1 + 3\ EIy/a^2;\ M_b = -\ ½\ M_2 + 3\ El\ y/a^2$

$(¼\ a + 1/3\ s)\ M_1 + 1/6\ M_2\ s = -\ 9/384\ qb^2s - 1{,}5\ El\ y/a,$ atau

$23/12\ M_1 + 5/6\ M_2 = 45/384\ qb^2 - 1{,}5\ Ely/a^2$ . . . (1)

$1/6\ M_1s + (¼\ a + 1/3\ s)\ M_2 = 7/384\ qb^2s - 1{,}5\ El\ y/a,$ atau

$5/6\ M_1 + 23/12\ M_2 = 35/_{384}\ qb^2 - 1{,}5\ Ely/a^2$. . . (2)

$13/12\ M_1 - 13/12\ M_2 = 10/384\ qb^2$ atau $M_1 - M_2 = 5/208\ qb^2$ (I)

$V_a = 1/a\ (M_a - M_1) = 1/a\ (-\ 1{,}5\ M_1 + 3\ El\ y/a^3).$

$V_b = 1/a\ (\ M_b - M_2\ ) = 1/a\ (\ -\ 1{,}5\ M_2 + 3\ El\ y/a^3).$

$V_a + V_b = ½\ qb = 1/a\ (-\ 1{,}5\ M_1 - 1{,}5\ M_2 + 6\ El\ y/a^3),$

dikalikan dengan ¼ a menjadi :

$3/8\ M_1 + 3/8\ M_2 = -\ 1/32\ qb^2 + 1{,}5\ E\ l\ y/a^2$ . . . (3)

$23/12\ M_1 + 5/6\ M_2 = 15/128\ qb^2 - 1{,}5\ Ely/a^2$ . . . (1)

$55/24\ M_1 + 29/24\ M_2 = 11/128\ qb^2$ - - (3) – (1)

$55\ M_1 + 29\ M_2 = 33/16\ qb^2$ . . . . . (II)

(I) dan (II) menghasilkan :

$M_1 = 1/84.\ 574/208\ qb^2 = 0{,}033\ qb^2$; $M_2 = M_1 - 5/208\ qb^2 =$

$(574 - 420)/84.\ 203\ qb^2 = 0{,}009\ qb^2$.

Dari (3) terdapat $1{,}5\ EI\ y/a^2 = 3/8\ (M_1+M_2) + 1/32\ qb^2$

atau $3\ Ely/a^2 = 3/4\ (M_1 + M_2) + 1/16\ qb^2 = 1638/\ 84.208\ qb^2$

$M_a = - \frac{1}{2} M_1 + 3\ EI\ y/a^2 = 1351/84.\ 208\ qb^2 = 0{,}078\ qb^2$

$M_b = - \frac{1}{2} M_1 + 3\ EI\ y/a^2 = 1561/84.\ 208\ qb^2 = 0.089\ qb^2$.

§ 19a. Muatan vertikal P di titik 2.

$V_2' = P$ **(ke atas)**

$V_{x2} + V_2' = 0; \quad -\frac{56}{11} X/b + P = 0$

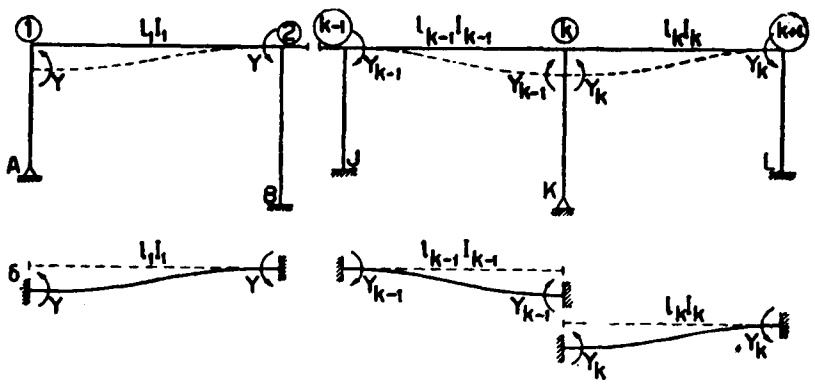
$X = \frac{11}{56} Pb.$

$M_{a1} = \frac{6}{11} X = \frac{3}{28} Pb; \quad M_{1a} = \frac{1}{11} X = \frac{1}{56} Pb$ dst.

§ 20. Akibat turunnya (amblesnya) salah satu tihang.

Di sini ada dua kemungkinan mengenai tihang yang turun: *tihang tepi* atau *tihang antara.*

Kita anggap bahwa titik-titik hubungan *tidak berputar* dan *tidak bergoyang* ke arah mendatar; jadi seolah-olah ujung-ujung batang yang bersangkutan itu terjepit sempurna.



Gambar VII, 19

Oleh karena turunnya tihang yaitu δ diketahui, maka momen-momen ujung-batang primar yang bersangkutan dapat dihitung dengan mudah (di sini ditulis dengan huruf Y).

Jika umpamanya tihang pertama turun sejauh δ, maka terdapat:

$Y = -6EI\ \delta/l_1^2$

Jika tihang-antara k yang turun (sejauh δ):

$$Y_{k-1} = +6\,EI_{k-1}\,\delta/l_{k-1}^2 \text{ dan } Y_k = -6\,EI_k\,\delta/l_k^2$$

$$Y_{k-1} : Y_k = I_{k-1}\,l_k^2 : I_k\,l_{k-1}^2 \text{ (nilai-nilai mutlaknya)}$$

Sebutlah $Y_k = -Y$, maka $Y_{k-1} = +(I_{k-1}/I_k)(l_k/l_{k-1})^2 \cdot Y$

Kemudian menjalankan pengrataan sebagai akibat dari Y ini, yang menghasilkan M'..

Sesudah itu diperhitung akibat dari goyangan mendatar yang menimbulkan momen-momen ujung-tihang primar X seperti dulu.

§ 21. Tihang tepi turun

Bangunan dengan tiga tihang.

$h_1 = 4{,}0\ m$; $h_2 = 3{,}0\ m$; $h_3 = 6{,}0\ m$

$l_1 = 6{,}0\ m$; $l_2 = 8{,}0\ m$; $I_t = \frac{1}{3} I_b$

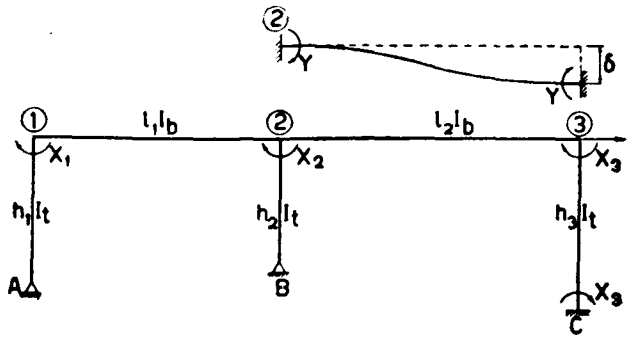
$\mu_{1a} : \mu_{12} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} : 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot 1 = 3 : 8$

$\mu_{1a} = 3/11$; $\mu_{12} = 8/11$.

$\mu_{21} : \mu_{2b} : \mu_{23} = 4 \cdot \frac{1}{6} : 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} : 4 \cdot \frac{1}{8} = 4 : 2 : 3$

$\mu_{21} = 4/9$; $\mu_{2b} = 2/9$; $\mu_{23} = 1/3$

$\mu_{3c} : \mu_{32} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} : \frac{1}{8} = 4 : 9$; $\mu_{3c} = 4/13$; $\mu_{32} = 9/13$.



Gambar VII, 20

Lebih dulu mempelajari akibat geseran mendatar (ambil ke kanan).

$$X^o_{1a} : X^o_{2b} : X^o_{3c} = (1/4)^2 : (1/3)^2 : 2(1/6)^2 = 9 : 16 : 8$$
$$X^o_{3c} = X;\ X^o_{2b} = 2X;\quad X^o_{1a} = 1{,}125\ X.$$

Kita mulai dengan titik 2.

	1A 3/11	12 8/11	21 4/9	2B 2/9	23 1/3	32 9/13	3C 4/13	C3 —
	+ 1,125 X			+ 2,000 X			+ 1,000 X	+ 1,000 X
		− 0,444 X	− 0,889 X	− 0,444 X	− 0,667 X	− 0,333 X		
	− 0,186 X	− 0,495 X	− 0,248 X		− 0,231 X	− 0,462 X	− 0,205 X	− 0,102 X
		+ 0,118 X	+ 0,235 X	+ 0,118 X	+ 0,176 X	+ 0,088 X		
	− 0,032 X	− 0,086 X	− 0,043 X		− 0,031 X	− 0,062 X	− 0,026 X	− 0,013 X
		+ 0,016 X	+ 0,033 X	− 0,016 X	− 0,025 X	+ 0,012 X		
	− 0,004 X	− 0,012 X	− 0,006 X		− 0,004 X	− 0,008 X	− 0,004 X	− 0,002 X
		+ 0,003 X	+ 0,005 X	+ 0,002 X	+ 0,003 X	+ 0,003 X		
	− 0,001 X	− 0,002 X				− 0,002 X	− 0,001 X	
$X_{..} =$	+ 0,902 X	− 0,902 X	− 0,963 X	+ 1,692 X	− 0,729 X	− 0,764 X	+ 0,764 X	+ 0,883 X

$$H_x = \{0{,}902/4 + 1{,}692/3 + (0{,}764 + 0{,}883)/6\}X = \underline{1{,}064\ X}$$

Sekarang akibat turunnya tihang C 3 dengan $Y = 6\,EI_b\,\delta/l_2^2$

	1A 3/11	12 8/11	21 4/9	2B 2/9	23 1/3	32 9/13	3C 4/13	C3 —
					+ 1,000 Y	+ 1,000 Y		
	+ 0,065 Y	− 0,222 Y	− 0,445 Y	− 0,222 Y	− 0,333 Y	− 0,167 Y		
		+ 0,157 Y	+ 0,078 Y		− 0,289 Y	− 0,577 Y	− 0,256 Y	− 0,128 Y
		+ 0,047 Y	+ 0,094 Y	+ 0,047 Y	+ 0,070 Y	+ 0,035 Y		
	− 0,013 Y	− 0,034 Y	− 0,017 Y		− 0,012 Y	− 0,024 Y	− 0,011 Y	− 0,006 X
		+ 0,006 Y	+ 0,013 Y	+ 0,006 Y	+ 0,010 Y	+ 0,005 Y		
	− 0,002 Y	− 0,004 Y				− 0,003 Y	− 0,002 Y	− 0,001 Y
$M'_{..} =$	+ 0,050 Y	− 0,050 Y	− 0,277 Y	− 0,169 Y	+ 0,446 Y	+ 0,269 Y	− 0,269 Y	− 0,135 Y
$M_{x..} =$	+ 0,094 Y	− 0,094 Y	− 0,100 Y	+ 0,177 Y	− 0,076 Y	− 0,080 Y	+ 0,080 Y	+ 0,092 Y
$M_{..} =$	+ 0,144 Y	− 0,144 Y	− 0,377 Y	+ 0,008 Y	− 0,370 Y	+ 0,189 Y	− 0,189 Y	− 0,043 Y

$$H' = (0{,}050/4 - 0{,}169/3 - \tfrac{3}{2}\,.\,0{,}269/6)\ Y = -0{,}111\ Y$$
$$H_x + H_y = 0;\ 1{,}064\ X = 0{,}111\ Y;\ X = 1{,}104Y$$

$$V_a = (M_{12} + M_{21})/l_1 = \tfrac{1}{6}(-0{,}144 - 0{,}377)\ Y = -0{,}087\ Y = -\Delta V_a$$
$$V_c = -(M_{23} + M_{32})/l_2 = -\tfrac{1}{8}(0{,}370 + 0{,}189)\ Y = -0{,}070\ Y = -\Delta V_c$$
$$V_b = -(M_{12} + M_{21})/l_1 + (M_{23} + M_{32})/l_2 = +0{,}157\,Y = \Delta V_b;\ \Sigma V = 0$$

Berarti bahwa reaksi-vertikal semula di C *berkurang dengan* ΔV_c sehingga tihang di situ turun. Ketika ini, perletakan A terangkat ke atas dengan gaya sebesar ΔV_a.

Ini semuanya menimbulkan tekanan ke bawah pada perletakan B sebesar $\Delta V_b = \Delta V_a + \Delta V_c$.

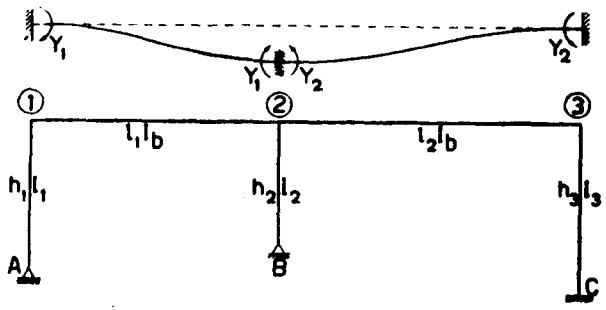
$$H_a = -M_{1a}/h_1 = \tfrac{1}{4}\,.\,0{,}144\ Y = -0{,}036\ Y$$
$$H_b = -M_{2b}/h_2 = -\tfrac{1}{3}\,.\,0{,}008\ Y = -0{,}003\ Y$$
$$H_c = -(M_{c3} + M_{3c})/h_3 = +\tfrac{1}{6}(0{,}189 + 0{,}043)\ Y = +0{,}039\ Y;\ \Sigma H = 0$$
$$\Sigma M_c = V_a(l_1 + l_2) + V_b\,l_2 + H_a(h_3 - h_1) + H_b(h_3 - h_2) - M_{c3} =$$
$$= Y(-0{,}078\,.\,14 + 0{,}157\,.\,8 - 0{,}036\,.\,2 - 0{,}003.3 + 0{,}043) =$$
$$= Y(1{,}299 - 1{,}298) \approx 0.$$

§ 22. Tihang-antara turun

Kita ambil bangunan seperti di atas, jadi di sini tihang-tengah yang turun (δ).

$Y_1 : Y_2 = l_2^2 : l_1^2 =$ 16 : 9 (nilai mutlaknya)

$Y_2 = -Y$; $Y_1 = +\frac{16}{9}\,Y = +1{,}778\ Y$.



Gambar VII, 21

	1A 3/11	12 8/11	21 4/9	2B 2/9	23 1/3	32 9/13	3C 4/13	C3 —
		+ 1,778 Y	+ 1,778 Y		− 1,000 Y	− 1,000 Y		
	− 0,485 Y	− 1,293 Y	− 0,646 Y		+ 0,346 Y	+ 0,692 Y	+ 0,308 Y	+ 0,154 Y
		− 0,107 Y	− 0,213 Y	− 0,106 Y	− 0,159 Y	− 0,080 Y		
	+ 0,029 Y	+ 0,078 Y	+ 0,039 Y		+ 0,027 Y	+ 0,055 Y	+ 0,025 Y	+ 0,012 Y
		− 0,014 Y	− 0,029 Y	− 0,015 Y	− 0,022 Y	− 0,011 Y		
	+ 0,004 Y	+ 0,010 Y	+ 0,005 Y		+ 0,004 Y	+ 0,008 Y	+ 0,003 Y	+ 0,002 Y
			− 0,004 Y	− 0,002 Y	− 0,003 Y			
$M'_{..} =$	− 0,452 Y	+ 0,452 Y	+ 0,930 Y	− 0,123 Y	− 0,807 Y	− 0,336 Y	+ 0,336 Y	+ 0,168 Y

$$H' = (-\tfrac{1}{4}\,.\,0{,}452 - \tfrac{1}{3}\,.\,0{,}123 + \tfrac{3}{2}\,.\,\tfrac{1}{6}\,.\,0{,}338)\ Y = -0{,}0070\ Y$$
$$H_x = 1{,}064\ X \text{ tetap.}$$

Jadi $X = 0{,}070\ Y/1{,}064 = 0{,}067\ Y$

	1A	12	21	2B	23	32	3C	C3
$M'_{..} =$	+ 0,452 Y	+ 0,452 Y	+ 0,930 Y	− 0,123 Y	− 0,807 Y	− 0,336 Y	+ 0,336 Y	+ 0,168 Y
$X_{..} =$	+ 0,062 Y	− 0,062 Y	− 0,064 Y	+ 0,113 Y	− 0,049 Y	− 0,051 Y	+ 0,051 Y	+ 0,059 Y
$M_{..} =$	− 0,390 Y	− 0,390 Y	+ 0,866 Y	− 0,010 Y	− 0,856 Y	− 0,387 Y	+ 0,387 Y	+ 0,227 Y

$$V_a = \tfrac{1}{6}(0{,}390 + 0{,}866)\ Y = 0{,}209\ Y$$
$$V_c = \tfrac{1}{8}(0{,}856 + 0{,}387)\ Y = 0{,}154\ Y$$
$$V_b = -(V_a + V_c) = -0{,}363\ Y$$
$$H_a = \tfrac{1}{4}\,.\,0{,}390\ Y = 0{,}098\ Y;\ H_b = \tfrac{1}{3}\,.\,0{,}010\,Y = 0{,}003\ Y;\ H_c = -\tfrac{1}{6}(0{,}387 + 0{,}227)\ Y = -0{,}102\ Y.$$
$$\Sigma V = 0;\ \Sigma H = 0$$
$$\Sigma M_c = Y(0{,}209\,.\,14 - 0{,}363\,.\,8 + 0{,}098\,.\,2 + 0{,}003\,.\,3 - 0{,}227) =$$
$$Y(3{,}132 - 3{,}131) \approx 0$$

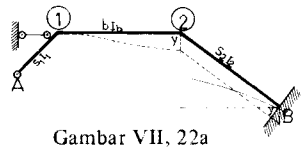
§ 23. Portal dengan tihang-tihang serong.

Sebagai contoh kita ambil bangunan seperti pada gambar VII, 16; § 16).

A. Titik B turun vertikal sejauh y cm (gb. VII, 22a)

Jika goyangan dicegah olah pendel (mendatar), maka titik 2 akan turut turun sejauh y juga. Jadi $M^{\circ}_{12} = M^{\circ}_{21}$

$6\ El_b\ y/b^2 = y;\ M^{\circ}_{2b} = M^{\circ}_{b2} = 0$



Gambar VII, 22a

Kita menggunakan cara dengan deret ukur seperti di dalam § 5 dan sudah terhitung.

$\mu_{1a} = \mu_{12} = \mu_{21} = \mu_{2b} = ½,\ \alpha = ¼\ \mu_{12}\ \mu_{21} = 1/16;\ 1 + \beta = 16/15$

$M^{\circ}_1 = M^{\circ}_2 = + Y.$

$M'_{1a} = -\ \mu_{1a}\ (1+\beta)\ M^{\circ}_1 + ½\ \mu_{21}\ \mu_{1a}\ (1+\beta)\ M^{\circ}_2 = (\ -½.16/15.\ 1 + ½.½.$

$16/15.1)\ Y = -\ 0{,}400\ Y.$

$M'_{2b} = ½\ \mu_{12}\mu_{2b}\ (1+\beta)\ M^{\circ}_1 - \mu_{2b}\ (1+\beta)\ M^{\circ}_2 = -\ 0{,}400\ Y;\ M'_{b2} =$

$= -\ 0{,}200\ Y$

(induksi) Hasil pengrataan akibat goyangan (besaran-besaran X) yang telah terdapat dulu, kita pergunakan lagi, sedang gaya-goyang $H_x = 1{,}092\ X.$

	1A	12	21	2B	B2
M ..	+ 1,100	– 1,100 X	– 1,100 X	+ 1,100 X	+ 1,050 X
M'..	– 0,400 Y	+ 0,400 Y	+ 0,400 Y	– 0,400 Y	– 0,200 Y
X..	+ 0,370"	–0,370"	– 0,370"	+ 0,370"	+ 0,353"
M..	– 0,030 Y	+0,030 Y	+ 0,300 Y	– 0,030 Y	+ 0,153 Y

$V'_a = V'_1 = (\ M'_{12} + M'_{21})\ /\ b = 0{,}080\ Y = -\ V'_b$

$H'_a = -\ M'_{1a}/h_1 + V'_a\ \text{cotg}\ \alpha = 0{,}160\ Y.$

$H'_b = -\ (\ M_{2b} + M'_{b2})/h_2 - V'_b\ \text{cotg}\ \beta = 0{,}207\ Y.$

$H' = -\ (H'_a + H'_b) = -\ 0{,}367\ Y.$

$H_x + H' = 0;\ X = Y.0{,}367/1{,}092 = 0{,}336.$

$V_a = (M_{12} + M_{21})/b = 0{,}006\ Y;\quad H_a = -\ M_{1a}/h_1 + V_a\ \text{cotg}\ \alpha = 0{,}012\ Y.$

$V_b = -\ V_a = -\ 0{,}006\ Y;\ H_b = -\ (M_{b2} + M_{2b})/h_2 - V_b\ \text{contg}\ \beta = -0{,}012\ Y.$

Bandingkan dengan IV, § 37, contoh b.

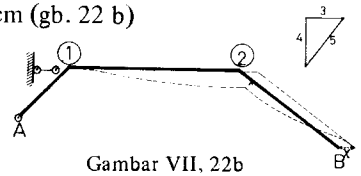
Kita juga boleh menghitung sebagai pelengkung, secara mengisi :

$\delta^{\circ}_h = 0,\ \delta^{\circ}_v = y$ dengan $H = H_a$ dan $V = V_a$ sebagai gaya-gaya statis kelebihan - (lihat bab VI, § 69 a).

b. Titik B tergeser mendatar keluar, sejuah x cm (gb. 22 b)

Tanpa adanya goyangan, terdapat :

$M^{\circ}_{12} : M^{\circ}_{2b} = I_b\ \delta_{12}/b^2 : -\ I_2\ \delta_{2b}/\ s_2^2 = 5 : -\ 4.$



Gambar VII, 22b

$\delta_{2b} = x/\sin\beta = 5\ x/3.$

$M^{\circ}_{2b} = M^{\circ}_{b2} = -\ 6\ El_2\ \delta_{2b}/\ s_2^2 = -\ 10\ El_2\ x/\ s_2^2 = -\ 1{,}25\ Y.$

$M^{\circ}_{12} = M^{\circ}_{21} = +\ 1{,}00\ Y.$

$M'_{1a} = (\ -\ ½.\ 16/15.\ 1\ -\ ½.½.½\ 16/15.\ 5/4)\ Y = -\ 7/10\ Y = -\ M'_{12}$

$M'_{2b} = (\ -\ 5/4 + ½.½.½.\ 16/15.\ 1 + ½.\ 16/15.\ 5/4)\ Y = 9/20\ Y = -\ M'_{21}$

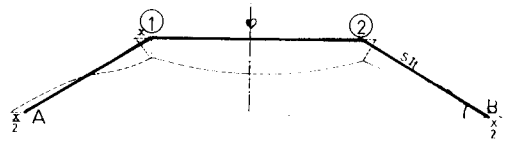
$M'_{b2} = (\ -\ 5/4 + 2/5)\ Y = -\ 17/20\ Y.$

$V'_a = (M'_{12} + M_{21})/b = 0{,}115\ y;\ H'_a = -\ M'_{1a}/h_1 + V'_a\ \text{cotg}\ \alpha;\ \text{dst.}$

Jika dihitung sebagai pelengkung mengisi $\delta^{\circ}_h = -\ x,\ \delta^{\circ}_v = 0$

§ 24. Portal jepit simetris (gb. VII. 23)

Salah satu ujung-bawah tihang (A atau B) tergeser keluar sejauh x cm. Oleh karena keadaan simetris, boleh dianggap, seolah bleh A dan B masing-masing tergeser sejauh x/2.



Gambar VII, 23

$M^{\circ}_{a1} = M^{\circ}_{1a} = 6\ El_t x/2\ s^2\ \sin\alpha = 3\ El_t x/sh = Y;\ M^{\circ}_{12} = M^{\circ}_{21} = 0;$

$M^{\circ}_{b2} = M^{\circ}_{2b} = -\ Y.$

$\mu_{1a} = \mu_{12} = 4\, l_t/s = 2\, I_b/b = 2 : k$ dengan $K = (I_b/I_t)(s/b)$, lihat §9.

$M_1 = M_2 = \mu_{12}\, Y$ (bekerja positif).

$M_a = M_b = (1 - \frac{1}{2}\mu_{1a})\, Y$ (bekerja negatif).

$V_a = V_b = 0$

A1	1A μ_{1a}	12 μ_{12}
$-\frac{1}{2}\mu_{1a}\, Y$	$-\mu_{1a}\, Y$	$-\mu_{12}\, Y$

Dicocokkan dengan hitungan sebagai pelengkung.
(lihat bab VI. § 65).

$$y_1 = \frac{k/h}{2k+1}; \quad y_a = -(h - y_1) = -\frac{(k+1)h}{2k+1}$$

$$\delta'_{hh} = \delta_{hh}\, EI_b/b = \frac{k(k+2)\,h^2}{3(2k+1)} \quad ; \quad (\delta^\circ_h)' = \delta^\circ_h\, E\, I_b/b = -x\, EI_b/b.$$

$$H = (\delta^\circ_h)'/S'_{hh} = -\frac{3(2k+1)}{k(k+2)\,h^2} \quad E\, I_b.\, x/b = -\frac{3\, EL_t x}{s\,h^2} \cdot \frac{(2k+1)}{k(k+2)}$$

$$\frac{I_b}{I_t}.\, s/b = -Y.\, \frac{(2k+1)}{(k+2)h} \quad ; \; V = M = 0$$

$$M_1 = -H\, y_1 = Y.\, \frac{k}{k+2} = Y.\mu_{12}$$

$$M_a = -H\, y_a = -Y.\, \frac{(k+1)}{k+2} = -Y(1 - \tfrac{1}{2}\mu_{12}).$$

§ 25. Portal dua sendi

Jika umpamanya titik B itu beralih tempat, maka seluruh bangunan dapat mengikutinya **secara bebas** dengan menjalani busur-busur lingkaran berpusat di titik A (sendi). Ini berarti bahwa bentuk bangunan tidak berobah jadi tidak terjadi deformasi berdasarkan robahan sudut. Dengan demikian tidak tertimbul momen-momen di manapun di dalam seluruh bangunan (lihat IV, § 37 a).

Jika bentuknya portal itu simetris, sedang garis penghubung AB terletak mendatar, maka hal ini dapat dibuktikan secara mudah dengan hitungan Cross. Anggaplah titik B yang turun vertikal (AB).

Menurut § 17 sebagai akibat dari goyangan ke kanan melulu terdapat

$M_{1a} = X_{2b} = +X$; $X_{12}\, X_{21} = -X$

Sebagai akibat dari turunnya titik B tanpa goyangan, setelah diratakan:

$M'_{1a} = M'_{2b} = -y$; $M'_{12} = M'_{21} = +Y$

$H_x = 2\, x/h\, (1 + 2\, a/b) = \gamma X$. Secara analog terdapat, $H' = -\gamma Y$.

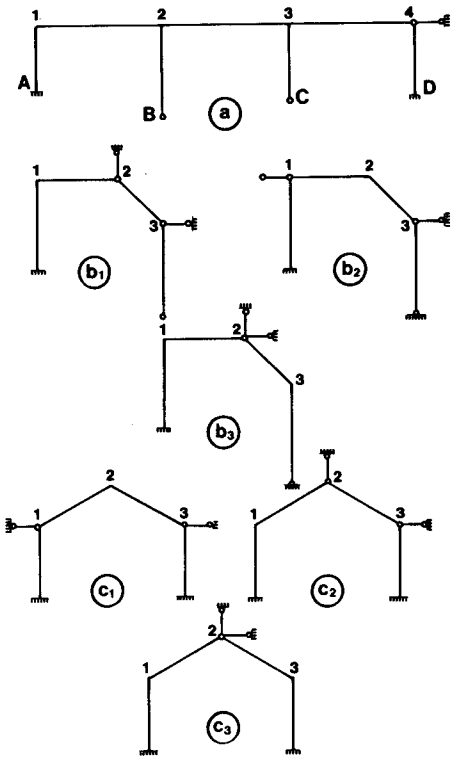
$H_x + H' = 0$; $X = Y$.

$M_{1a} = M'_{1a} + X = -Y + Y = 0$, juga $M_{12} = M_{21} = M_{2b} = 0$

D. GESERAN BERGANDA

§ 26. Tinjauan.

Pada bangunan-bangunan yang hing ga sekarang kita pelajari, titik-titik hubungannya hanya dapat bergeser searah serta sama jauhnya, seperti pada gambar VII, 24 a (robahan panjang diabaikan). Jika salah satu titik-hubungan, misalnya titik 4 itu dipegang oleh pendel mendatar (pada umumnya sejajar dengan arah goyangan), maka kemungkinan bergeser pada semua titik-titik hubungan di tiadakan.



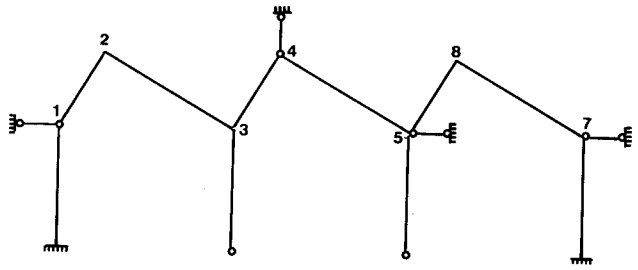
Gambar VII, 24a b,c

Pada bangunan-bangunan seperti digambar b dan c terlihat, bahwa secara memegang salah satu titik-hubungan saja, belum cukup untuk menghalang-halangi bergoyangnya-titik-titik hubungan lainnya.

Untuk mencapai ini kita harus memegang dua titik-hubungan, ma - sing-masing dengan satu pendel, atau memegang titik 2 dengan dua pendel, atau memegang titik 2 dengan dua pendel, yaitu sebatang mendatar dan yang lainnya vertikal (gb. b3, c3) oleh karena titik 2 dapat bergoyang kedua arah: mendatar dan vertikal.

Kita boleh mengatakan, bahwa pada bangunan-bangunan seperti gb.b dan c itu terdapat goyangan *berganda dua* atau terdapat adanya dua titik-hubungan *otonom* terhadap satu sama lain.

Ke jadian dapat diperluas sampai berganda tiga atau lebih. Bangunan.



Gambar VII, 25

deretan rangka-payon seperti gb. VII, 25 itu menunjukkan goyangan *berganda empat* atau empat titik tumpul otonom.

Untuk mencegah geseran, kita memerlukan empat batang pendel yang memegangnya (caranya ada berbagai-bagai asal yang tepat).

Caranya menghitung demikian:

Salah satu pendel, misalnya pendel No 1, dihapuskan, dan mengadakan goyangan menurut garis sumbu pendel itu. Ini menimbulkan momen-primar X_1 pada salah satu ujung di tempat pendel itu dan momen-momen sebesar f/X_1), (yaitu bertanding lurus dengan X_1) pada ujung-ujung lainnya Setelah diratakan, menghasilkan gaya-gaya pendel $\alpha_1 X_1$ pada pendel No 1; $\beta_1 X_1$ pada pendel No 2, $\gamma_1 X_1$ pada pendel No 3 dst.

Kemudian memulihkan pendel No 1 itu, dan melepaskan pendel No 2 serta mengadakan goyangan menurut sumbunya. Ini menghasilkan gaya-gaya pendel $\alpha_2 X_2, \beta_2 X_2, \gamma_2 X_2$ dst.

Pekerjaan ini diulangi pada pendel ketiga sampai terakhir.

Sekarang mempelajari akibat dari beban luar, sedang kemungkinan bergoyang sama sekali ditiadakan oleh adanya pendel-pendel fiktif itu. Setelah momen-momen primar diratakan. kita mendapat momen-momen yang kita sebut M' dan gaya-gaya pendel H_1', H_2' dan seterusnya jika mendatar, dan V_1 , V_2 dan seterusnya jika vertikal.

Gaya-gaya pendel mendatar *ke kanan* dan *vertikal ke atas* kita beri tanda positif (+) dan yang berlawanan tentunya negatif (–).

Pada akhirnya jika gaya pendel akibat beban (tanpa goyangan) kita tulis S', kita mendapat persamaan.

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \ldots\ldots\ldots + S_1' = 0$$
$$\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \ldots\ldots\ldots + S_2' = 0$$
$$\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 X_3 + \ldots\ldots\ldots + S_3' = 0$$

Persamaan-persamaan ini menghasilkan X_1, X_2, X_3 . . . . . dan seterusnya yang kemudian setelah diratakan mendapat :

$M_{I,kj}$, $M_{II,kj}$, $M_{III,kj}$ . . . . . dan seterusnya Pada akhirnya:

$M_{kj} = M'_{kj} + M_{I,kj} + M_{II,kj} + M_{III,kj}$ . . . . . dan seterusnya.

Petunjuk-petunjuk kaki I, II, III, bersangkutan dengan nomor urutnya peristiwa goyangan, jadi selaras dengan index-index pada besaran-besaran X ; kj berarti ujung k pada batang kj.

§ 27. Bangunan portal dengan palang serong.

(Goyangan berganda dua)

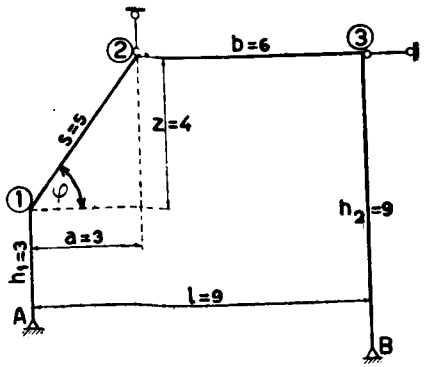
Kaki-kaki tiang kedua-duanya bersendi.

Ukuran-ukuran:

$h_1 = 3\ m,\ h_2 = 9\ m.$

$a = 3\ m,\ s = 5\ m,\ b = 6\ m.$

$\operatorname{tg}\varphi = z/a = 4/3$



Gambar VII, 26

Momen-inersia I tetap dan sama besarnya pada seluruh bangunan.

Kita menghitung dulu koefisien-koefisien distribusi μ.

$\mu_{1a} : \mu_{12} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = 5 : 4$

$\mu_{1a} = 5/9 = 0{,}556;\ \mu_{12} = 4/9 = 0{,}444.$

$\mu_{21} : \mu_{23} = 6 : 5;\ \mu_{21} = 6/11 = 0{,}545;\ \mu_{23} = 5/11 = 0{,}455.$

$\mu_{32} : \mu_{3b} = \frac{4}{6} : \frac{3}{9} = 2 : 1;\ \mu_{32} = 2/3 = 0{,}667;\ \mu_{3c} = 1/3 = 0{,}333.$

Kita mengadakan pendel-fiktif mendatar di titik 3 dan vertikal di titik 2.

I. Pendel di-3 hilang, goyangan dianggap ke kiri.

$$X^o_{3b} = -X_1;\ X^o_{1a} = -X_1(h_2/h_1)^2 = -9X_1$$

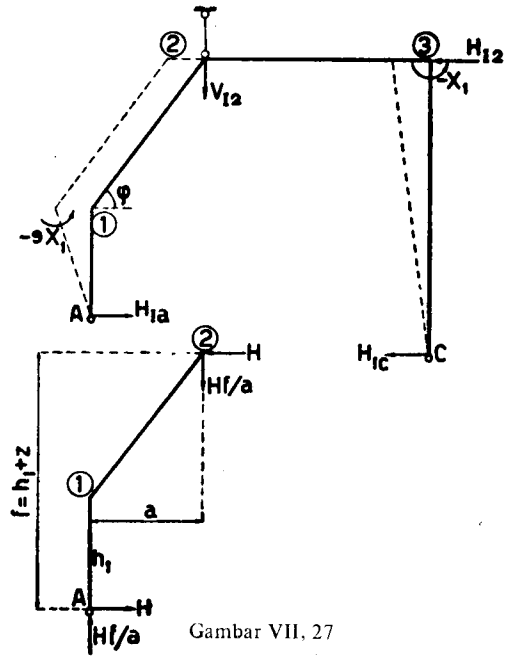
1A 0,556	12 0,444	21 0,545	23 0,455	32 0.667	3B 0,333
$-9{,}000X_1$					$-1{,}000X_1$
$+5{,}000X_1$	$+4{,}000X_1$	$+2{,}000X_1$	$+0{,}333X_1$	$+0{,}667X_1$	$+0{,}333X_1$
	$-0{,}636X_1$	$-1{,}273X_1$	$-1{,}060X_1$	$-0{,}530X_1$	
$+0{,}353X_1$	$+0{,}283X_1$	$+0{,}142X_1$	$+0{,}176X_1$	$+0{,}353X_1$	$+0{,}176X_1$
	$-0{,}087X_1$	$-0{,}174X_1$	$-0{,}144X_1$	$-0{,}072X_1$	
$+0{,}048X_1$	$+0{,}039X_1$	$+0{,}020X_1$	$+0{,}024X_1$	$+0{,}048X_1$	$+0{,}024X_1$
	$-0{,}012X_1$	$-0{,}024X_1$	$-0{,}020X_1$	$-0{,}010X_1$	
$+0{,}007X_1$	$+0{,}005X_1$	$+0{,}003X_1$	$+0{,}003X_1$	$+0{,}007X_1$	$+0{,}003X_1$
		$-0{,}003X_1$	$-0{,}003X_1$		
$M_{I..} = -3{,}592X_1$	$+3{,}592X_1$	$+0{,}691X_1$	$-0{,}691X_1$	$+0{,}463X_1$	$-0{,}464X_1$

$H_{Ia} = -M_{I1a}/h_1 = \frac{1}{3}.\ 3{,}592\ X_1 = 1{,}197\ X_1;\ H_{Ib} = -M_{I3b}/h_2 = \frac{1}{9}.\ 0{,}464\ X_1 = 0{,}052\ X_1$

$H_{I3} = -(H_{Ia} + H_{Ib}) = -1{,}249\ X_1 = \alpha_1 X_1$ (ke kiri)

$V_{Ia} = (M_{I12} + M_{I21})/a + H_{Ia}\operatorname{tg}\varphi = X_1(4{,}283/3 + 1{,}197.4/3) = 3{,}024\ X_1$

$V_{I2} = -V_{Ia} + (M_{I23} + M_{I32})/b = -X_1(3{,}024 + 0{,}228/6) = -3{,}062\ X_1 = \beta_1 X_1$ (ke bawah)



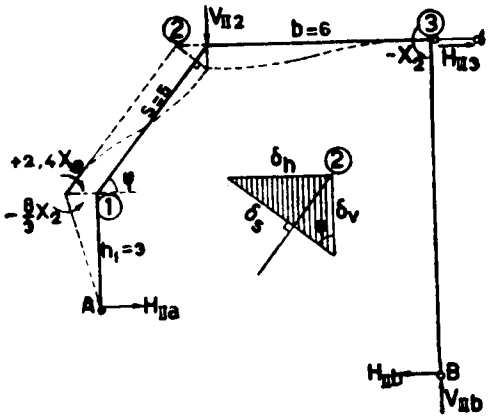
Gambar VII, 27

Titik 1 bergoyang sejauh $(\delta_{1h})_I = -9X_1h_1^2/3EI$ dan titik 3 sejauh $(\delta_{3h})_I = -X_1h_2^2/3EI = (\delta_{1h})_I$

Ini berarti: Untuk menggoyangkan bangunan melulu ke arah mendatar kekiri) diperlukan gaya-pendorong α_1X_1 (ke kiri) di titik 3 dan gaya vertikal ke bawah sebesar β_1X_1 (untuk mencegah naik-turunnya titik 2).

II. **Pendel di-2 dilenyapkan, titik 2 digeser ke bawah.**

Titik 3 tidak dapat bergerak oleh adanya gaya-pendel di situ (H_{II3}) sehingga titik 1 terpaksa bergoyang ke kiri.



Gambar VII, 27a

Menurut diagram-Williot terdapat

$\delta_h = \delta_v \operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{3}\delta_v$; $\delta_s = \frac{5}{3}\delta_v$.
$X^o_{23} = X^o_{32} = -X_2$.
$X^o_{12} = X^o_{21} = +X_2(\delta_s/\delta_v)(b/s)^2$
$= +\frac{5}{3}\cdot\frac{36}{25}X_2 = +2{,}400\,X_2$
$X^o_{1a} = -\frac{1}{2}X_2(\delta_h/\delta_v)(b/h_1)^2 =$
$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot 4\,X_2 = -\frac{8}{3}X_2 =$
$= -2{,}667\,X_2$.

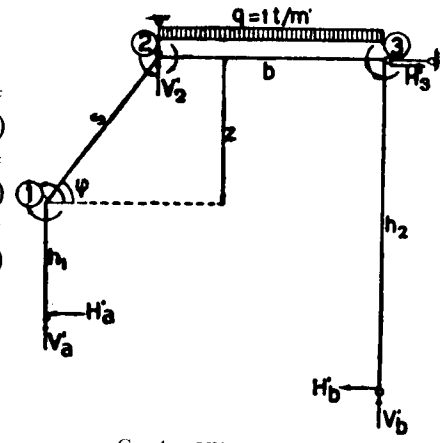
1A 0,556	12 0,444	21 0,545	23 0,455	32 0,667	3B 0,333
$-2{,}667X_2$	$+2{,}400X_2$	$+2{,}400X_2$	$-1{,}000X_2$	$-1{,}000X_2$	
$+0{,}148X_2$	$+0{,}119X_2$	$+0{,}060X_2$	$+0{,}333X_2$	$+0{,}667X_2$	$+0{,}333X_2$
	$-0{,}489X_2$	$-0{,}978X_2$	$-0{,}815X_2$	$-0{,}407X_2$	
$+0{,}272X_2$	$+0{,}217X_2$	$+0{,}108X_2$	$+0{,}136X_2$	$+0{,}271X_2$	$+0{,}136X_2$
	$-0{,}066X_2$	$-0{,}133X_2$	$-0{,}111X_2$	$-0{,}056X_2$	
$+0{,}037X_2$	$+0{,}029X_2$	$+0{,}015X_2$	$+0{,}018X_2$	$+0{,}037X_2$	$+0{,}019X_2$
	$-0{,}009X_2$	$-0{,}018X_2$	$-0{,}015X_2$	$-0{,}008X_2$	
$+0{,}005X_2$	$+0{,}004X_2$	$+0{,}002X_2$	$+0{,}002X_2$	$+0{,}005X_2$	$+0{,}003X_2$
		$-0{,}002X_2$	$-0{,}002X_2$		
$M_{II}.. = -2{,}205X_2$	$+2{,}305X_2$	$+1{,}454X_2$	$-1{,}454X_2$	$-0{,}491X_2$	$+0{,}491X_2$

$H_{IIa} = \frac{1}{8}\cdot 2{,}205X_2 = 0{,}735X_2$; $H_{IIb} = -\frac{1}{9}\cdot 0{,}491X_2 = -0{,}055\,X_2$.
$H_{II3} = -(H_{IIa} + H_{II}) = -0{,}680\,X_2 = \alpha_2X_2$
$V_{II2} = -(M_{II12} + M_{II21})/a - H_{IIa}\operatorname{tg}\varphi + (M_{II23} + M_{II32})/b =$
$= (-3{,}759/3 - 0{,}735\cdot 4/3 - 1{,}945/6)X_2 =$
$= -2{,}524\,X_2 = \beta_2X_2$

Titik 1 bergoyang $(\delta_{1h})_{II} = -\frac{8}{3}X_2h_1^2/3EI$ dan titik 2 sejauh $(\delta_{2v})_{II} = -X_2b^2/6EI$.

III. **Akibat muatan luar q = 1 t/m di atas 23.**

Kita menggunakan cara dengan persamaan tiga momen (Clapeyron); goyangan tak ada.



Gambar VII, 27b

$\frac{1}{6}M'_1(h_1 + s) + \frac{1}{6}M'_2 s$ ..... $= 0$ ..... (1)
$\frac{1}{6}M'_1 \cdot s + \frac{1}{3}M'_2(s + b) + \frac{1}{6}M'_3 b = \frac{1}{24}qb^3$ ..... (2)
$\frac{1}{6}M'_2 b + \frac{1}{3}M'_3(b + h_2) = \frac{1}{24}qb^3$ ..... (3)

$16\,M'_1 + 5\,M'_2$ ..... $= 0$ (1)
$5\,M'_1 + 22\,M'_2 + 6\,M'_3 = 54$ (2)
$M'_2 + 5\,M'_3 = 9$ (3)

$M'_1 = -0{,}705$ *tm.*
$M'_2 = +2{,}235$ *tm.*
$M'_3 = +1{,}350$ *tm.*

Ditulis menurut Cross :

$M'_{..} =$	1A	12	21	23	32	3B
	+ 0,705	— 0,705	— 2,235	+ 2,235	— 1,350	+ 1,350 (*tm*)

$H'_a = -0{,}705/3 = -0{,}235\,t$; $H'_b = -1{,}350/9 = -0{,}150\,t$.
$H'_3 = -(H'_a + H'_b) = +0{,}385\,t$.
$V'_2 = \frac{7}{3}\cdot 0{,}705/3 + 0{,}235/3 + (2{,}235 - 1{,}350)/6 + 3{,}000 = 4{,}443\,t$.

$V^1a = -(M'_{12} + M'_{12})\,a - H'a\operatorname{tg}\varphi + (M'_{23} + M'_{32})/b + \frac{1}{2}qb = 4{,}443$ t;
(di sini ada suku baru, yaitu ½ qb = 3.000 t.)

$\alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + H'_3 = 0$ (1) $\quad -1{,}249\,X_1 - 0{,}680\,X_2 + 0{,}385 = 0$ (1)
$\beta_1X_1 + \beta_2X_2 + V'_2 = 0$ (2) $\quad -3{,}062\,X_1 - 2{,}524\,X_2 + 4{,}443 = 0$ (2)
$X_1 = -1{,}90$; $\quad X_2 = +4{,}05$

	1A	12	21	23	32	3B
$M'_{..} =$	+ 0,705	— 0,705	— 2,235	+ 2,235	— 1,350	+ 1,350
$M_{I..} =$	+ 6,830	— 6,810	— 1,310	+ 1,310	— 0,885	+ 0,885
$M_{II..} =$	— 8,950	+ 8,950	+ 5,910	— 5,910	— 2,000	+ 2,000
$M_{..} =$	— 1,415	+ 1,415	+ 2,365	— 2,365	— 4,235	+ 4,235 (tm)

$H_a = \frac{1}{3}\cdot 1{,}415t = 0{,}472\,t$; $H_b = -\frac{1}{9}\cdot 4{,}235t = -0{,}471t$; $\Sigma H = 0$
$V^o_a = \frac{1}{3}\cdot qb = 2{,}0t$; $V^o_b = \frac{8}{9}qb = 4{,}0t$ (satu sendi diganti dengan rol)

$\Delta V_a = H_a(h_1 + z - h_2)/l = -\frac{1{,}415}{3}\cdot\frac{8}{9} = -0{,}105t$.

$\Delta V_b = H_b(h_1 + z - h_2)/l = +0{,}105t$; $(\Delta V_a = -\Delta V_b)$
$V_a = V^o_a + \Delta V_a = 1{,}895t$; $V_b = V^o_b + \Delta V_b = 4{,}105t$.

Atau juga $V_a = (M_{12} + M_{21})/a + H_a \operatorname{tg} \varphi$

Gaya - gaya normal: $N_{12} = H_a \cos\varphi + V_a \sin\varphi = 0{,}472 . \frac{3}{4} + 1{,}895 . \frac{1}{5} = 1{,}870\, t.$

$N_{23} = H_a = H_b = 0{,}472\, t.$ Kedua-duanya *menekan*.

Goyangan-goyangan : Oleh karena X_1 terdapat negatif, maka kejadian I dulu harus di baca sebagai goyangan ke kanan, dan oleh karena X_2 positif, maka anggapan goyangan ke kiri pada titik 1 itu betul.

Titik 1 bergoyang mendatar sejauh $\delta_{1h} = -(9 X_1 + \frac{9}{5} X_2) h_1^2/3EI$ (ke kanan jika positif)

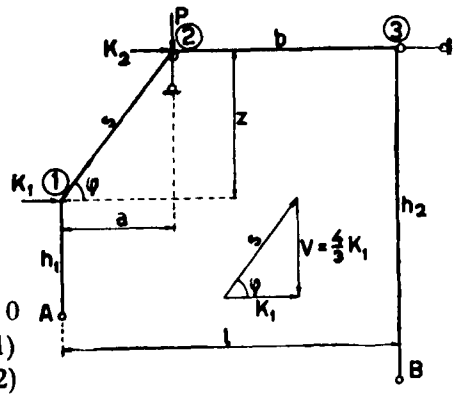
Titik 3 bergoyang mendatar sejauh $\delta_{3h} = -X_1 h_2^2/3EI$ (positif, ke kanan)

Titik 2 bergoyang mendatar sejauh $\delta_{2h} = \delta_{3h}$ dan vertikal sejauh $\delta_{2v} = -X_2 b^2/6EI$ (negatif berarti ke bawah).

§ 27a. Beban - beban berpusat melalui titik hubungan.

Kita menyelidiki akibat-akibatnya satu per satu.

Oleh karena adanya pendel-pendel di-2 dan di-3, tidak timbul momen-momen.



Gambar VII, 27c

1. *Akibat P vertikal melalui titik 2.*

$V_2' = P$ (ke atas), $H_3' = 0$; $M' = 0$

$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0$ ..... (1)

$\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + P = 0$ ..... (2)

$1{,}249\, X_1 + 0{,}680\, X_2 = 0$

$3{,}062\, X_1 + 2{,}524\, X_2 = P.$

$X_1 = -0{,}635\,(tm)$; $X_2 = 1{,}165\,(tm)$

$M_{1a} = -3{,}592 X_1 - 2{,}205 X_2 = -0{,}29\, P\, tm.$

$M_{3b} = -0{,}464 X_1 + 0{,}491 X_2 = +0{,}87\, P\, tm.$

$H_a = -M_{1a}/h_1 = \frac{1}{3} . 0{,}29\, P = 0{,}097\, P$; $H_b = -M_{3b}/h_2 = -\frac{1}{9} . 0{,}87P = -0{,}097\, P.$

$V_a^o = \frac{2}{5} P$; $V_b^o = \frac{1}{5} P$; $\Delta V = 0{,}097 . \frac{2}{9} P = 0{,}02\, P.$

$V_a = V_a^o - \Delta V$; $V_b = V_b^o + \Delta V.$

2. *Akibat K_2 mendatar ke kanan.*

$H_3' = -K_2$; $V_2' = 0$; $M' = 0$

$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 - K_2 = 0\,(1) \mid 1{,}249\, X_1 + 0{,}680\, X_2 = -K_2 \mid X_1 = -2{,}36\, K_2$

$\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 . \quad = 0\,(2) \mid 3{,}062\, X_1 + 2{,}524\, X_2 = 0 \quad \mid X_2 = +2{,}87\, K_2$

$M_{1a} = -3{,}592 X_1 - 2{,}205 X_2 = 2{,}15\, K_2$

$M_{3b} = -0{,}464 X_1 + 0{,}491 X_2 = 2{,}50\, K_2$

$H_a = -\frac{1}{5} . 2{,}15\, K_2 = -0{,}72\, K_2$; $H_b = -\frac{1}{9} . 2{,}50\, K_2 = -0{,}28\, K_2$

$H_a + H_b + K_2 = 0$

$V_b^o = -V_a^o = K_2 (h_1 + z)/l = \frac{7}{9} K_2$; $\Delta V = 0{,}28 . \frac{2}{3} K_2 = 0{,}06\, K_2$

$V_a = V_a^o - \Delta V$; $V_b = V_b^o + \Delta V.$

Apabila K_2 bekerja ke kiri, maka $H_3' = +K_2$ dst.

3. *Akibat K_1 melalui titik 1, ke kanan.*

K_1 diuraikan di dalam kompenenta V menurut garis 1 A dan komponenta S menurut garis 12

Ini menghasilkan : $V_2' = -\frac{4}{5} K_1$ dan $H_3' = -K_1$.

$1{,}249\, X_1 + 0{,}680\, X_2 = -K_1 \mid X_1 = -1{,}515\, K_1$

$3{,}062\, X_1 + 2{,}524\, X_2 = -\frac{4}{5} K_1 \mid X_2 = . \ 1{,}305\, K_1$

$M_{1a} = -3{,}592 X_1 - 2{,}205 X_2 = 2{,}56\, K_1$; $H_a = -\frac{1}{5} . 2{,}56\, K_1 = -0{,}85\, K_1$

$M_{3b} = -0{,}464 X_1 + 0{,}491 X_2 = 1{,}35\, K_1$; $H_b = -\frac{1}{9} . 1{,}35\, K_1 = -0{,}15\, K_1$

$H_a + H_b + K_1 = 0$

$V_b^o = -V_a^o = K_1 h_1/l = \frac{1}{3} K_1$; $\Delta V = \frac{2}{9} . 0{,}15\, K_1 = 0{,}033\, K_1$

$V_a = V_a^o - \Delta V$; $V_b = V_b^o + \Delta V.$

Apabila K_1 bekerja ke kiri, diisi: $H_3' = +K_1$ dan $V_2' = +\frac{4}{5} K_1$ dst.

§ 28. Dihitung sebagai pelengkung dua sendi.

$\delta_{hh} = \int y^2\, ds/EI$; ordinat y diukur secara vertikal terhadap garis AB ;

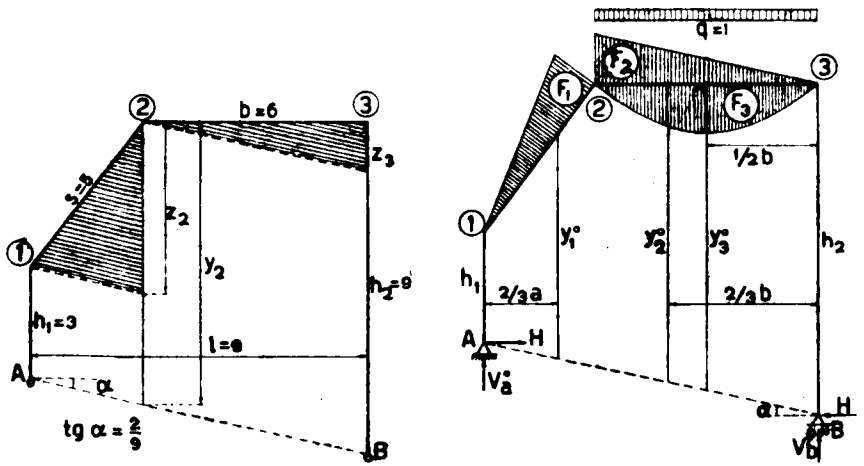
$\operatorname{tg} \alpha = 2/9$

Untuk tihang-tihang diisi, $ds = dy$

Untuk batang 1 2 diisi, $ds = dy . s/z_3 = \frac{15}{14} dy$

$y_3 = \frac{23}{3} m = \frac{23}{27} l = \frac{23}{9} h_1$

Untuk batang 2–3 terdapat, $ds = dy . b/z_3 = \frac{3}{2} dy$



Gambar VII, 28a

$$EI\,\delta_{hh} = \int_o^{h_1} y^2\,dy + \int_o^{h_2} y^2\,dy + \tfrac{15}{14}\int_{h_1}^{y_2} y^2\,dy + \tfrac{9}{2}\int_{y_2}^{h_2} y^2\,dy$$
$$= \tfrac{1}{3}h_1^3 + \tfrac{1}{3}h_2^3 + \tfrac{5}{14}(y_2^3 - h_1^3) + \tfrac{9}{2}(h_2^3 - y_2^3) =$$
$$= 9 + 243 + 51 + 243 = 821\,(m^3)$$

a. Beban merata q = 1 t/m′ di atas 2 - 3.

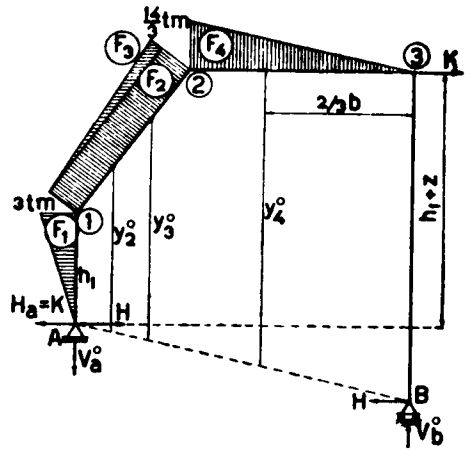
$V_a^o = \frac{1}{3}qb = 2\,t$; $V_b^o = \frac{2}{3}qb = 4\,t$. (sendi dan rol)
$M_2^o = V_a^c \,.\, a = 6\,tm.$
$M_c^o = \frac{1}{2}M_2^o + \frac{1}{8}qb^2$ (tengah-tengah batang 2 - 3)
F = luas bidang M^o; y^o = ordinat titik-beratnya.
$F_1 = \frac{1}{2}s\,M_2^o = \frac{1}{2}\,.\,5\,.\,6 = 15\,(tm^2)$; $y_1^o = \frac{5}{9}\,m.$
$F_2 = \frac{1}{2}b\,M_2^o = \frac{1}{2}\,.\,6\,.\,6 = 18\,(tm^2)$; $y_2^o = \frac{7}{9}\,m.$
$F_3 = \frac{1}{12}\,qb^3 = \frac{1}{12}\,.\,1\,.\,6^3 = 18\,(tm^2)$; $y_3^o = \frac{2}{3}\,m.$
$EI\,\delta_h^o = F_1y_1^o + F_2y_2^o + F_3y_3^o = 92 + 146 + 150 = 388\,(tm^3)$
$H = \delta_h^o/\delta_{hh} = 388/821 = 0{,}472\,t$ (bandingkan hasil di § 20)
$\Delta V = H \operatorname{tg}\alpha = 0{,}105\,t.$
$V_a = V_a^o - \Delta V = 1{,}895\,t$; $V_b = V_b^o + \Delta V = 4{,}105\,t.$
$M_x = M_x^o - Hy$. (y diukur dari garis AB)
$M_1 = Hh_1 = 1{,}416\,tm$ (di dalam § 20 terdapat 1,415)
$M_2 = M_2^o - H_{y_2} = 6 - 0{,}472\,.\,\frac{23}{3} = 2{,}38\,tm$ (2,355).

b. P vertikal melalui titik 2.

$V_a^o = \frac{2}{3}P$; $V_b^o = \frac{1}{3}P$; $M_2^o = V_a^o\,.\,a = 2\,P\,(tm)$
$F_1 = \frac{1}{2}s\,M_2^o = 5\,P$; $F_2 = \frac{1}{2}b\,.\,M_2^o = 6\,P.$
$EI\delta_h^o = F_1\,y_1^o + F_2\,y_2^o = (5\,.\,\frac{5}{9} + 6\,.\,\frac{7}{9})\,P = 79\,P.$
$H = \delta_h^o/\delta_{hh} = 79\,P/821 = 0{,}097\,P$; $\Delta V = H \operatorname{tg}\alpha.$

c. Akibat K mendatar ke kanan melalui 3.

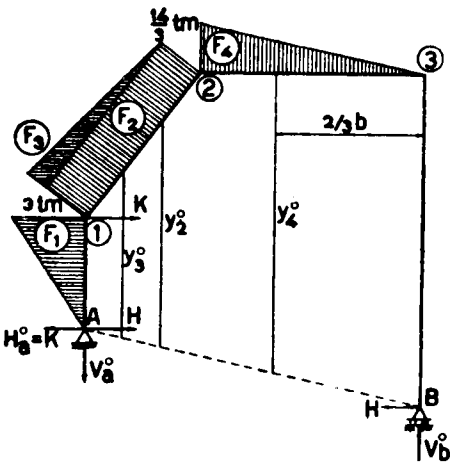
B diganti dengan rol.
$V_b^o = K(h_1 + z)/l = \frac{7}{8}K.$
$V_a^o = -\frac{7}{8}K$; $H_a^o = K$ (kekiri)
$M_1^o = H_a^o\,.\,h_1 = 3{,}0\,K.$
$M_2^o = V_b^o\,.\,b = \frac{14}{3}K.$
$F_1 = \frac{1}{2}h_1\,M_1^o = 4{,}5\,K$; $y_1^o =$
$= \frac{2}{3}h_1 = 2{,}0\,m.$
$F_2 = s\,.\,M_1^o = 15{,}0\,K$; $y_2^o = \frac{16}{3}\,m.$
$F_3 = \frac{1}{2}s\,(M_2^o - M_1^o) =$
$= \frac{25}{6}K$; $y_3^o = \frac{65}{9}\,m.$
$F_4 = \frac{1}{2}b\,M_2^o = 14\,K$; $y_4^o = \frac{73}{9}\,m.$
$EI\delta_h^o = \Sigma F\,.\,y^o = 228\,K\,(tm^3)$
$H = \delta_h^o/\delta_{hh} = K\,228/821 = 0{,}28\,K;$
$H_b = H;$
$H_a = H_a^o - H = 0{,}72K.$
$\Delta V = H \operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{9}H;$
$V_a = V_a^o - \Delta V.$



Gambar VII, 28b

d. Beban K mendatar ke kanan melalui 1.

$V_b^o = Kh_1/l = \frac{3}{8}K.$
$V_a^o = -\frac{3}{8}K$; $H_a^o = K.$
$M_1^o = H_a^o h_1 = 3K;$
$M_2^o = V_b^o\,.\,b = 2tm.$
$F_1 = \frac{1}{2}h_1\,M_1^o = 4{,}5\,K$; $y_1^o =$
$= \frac{2}{3}h_1 = 2{,}0\,m.$
$F_2 = s\,.\,M_2^o = 10{,}0\,K$; $y_2^o = \frac{16}{3}\,m$
$F_3 = \frac{1}{2}s(M_3^o - M_2^o) =$
$= 2{,}5\,K$; $y_3^o = \frac{41}{9}\,m$
$F_4 = \frac{1}{2}b\,.\,M_2^o = 6{,}0\,K\,.$; $y_4^o =$
$= \frac{73}{9}\,m.$
$EI\,\delta_{h1}^o = \Sigma F\,.\,y^o = 125\,K\,(tm^3)$
$H = K\,.\,125/821 = 0{,}15\,K$; $H_b =$
$= H$; $H_a = H_a^o - H = 0{,}85\,K.$

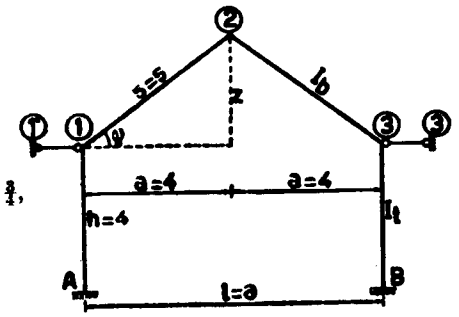


Gambar VII, 28c

Ternyata beda di antara pendapat-pendapat menurut kedua-dua cara tidak begitu kentara.

§ 29. Rangka-payon simetris.

Kaki-kaki tihang terjepit: bangunan ini juga mempunyai goyangan berganda dua.



Gambar VII, 29

$h = 4\ m$; $l = 2a = 8\ m$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{4}$, jadi

$s = 5\ m$ dan $z = 3\ m$.

$I_t : I_b = 4 : 15$

$\mu_{1a} : \mu_{12} = \frac{4}{4} : \frac{15}{6} = 1 : 3$

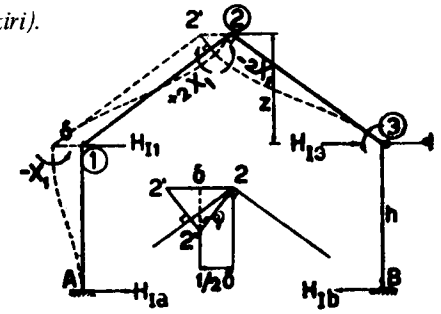
$\mu_{1a} = \mu_{3b} = 0{,}25$; $\mu_{12} = \mu_{32} = 0{,}75$

$\mu_{21} = \mu_{23} = 0{,}50$ (simetris).

Untuk mencegah geseran, kita memerlukan dua pendel (fiktif), dan kita pilih pendel-pendel mendatar pada 1 dan 3, yang simetris terhadap s.s.l., hal mana memudahkan pekerjaan menghitung nanti.

1. *Akibat goyangan titik 1 (ke kiri).*

Pendel di-1 kita lenyapkan, tetapi pendel di-3 tetap ada, kemudian titik 1 digeser ke kiri sejauh δ. Titik 2 mengikutinya sehingga akan jatuh di 2′ apabila ujung 3 tidak dipegang. Oleh karena ini, titik 2 jatuh di 2″ yang terdapat menurut diagram Williot:



Gambar 29a

$2\ 2' = //\delta$; $2'2'' \perp 2\ 1$; $2\ 2'' \perp 2\ 3$.

$\delta_{1a} = \delta$; $\delta_{12} = \delta_{21} = 2'2'' = \frac{1}{2}\,\delta / \sin\varphi = \frac{5}{8}\,\delta$; $\delta_{23} = 2\ 2'' = \frac{5}{8}\,\delta$ (simetris)

$X^o_{1a} = -X_1$.

$X^o_{21} = X^o_{12} = +X_1(15/4).(4/5)^2(5/6) = 2\,X_1$; $X^o_{23} = X^o_{32} = -2\,X_1$.

Daftar pengrataan yang menghasilkan M_I

	A1	1A 0,25	12 0,75	21 0,50	23 0,50	32 0,75	3B 0,25	B3
	$-1{,}000\,X_1$	$-1{,}000\,X_1$	$+2{,}000\,X_1$	$+2{,}000\,X_1$	$-2{,}000\,X_1$	$-2{,}000\,X_1$		
	$-0{,}125\,X_1$	$-0{,}250\,X_1$	$-0{,}750\,X_1$	$-0{,}375\,X_1$	$+0{,}750\,X_1$	$+1{,}500\,X_1$	$+0{,}500\,X_1$	$+0{,}250\,X_1$
			$-0{,}094\,X_1$	$-0{,}188\,X_1$	$-0{,}188\,X_1$	$-0{,}094\,X_1$		
	$+0{,}012\,X_1$	$+0{,}024\,X_1$	$+0{,}070\,X_1$	$+0{,}035\,X_1$	$+0{,}035\,X_1$	$+0{,}070\,X_1$	$+0{,}024\,X_1$	$+0{,}012\,X_1$
			$-0{,}018\,X_1$	$-0{,}035\,X_1$	$-0{,}035\,X_1$	$-0{,}018\,X_1$		
	$+0{,}002\,X_1$	$+0{,}004\,X_1$	$+0{,}014\,X_1$	$+0{,}007\,X_1$	$+0{,}007\,X_1$	$+0{,}014\,X_1$	$+0{,}004\,X_1$	$+0{,}002\,X_1$
			$-0{,}003\,X_1$	$-0{,}007\,X_1$	$-0{,}007\,X_1$	$-0{,}003\,X_1$		
		$+0{,}001\,X_1$	$+0{,}002\,X_1$			$+0{,}002\,X_1$	$+0{,}001\,X_1$	
M_I .. =	$-1{,}111\,X_1$	$-1{,}221\,X_1$	$+1{,}221\,X_1$	$+1{,}437\,X_1$	$-1{,}437\,X_1$	$-0{,}529\,X_1$	$+0{,}529\,X_1$	$+0{,}264\,X_1$
M_{II} .. =	$-0{,}264\,X_2$	$-0{,}529\,X_2$	$+0{,}529\,X_2$	$+1{,}437\,X_2$	$-1{,}437\,X_2$	$-1{,}221\,X_2$	$+1{,}221\,X_2$	$+1{,}111\,X_2$

$H_{Ia} = -(M_{Ia1} + M_{I1a})/h = \frac{1}{4}(1{,}111 + 1{,}221)\,X_1 = 0{,}538\,X_1$

$H_{Ib} = -(M_{Ib3} + M_{I3b})/h = -\frac{1}{4}(0{,}264 + 0{,}529)\,X_1 = -0{,}198\,X_1$

$V_{Ia} = V_{I1} = (M_{I12} + M_{I32})/l = \frac{1}{8}(1{,}221 - 0{,}529)X_1 = 0{,}086\,X_1$.

$V_{Ib} = -V_{Ia} = -0{,}086\,X_1$.

Kita pelajari bagian 2 1A dan menentukan $\Sigma M_2 = 0$.

$-H_{I1}\,.\,z - H_{Ia}(h + z) + V_{Ia}\,.\,\frac{1}{2}\,l - M_{Ia1} - M_{I21} = 0$

$H_{I1} = \frac{1}{8}(-0{,}583\,.\,7 + 0{,}086\,.\,4 + 1{,}111 - 1{,}437)\,X_1 = -1{,}354\,X_1 = \alpha_1 X_1$

Dengan cara serupa pada bagian 2 3 B terdapat:

$H_{I3} = \frac{1}{8}(0{,}198\,.\,7 + 0{,}086\,.\,4 - 0{,}264 + 1{,}437)\,X_1 = 0{,}968\,X_1 = \beta_1 X_1$

Atau juga : $H_{I1} = -H_{Ia} - (M_{I\,12} + M_{I\,21})\,/\,z + V_{Ia}\operatorname{Cotg}\varphi$.

Kontrol: $\Sigma H_I = H_{Ia} + H_{Ib} + H_{I1} + H_{I3} = 0$; $\Sigma V_I = 0$.

II *Akibat goyangan 3 (ke kanan).*

Oleh karena keadaan simetris, kita dapat menggunakan pendapat-pendapat di atas secara tukar menukar antimetris; lihat daftar M_{II}. . .di bawah M_I di atas.

Jadi $H_{II1} = -0{,}968\,X_2 = \alpha_2 X_2$

$H_{II3} = +1{,}354\,X_2 = \beta_2 X_2$

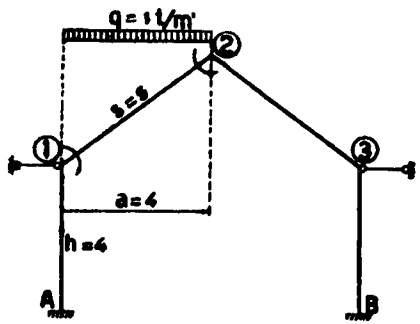
III *Beban luar.*

a. Kita ambil muatan merata.

$q = 1\ t/m'$ di atas 1-2.

$M^o_{12} = +\frac{1}{12}\,qa^2 = +1{,}333\ tm$.

$M^o_{21} = -1{,}333\ tm$



Gambar VII, 29b

Diratakan tanpa geseran, menghasilkan $M'_{..}$

	A1	1A 0,25	12 0,75	21 0,50	23 0,50	32 0,75	3B 0,25	B3
			+ 1,333	— 1,333				
			+ 0,333	+ 0,667	+ 0,667	+ 0,333		
	— 0,208	— 0,416	— 1,250	— 0,625	— 0,125	— 0,250	— 0,083	— 0,042
			+ 0,188	+ 0,375	+ 0,375	+ 0,188		
	— 0,023	— 0,047	— 0,141	— 0,070	— 0,070	— 0,141	— 0,047	— 0,023
			+ 0,035	+ 0,070	+ 0,070	+ 0,035		
	— 0,005	— 0,009	— 0,026	— 0,013	— 0,013	— 0,026	— 0,009	— 0,004
			+ 0,007	+ 0,013	+ 0,013	+ 0,007		
	— 0,001	— 0,002	+ 0,005			— 0,005	— 0,002	— 0,001
$M'_{..}$ =	— 0,237	— 0,474	+ 0,474	— 0,916	+ 0,916	+ 0,141	— 0,141	— 0,070
$M_{I..}$ =	— 0,389	— 0,430	+ 0,430	+ 0,502	— 0,502	— 0,185	+ 0,185	+ 0,093
$M_{II..}$ =	— 0,253	— 0,506	+ 0,506	+ 1,380	— 1,380	— 1,170	+ 1,170	+ 1,065
$M_{..}$ =	— 0,879	—1 ,410	+ 1,410	+ 0,966	— 0,966	— 1,214	+ 1,214	+ 1,088

$H'_a = -(M'_{a1} + M'_{1a})/h = \frac{1}{4}(0{,}237 + 0{,}474)X_1 = 0{,}178\,t$; $H'_b = \frac{1}{4}(0{,}070 + 0{,}141) = 0{,}053\,t$

$V^o_a = \frac{3}{8}ql = 3{,}0\,t$; $V^o_b = \frac{1}{8}ql = 1{,}0\,t$. (susunan statis tertentu)

$\Delta V' = (M'_{12} + M'_{32})/l = \frac{1}{8}(0{,}474 + 0{,}141) = 0{,}077\,t.$

$V'_a = V^o_a + \Delta V' = 3{,}077\,t$; $V'_b = V^o_b - \Delta V' = 0{,}923\,t.$

$-H'_1 z + V'_a \cdot \frac{1}{2}l - H'_a \cdot (h + z) - \frac{1}{2}qa^2 - M'_{a1} - M'_{21} = 0$

$H'_1 = \frac{1}{8}(3{,}077 \cdot 4 - 0{,}178 \cdot 7 - 8{,}000 + 0{,}237 + 0{,}916) = +1{,}404\,t.$

$H'_3 = \frac{1}{8}(-0{,}923 \cdot 4 - 0{,}053 \cdot 7 + 0{,}070 - 0{,}916) = -1{,}636\,t.$

$\Sigma H' = H'_a + H'_b + H'_1 + H'_3 = 0$ dan $\Sigma V = qa.$

Atau juga : $H'_1 = -H'_a - (M'_{12} + M'_{21})z + V'_a \cot g\,\varphi.$

$$\begin{array}{l|l|l} \alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + H'_1 = 0 & -1{,}354\,X_1 - 0{,}968\,X_2 + 1{,}404 = 0 & X_1 = +0{,}350\ tm. \\ \beta_1X_1 + \beta_2X_2 + H'_3 = 0 & 0{,}968\,X_1 + 1{,}354\,X_2 - 1{,}636 = 0 & X_2 = +0{,}956\ tm. \end{array}$$

Hasil-hasil $M_{I..}$ **dan** $M_{II..}$ **sebagai** $f(X_1)$ **dan** $f(X_2)$ **ditulis** di bawah **hasil-hasil** $M'_{..}$ di atas **dan kemudian** di jumlahkan:

$M = M' + M_I + M_{II}.$

$H_a = \frac{1}{4}(0{,}879 + 1{,}410) = +0{,}572\,t$; $H_b = -\frac{1}{4}(1{,}088 + 1{,}214) = -0{,}573\,t.$

$\Delta V = \frac{1}{8}(1{,}410 - 1{,}214) = 0{,}025\,t.$

$V_a = 3{,}025\,t$; $V_b = 0{,}975\,t.$

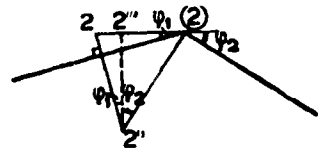
Sebagai kontrol:

$V_a = V_{Ia} + V_{IIa} + V'_a = 0{,}086\,X_1 - 0{,}086\,X_2 + 3{,}077 = 3{,}025\,t$, dst.

Goyangan-goyangan: $\delta_1 = -X_1h^3/6EI_t$; $\delta_3 = +X_2h^3/6EI_t$.

$\delta_{2h} = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_3)$; $\delta_{2v} = \frac{1}{2}(\delta_1 \div \delta_3)\cot g\,\varphi.$

Apabila bangunan tidak simetris, maka diagram Williot terlihat seperti pada gambar VII, 29 ini.



Gambar VII, 30

$2\,2'' = 2\,2'\cos\varphi_1/\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$

$2'2'' = 2''2'''/\cos\varphi_1 = 2\,2''\cos\varphi_2/\cos\varphi_1$ dst.

b. Beban vertikal P melalui titik 2.

$H'_1 = \frac{1}{2}P\cot g\,\varphi = \frac{4}{5}P$; $H'_3 = -H'_1 = -\frac{4}{5}P$; $M' = 0$ semuanya

$$\begin{array}{l|l|l} \alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \frac{4}{5}P = 0 & 1{,}534\,X_1 + 0{,}968\,X_2 = +\frac{4}{5}P & X_1 = X_2 = 0{,}286\,P. \\ \beta_1X_1 + \beta_2X_2 - \frac{4}{5}P = 0 & 0{,}968\,X_1 + 1{,}534\,X_2 = +\frac{4}{5}P & H_a = 0{,}224\,P, \text{ dst.} \end{array}$$

c. Muatan mendatar P ke kanan melalui titik 1

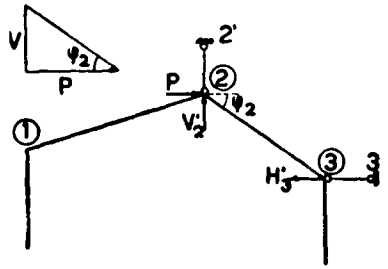
$H'_1 = -P$; $H'_3 = 0$; $M' = 0$

$\alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 - P = 0$

$\beta_1X_1 + \beta_2X_2 = 0$

d. Muatan mendatar P ke kanan melalui titik 2.

$H'_1 = H'_3 = -\frac{1}{2}P$ (simetri)



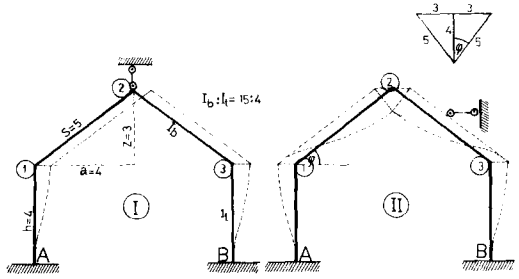
Gambar VII, 31

Jika keadaan *tidak* simetris, pendel 1 1′ (atau 3 3′) diganti dengan pendel vertikal 2 2′. Menurut gambar terlihat:

$V'_2 = +P\,\mathrm{tg}\,\varphi_2$; $H'_5 = -P.$

§ 29a. Cara lain

Untuk mencegah goyangan, kita mengadakan dua pendel di



Gambar VII, 32

titik-puncak 2, satu mendatar, satu vertikal.

I. Pendel mendatar hapus, goyangan ke kanan oleh gaya H_I (gambar kiri). Oleh karena keadaan simetris, momen di titik 2 = 0, jadi seolah-olah ada sendi di situ dan boleh menggunakan cara di dalam § 17.

$\mu_{1a} : \mu_{12} = 4\ I_t/h : 3\ I_b/s = 4.4/4 : 3.15/5 = 4:9;$

$\mu_{1a} = 4/13$

$\mu_{12} = 9/13$

	A1 = B3	1A = 3B 4/3	12 = 32 9/13
$X^\circ_{..}$	$+ X_1$ $- 2/13$"	$+ X_1$ $- 4/13$"	$- 9/13\ X_1$
$M_{I..}$	$+ 11/13\ M_1$	$+ 9/13\ X_1$	$- 9/13\ X_1$
atau	$+ 0{,}846\ X_1$	$+ 0{,}692\ X_1$	$- 0{,}692\ X_1$

$X^\circ_{12} = X^\circ_{32} = 0$

$H_{Ia} = H_{Ib} = (M_{I,a1} + M_{I,1a})/h = - 5/13\ X_1$

$H_I = - (H_{Ia} + H_{Ib}) = 10/13\ X_1 = 0{,}769\ X_1 = \alpha_1 X_1$

$V_{Ia} = M_{I,12}/a + H_{Ia}\ \mathrm{tg}\ \varphi$

$V_{Ib} = - M_{I,32/a} - H_{Ib}\ \mathrm{tg}\ \varphi = - V_{Ia}$

$V_I = - (V_{Ia} + V_{Ib}) = 0 = \beta_1 X_1$, jadi $\beta_1 = 0.$

II. Pendel vertikal hapus, titik 2 ditekan ke bawah dengan gaya V_{II}. (gambar kanan). Sekarang ada momen di titik-titik 2, jadi

$\mu_{1a} : \mu_{12} = 4I_t/h : 4I_b/s = 1 : 3;$

$\mu_{1a} = \mu_{3b} = ¼;\ \mu_{12} = \mu_{32} = 3/4;\ \mu_{21} = \mu_{23} = ½.$

$X^\circ_{1a} : X^\circ_{12} = - I_{t\ 1a}/h^2 : I_{b\ \ 12}/s^2 = - 4.3/16 : 15.5/25 = -1 : 4.$

$X^\circ_{1a} = X^\circ_{a1} = X_2;\ X^\circ_{12} = X^\circ_{21} = + 4\ X_2;\ X^\circ_{b3} = X^\circ_{3b} = + X_2;\ X^\circ_{32} = X^\circ_{23} = - 4\ X_2$

	A 1	1 A ¼	12 3/4	21 ½	23 ½	32 3/4	3B ¼	B3
$X^\circ_{..}$	$- 1{,}000\ X_2$	$- 1{,}000\ X_2$	$+ 4{,}000\ X_2$	$+ 4{,}000\ X_2$	$- 4{,}000\ X_2$	$- 4.000\ X_2$	$+ 1{,}000\ X_2$	$+ 1{,}000\ X_2$
	$- 0{,}375$"	$- 0{,}750$ "	$- 2{,}250$ "	$- 1{,}125$ "	$+ 1{,}125\ X$	$+ 2{,}250$ "	$+ 0{,}750$ "	$+ 0{,}375$ "
$M_{II..}$	$- 1{,}375\ X_2$	$- 1{,}750\ X_2$	$- 1{,}750\ X_2$	$+ 2{,}875\ X_2$	$- 2{,}875\ X_2$	$- 1{,}750\ X_2$	$+ 1{,}750\ X_2$	$+ 1{,}375\ X_2$

Kejadian bersifat simetris, cara meratakan momen-momen ujungnya juga harus simetris, supaya mencapai pendapat-pendapat yang exakta (mulai dengan titik 1 dan titik 3).

$H_{IIa} = - (M_{II,a1} + M_{ii,1a})/h = 0{,}78\ X_2 = - H_{IIb};$

$H_{II} = - (H_{IIa} + H_{IIb}) = 0;\ \alpha_2 = 0.$

$V_{IIa} = (M_{II,12} + M_{II,21})/a + H_{IIa}\ \mathrm{tg}\ \varphi = (4{,}625/4 + 0{,}781.3/4)X_2$

$= - 3{,}482\ X_2 = \beta_2\ X_2$

III. Akibat beban tanpa goyangan. Pendapat-pendapat $M'_{..}$ di atas boleh dipergunakan.

	A 1	!A	12	21	23	32	3B	B3
$M'_{..}$ tm	$- 0{,}237$	$- 0{,}474$	$+ 0{,}474$	$- 0{,}916$	$+ 0{,}916$	$+ 0{,}141$	$- 0{,}141$	$- 0{,}070$
M_I "	$+ 0{,}254$	$+ 0{,}208$	$- 0{,}206$	–	–	$- 0{,}208$	$+ 0{,}208$	$+ 0{,}254$
M_{II}"	$- 0{,}900$	$- 1{,}183$	$+ 1{,}183$	$+ 1{,}880$	$-1{,}880$	$- 1{,}138$	$+ 1{,}138$	$+ 0{,}900$
$M_{..}$ tm	$- 0{,}833$	$- 1{,}404$	$+ 1{,}404$	$+ 0{,}964$	$- 0{,}964$	$- 1{,}205$	$+ 1{,}205$	$+ 1{,}084$

$H'_a = - (M'_{a1} + M'_{1a})/h = 0{,}711/4 = 0{,}178/4$ t;

$H'_b = - (M'_{b3} + M'_{3b})/h = 0{,}211/4 = 0{,}053$ t.

$H' = - (H'_a + H'_b) = - 0{,}231$ t.

$V'_a = \frac{1}{2} qa + (M'_{12} + M'_{21})/a + H'_a \operatorname{tg}\varphi = 2{,}000 - 0{,}442/4 + 0{,}178.3/4 =$

2,024 t.

$V_b = -(M'_{32} + M'_{23})/a - H'_b \operatorname{tg}\varphi = -1{,}057/4 - 0{,}053.3/4 = -0{,}304$ t.

$V' = q\,a - (V'_a + V'_b) = 4{,}000 - 2{,}024 + 0{,}304 = 2{,}280$ t

$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + H' = 0; X_1 = -H'/\alpha_1 = 0{,}231/0{,}76\, q = 0{,}300$ tm

(sebab $\alpha_2 = 0$)

$\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + V' = 0; X_2 = -V'/\beta_2 = 2{,}280/3{,}484 = 0{,}654$ tm

(sebab $\beta_1 = 0$)

Ternyata, cara kedua ini lebih ringkas (karena keadaan simetris).

$H_a = -(M_{a1} + M_{1a})/a = 2{,}287/4 = 0{,}572$ t; $H_b = -2{,}289/4 = -0{,}572$ t;

$H_a + H_b = 0$.

$V_a = 3/8\, ql + (M_{a1} + M_{b3})/l = 3{,}000 + 0{,}201/8 = 3{,}025$ t; $V_b = \frac{1}{2} ql - V_a$

$= 0{,}975$ t. atau juga,

$V_a = 3/8\, ql + (M_{12} + M_{32})/l = 3{,}000 + 0{,}199/8 = 3{,}025$ t.

Lagi pula,

$V_a = \frac{1}{2} qa + (M_{12} + M_{21})/a + H_a \operatorname{tg}\varphi = 2{,}000 + 2{,}378/4 + 0{,}572.3/4 =$

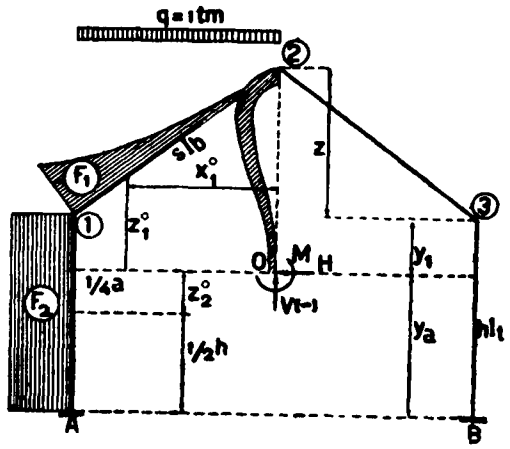
$= 2{,}000 + 0{,}595 + 0{,}431 = 3{,}026$ t.

§ 29b. Dihitung sebagai pelengkung terjepit.

$k = (h/s)(I_b/I_t) = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{4} = 3$

$y_1 = \dfrac{\int y'\, ds/EI}{\int ds\, EI}$ (y' diukur dari garis 13)

$y_1 = \dfrac{-\frac{1}{2} sz/I_b + \frac{1}{2} h^2/I_t}{s/I_b + h/I_t} = -\dfrac{\frac{1}{2}(z - kh)}{1 + k} = \frac{9}{32} h.$



Gambar VII. 33

Ini menentukan letaknya titik-berat lenturan O.

$$\delta_{hh} = \int y^2\, ds/EI = 2\left(\frac{1}{EI_t}\int_{-y_a}^{y_1} y^2\, dy + \frac{1}{EI_b}\cdot\frac{s}{z}\int_{y_1}^{y_1+z} y^2\, dy\right) =$$

$$= 2\left[\frac{1}{EI_t}\left\{\tfrac{1}{12} h^3 + (7/32)^2 h^3\right\} + \frac{1}{EI_b}\left\{\tfrac{1}{12} sz^2 + s(\tfrac{1}{2} z + y_1)^2\right\}\right].$$

$\delta'_{hh} = \delta_{hh} EI_b/s = 2(1/4 + 147/32^2 + 3/64 + 441/32^2)h^2 = (223/128)h^2.$

$$\delta_{vv} = \frac{2}{EI_t} h(\tfrac{1}{2} l)^2 + \frac{2}{EI_b}\cdot\frac{s}{1/2l}\cdot\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2} l)^3$$

$\delta'_{vv} = \delta_{vv} EI_b/s = 2k(\frac{1}{2} l)^2 + \frac{2}{3}(\frac{1}{2} l)^2 = \frac{5}{8} l^2.$

$\varphi_{mm} = 2(h/EI_t + s/EI_b)$

$\varphi_{mm} = \varphi_{mm} EI_b/s = 2(k + 1) = 8.$

Beban merata q = 1 t/m di atas 1 - 2

$M_1^o = -\frac{1}{2} qa^2 = -\frac{1}{8} ql^2 = -8{,}000\ tm.$

$F_1 = \frac{1}{8} s M_1^o = -\frac{1}{24} ql^2 s; z_1^o = \frac{1}{4} z + y_1 = (\frac{3}{16} + \frac{9}{32})h = \frac{15}{32} h; x_1^o = -\frac{1}{8} l.$

$F_2 = hM_1^o = -\frac{1}{8} ql^2 h; z_2^o = y_1 - \frac{1}{2} h = -\frac{7}{32} h; x_2^o = -\frac{1}{2} l.$

$\delta_h^o = F_1 z_1^o/EI_b + F_2 z_2^o/EI_t.$

$(\delta_h^o)' = \delta_h^o EI_b/s = -\frac{1}{24} ql^2 \cdot \frac{15}{32} h + \frac{1}{8} k\, ql^2 \cdot \frac{7}{32} h = \frac{1}{16} ql^2 h = \frac{1}{8} qlh^2.$

$H = (\delta_h^o)'/\delta'_{hh} = \frac{1}{8} \cdot \frac{128}{223} ql = 128/223t. = 0{,}574\ t$ (0,572 t menurut § 22)

$\delta_v^o = -(F_1 x_1^o/EI_b + F_2 x_2^o/EI_t)$

$(\delta_v^o)' = -\frac{1}{24} ql^2 \cdot \frac{3}{8} l - \frac{1}{8} ql^2 k \frac{1}{2} l = -\frac{13}{64} ql^3$

$V = (\delta_v^o)'/\delta'_{vv} = -\frac{13}{64} \cdot \frac{3}{8} ql = -\frac{39}{40} t = -0{,}975\ t.$

$(\varphi_m^o)' = \frac{1}{24} ql^2 + 3 \cdot \frac{1}{8} ql^2 = \frac{5}{12} ql^2.$

$M = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{8} ql^2 = \frac{10}{3} tm = 3{,}333\ tm.$

$M_a = M_a^o - Hy_a + Vx_a + M = -8{,}000 + \frac{128}{225} \cdot \frac{23}{32} \cdot 4 + 0{,}975 \cdot 4 + 3{,}333 = -8{,}000 + 8{,}883 = +0{,}883\ tm$ (0,879).

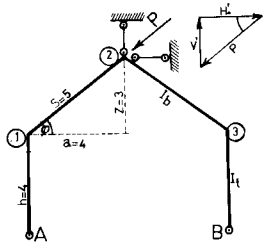
$V_a = \frac{1}{2} ql. + V = (4 - 0{,}975)\ t = 3{,}025\ t$, dst.

§ 30. **Bangunan seperti di atas, tetapi A dan B sendi.**

I. Pendel mendatar hapus, goyangan ke **kiri** setelah diratakan, terdapat

$M_{I,1a} = M_{I,3b} = -X_1$; $M_{I,12} = M_{I,32} + X_1$; $M_{I,21} = M_{I,23} = 0$

$H_I = 2\, M_{I,1a}/h = -2\, X_1/h = -2 \cdot X_1/h = \alpha_1\, X_1/h$; $V_I = 0$.



Gambar VII, 34

II. Pendel vertikal hapus, tekanan ke **bawah.**

$\mu_{1a} : \mu_{12} = 3\, I_t/h : 4\, I_b/s = 3.4/4 : 4.15/5 = 1 : 4$: $\mu_{1a} = \mu_{3b} = 1/5$

$\mu_{12} = \mu_{32} = 4/5$

	1 A = – 3 B 1/5	12 = – 32 4/5	21 = – 23 ½
$X^o_{..}$	– 1,000 X_2	+ 8,000 X_2	+ 8,000 X_2
	– 1,400 "	– 5,600 "	– 2,800 "
$M_{II..}$	– 2,400 X_2	+ 2,400 X_2	+ 5,200 X_2

$X^o_{1a} : X^o_{12} = -I_t\, \delta_{1a}/h^2 : 2\, I_b\, \delta_{12}/s^2 = -4.3/16 : 2.15/5/25 = -1 : 8$;

$X^o_{1a} = -X_2$; $X^o_{12} = 8\, x_2$

$H_{IIa} = -M_{II,1a}/h = 2{,}4\, X_2/h = -H_{IIb}$; $H_{II} = 0$; $\alpha_2 = 0$

$V_{IIa} = (M_{II,12} + M_{II,21})/a + H_{IIa}$ $\quad tg\, \varphi = 9{,}4\, X_2/h = V_{IIb}$

$V_{II} = -18{,}8\, X_2/h = \beta_2\, X_2/h$.

III. Akibat beban P // 2 – 1, bekerja di titik 2; $M'_{..} = 0$

$H' = P \cos \varphi = 0{,}8\ P$; $V' = P \sin \varphi = 0{,}6\ P$.

$X_1 = 0{,}8/2.\ P\, h = 0{,}4\ Ph$; $X_2 = 0{,}6/18{,}8.\ Ph = 3/94.\ Ph$.

	1A	12	21	23	32	3B
$M_{I..}/Ph$	– 2/5	+ 2/5	–	–	+ 2/5	– 2/5
$M_{II..}/Ph$	– 18/235	+ 18/235	+ 39/235	– 18/235	– 18/235	+ 18/135
$M../Ph$	–112/235	+ 112/235	+ 39/235	– 39/235	+ 76/235	– 26/235

$H_a = 112/235.P$; $H_b = 76/235.P$

$H_a + H_b = 188/235.\ P = 0{,}8\ P = P \cos \varphi$

$V_a = 151/235 + 3/4.\ 112/235)\ P = P$

$V_b = (-37/235 - 3/4.\ 76/235)\ P = -94/235\ P = -0{,}4$;

$V_a + V_b = 0{,}6\ P = P \sin \varphi$

Kontrol: $V_a = \frac{1}{2} P \sin \varphi + P \cos \varphi.\ (h+z)/1 = (3/10 + 4/5.\ 7/8) = P$.

$V_b = \frac{1}{2} P \sin \varphi - P \cos \varphi\ (h + z)/1 = -0{,}4\ P$.

§ **30a. Dihitung sebagai pelengkung dua sendi (gb. VII, 32 a).**

$s = 5/4\ h$; $a = h$; $z = 3/4\ h$; $h + z = 7/4\ h$.

$k = (h/s)\ (I_b/I_t) = 4/5.\ 15/4 = 3$.

$\delta_{hh} = \int y^2\, ds/EI = 2 \int_o^h y^2\, dy/EI_t + 2 \int y^2\, dy/EI_t + 2 \int y^2\, s/z\, EI_b =$

$= 2\, h^3/3\, EI_t + 2\, s\, [\ (h+z)^2 + (h+z)h + h^2\ ]\ /\ 3\, EI_b =$

$\delta'_{hh} = \delta_{hh}\, EI_b/b = 2/3\ kh^2 + 2/3\ h^2\ (49/10 + 7/4 + 1) = 47/8\ h^2$

A dijadikan rol.

$V_b = -P\, u/2a = -2/5\ P$; $H^o_b = -4/5\ P$ (ke luar);

$V_a = P \sin \varphi - V_b = P$.

$M_2^\circ = V_a.a = Ph$; $M_3^\circ = 4/5\ Ph$. Kita menggunakan momen-area method.

$F_1 = F_2 = \frac{1}{2}\ Phs$; $y_1 = y_2 = h + 2/3\ z = 3/2$

$F_3 = 2/5\ P\ sh$; $y_3 = h + 1/3\ z = 5/4\ h$.

$F_4 = 2/5\ Ph^2$; $Y_4 = 2/3\ h$.

$\delta_h^\circ = (F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3)/El_b + F_4 y_4 /EI_t = 2\ Psh^2/El_b + 4\ Ph^3/15\ El_t$

$(\delta_h^\circ)' = \delta_h^\circ . El_b/s = (2 + 4/15\ k)\ Ph^2 = 14/5\ Ph^2$

$H = (\delta_h^\circ)' / \delta'_{hh} = 8/47 . 14/5\ P = 112/235\ P = H_a$ ke dalam

$H_b = H_b^\circ + H = -\ 76/235\ P$ (ke luar)

$M_1 = -\ Hh = -\ 112/235\ P\ h$; $M_2 = M_2^\circ - H\ (h + z) =$

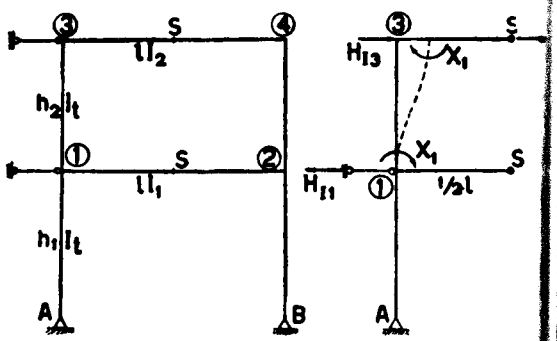
$(1 - 112/235.7/4)\ ph = 39/235\ Ph.$

$M_3 = M_3^\circ - Hh = (4/5 - 112/235)\ Ph = 76/235\ Ph.$

§ 31. Portal bertingkat dua, simetris.

$h_1 : h_2 : l = 9 : 8 : 12$

$I_t : I_1 : I_2 = 1 : 5 : 3$



Gambar VII, 35

Untuk menghindari geseran kita mengadakan dua pendel mendatar, di 3 dan di 1.

Sebagai akibat dari goyangan melulu, titik-titik S di tengah-tengah balok-balok tidak menahan momen, jadi seolah-olah ada sendi di situ. Untuk memudahkan hitungan, kita dapat mempelajari separoh bangunan saja, seperti terlukis di gambar kanan, guna mempelajari akibat goyangan pribadi.

Penentuan besaran-besaran μ disesuaikan dengan adanya sendi-sendi di-S.

$\mu_{31} : \mu_{3s} = 4\ I_t/h_2 : 3I_2/\frac{1}{2}l = 4 . \frac{1}{8} : 3 . \frac{3}{8} = 1 : 3$; $\mu_{31} = 0{,}25$; $\mu_{3s} = 0{,}75$

$\mu_{1a} : \mu_{1s} : \mu_{13} = 3I_t/h_1 : 3I_1/\frac{1}{2}l : 4I_t/h_2 = 3 . \frac{1}{9} : 3 . \frac{5}{8} : 4 . \frac{1}{8} = 2 : 15 : 3.$

$\mu_{1a} = 0{,}10$; $\mu_{1s} = 0{,}75$; $\mu_{13} = 0{,}15$.

I. *Akibat goyangan palang 3 4 melulu (ke kanan).*

$X_{31}^\circ = X_{13}^\circ = + X_1$

	1A 0,10	1S 0,75	13 0,15	31 0,25	3S 0,75
			+ 1,000 X_1	+ 1,000 X_1	
			− 0,125 X_1	− 0,250 X_1	− 0,750 X_1
	− 0,088 X_1	− 0,656 X_1	− 0,131 X_1	− 0,066 X_1	
			+ 0,008 X_1	+ 0,016 X_1	+ 0,050 X_1
	− 0,001 X_1	− 0,006 X_1	− 0,001 X_1		
$M_{I..}$ =	− 0,089 X_1	− 0,662 X_1	+ 0,751 X_1	+ 0,700 X_1	− 0,700 X_1

$H_{13} = 2(M_{I31} + M_{I13})/h_2 = 2(0{,}700 + 0{,}751)\ X_1/h_2 = 2{,}902\ X_1/h_2 =$
$= \alpha_1 X_1/h_2$

$H_{I1} = -\ H_{I3} + 2M_{1a}/h_1 = -(2{,}902/h_2 + 0{,}178/h_1)X_1 = -\ 3{,}060\ X_1/h_2$
$= \beta_1 X_1/h_2$

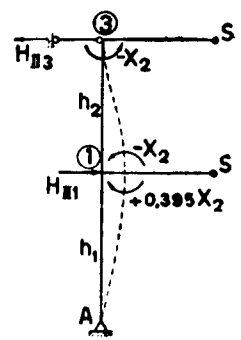
II. *Palang 1 2 melulu bergoyang (ke kanan).*

$X_{13}^\circ = X_{31}^\circ = -\ X_2$; $X_{1a}^\circ = +\ \frac{1}{2}(h_2/h_1)^2 X_2 = +\ \frac{1}{2}(\frac{8}{9})^2 X_2 = +\ 0{,}395 X_2$.

	1A 0,10	1S 0,75	13 0,15	31 0,25	3S 0,75
	+ 0,395 X_2		− 1,000 X_2	− 1,000 X_2	
			+ 0,125 X_2	+ 0,250 X_2	+ 0,750 X_2
	+ 0,048 X_2	+ 0,360 X_2	+ 0,072 X_2	− 0,036 X_2	
			− 0,003 X_2	− 0,009 X_2	− 0,027 X_2
		+ 0,004 X_2	+ 0,001 X_2		
$M_{II..}$ =	+ 0,443 X_2	+ 0,364 X_2	− 0,807 X_2	− 0,723 X_2	+ 0,723 X_2

$H_{II3} = 2(M_{II31} + M_{II13})/h_2 =$
$-(0{,}723 + 0{,}807)X_2/h_2 = -\ 3{,}060\ X_2/h_2 =$
$= \alpha_2 X_2/h_2$

$H_{II1} = -\ H_{II3} + 2\ M_{II1a}/h_1 =$
$(3{,}060 + 2 . 0{,}443 . \frac{8}{9})\ X_2/h_2 =$
$+\ 3{,}848\ X_2/h_2 = \beta_2 X_2/h_2$



Gambar VII, 35a

III. *Akibat muatan luar*

a). *Beban merata p t/m'.*

Bekerja sepanjang ½l di atas bagian kiri pada palang 3 4 dan bagian kanan pada palang 1 2 (lihat gambar).

Oleh karena momen di titik-titik tengah palang tidak lagi nol, maka pendapat-pendapat μ di atas tidak berlaku lagi.

$\mu_{31} : \mu_{34} = (I_1/h_2) : (I_2/l) = \frac{1}{8} : \frac{5}{12} = = 1 : 2.$

$\mu_{31} = \mu_{42} = 1/3$; $\mu_{34} = \mu_{43} = 2/3$

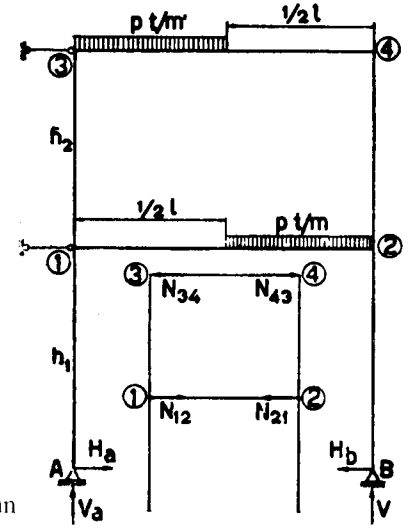
$\mu_{1a} : \mu_{12} : \mu_{12} = 3 \cdot \frac{1}{8} : 4 \cdot \frac{5}{12} : 4 \cdot \frac{1}{8} = = 2 : 10 : 3$

$\mu_{1a} = \mu_{2b} = 2/15$; $\mu_{12} = \mu_{21} = 10/15 = 2/3$

$\mu_{13} = \mu_{24} = 3/15 = 1/3$

$M^o_{12} = + \frac{5}{192} pl^2 = + 1{,}000$; $M^o_{21} = - \frac{11}{192} pl^2 = - 2{,}200.$

$M^o_{34} = + \frac{11}{192} pl^2 = + 2{,}200$; $M_{43} = - \frac{5}{192} pl^2 = - 1{,}000.$



Gambar VII, 35b

Kita mulai meratakan titik 3, kemudian 2 (induksi-induksi ke 1 dan 4)

	1			3		4		2		
	1A 2/15	12 2/3	13 1/5	31 1/3	34 2/3	43 2/3	42 1/3	24 1/5	31 2/3	2B 2/15
		+ 1,000			+ 2,200	— 1,000			— 2,200	
	— 0,182	+ 0,733	— 0,367	— 0,733	— 1,467	— 0,733	+ 0,220	+ 0,440	+ 1,467	+ 0,293
		— 0,910	— 0,273	— 0,137	+ 0,504	+ 1,009	+ 0,504	+ 0,252	— 0,455	
	— 0,001	+ 0,068	— 0,061	— 0,122	— 0,245	— 0,122	+ 0,021	+ 0,041	+ 0,135	+ 0,027
		— 0,005	— 0,001		+ 0,034	+ 0,067	+ 0,034	+ 0,017	— 0,002	
		— 0,005	— 0,006	— 0,011	— 0,023	— 0,011	— 0,001	— 0,003	— 0,010	— 0,002
	+ 0,002	+ 0,007	+ 0,002	+ 0,001	+ 0,004	+ 0,008	+ 0,004	+ 0,002	+ 0,003	
				— 0,002	— 0,003			— 0,001	— 0,003	
M'	— 0,181	+ 0,888	— 0,706	— 1,004	+ 1,004	— 0,782	+ 0,782	+ 0,748	— 1,065	+ 0,317
$M_{I..}$	+ 0,011	+ 0,081	— 0,092	— 0,086	+ 0,086	+ 0,086	— 0,086	— 0,092	+ 0,081	+ 0,011
$M_{II..}$	— 0,078	— 0,064	+ 0,142	+ 0,127	— 0,127	— 0,127	+ 0,127	+ 0,142	— 0,064	— 0,078
M =	— 0,248	+ 0,905	— 0,656	— 0,963	+ 0,963	— 0,823	+ 0,823	+ 0,798	— 1,048	+ 0,250

$(\frac{5}{192} pl^2)$

$H'_3 = (M'_{31} + M'_{13} + M'_{42} + M'_{24})/h_2 = (- 1{,}004 - 0{,}706 + 0{,}782 + + 0{,}748/h_2 = - 0{,}180/h_2$

$H'_1 = - H'_3 + (M'_{1a} + M'_{2b})/h_1 = 0{,}180/h_2 + \frac{8}{9}(- 0{,}181 + 0{,}317)/h_2 = = + 0{,}301/h_2.$

$\alpha_1 X_1/h_2 + \alpha_2 X_2/h_2 + H'_3 = 0$ (1) | $2{,}902X_1 - 3{,}060X_2 = 0{,}180$ | $X_1 = - 0{,}124$

$\beta_1 X_1/h_2 + \beta_2 X_2/h_2 + H'_1 = 0$ (2) | $- 3{,}060X_1 + 3{,}848X_2 = - 0{,}301$ | $X_2 = + 0{,}176.$

Hasil-hasil $M_{I..}$ dan $M_{II..}$ tertulis di bawah daftar M′ di atas, dan kemudian semuanya dijumlahkan.

$H_a = - M_{1a}/h_1 = 0{,}248 \cdot \frac{5}{12} pl^2/h_1$

$H_b = - M_{2b}/h_1 = - 0{,}250 \cdot \frac{5}{12} pl^2/h_1$; $H_a + H_b = 0$

$Q^o_{34} = \frac{3}{8} pl$; $Q^o_{43} = - \frac{1}{8} pl$; $(M_{34} + M_{43})/l = (0{,}963 - 0{,}823) , \frac{5}{12} pl = 0{,}004pl.$

$Q_{34} = \frac{3}{8} pl + 0{,}004\, pl = + 0{,}379pl$; $Q_{43} = - \frac{1}{8} pl + 0{,}004\, pl = - 0{,}121pl.$

$Q^o_{12} = \frac{1}{8} pl$; $Q^o_{21} = - \frac{3}{8} pl$; $(M_{12} + M_{21})/l = (0{,}905 - 1{,}048) . \frac{5}{12} pl = - 0{,}004pl$

$Q_{12} = (\frac{1}{8} - 0{,}004)pl = 0{,}121pl$; $Q_{21} = (- \frac{3}{8} - 0{,}004)pl = - 0{,}379\, pl.$

$V_a = Q_{34} + Q_{12} = 0{,}500pl$; $V_b = - (Q_{43} + Q_{21}) = 0{,}500pl.$

$H_3 = (M_{31} + M_{13})/h_2 = - 1{,}619 \cdot \frac{5}{192} pl^2/h_2.$

$H_4 = (M_{42} + M_{24})/h_2 = + 1{,}621 \cdot \frac{5}{192} pl^2/h_2$; seharusnya $H_3 = - H_4.$

Gaya-gaya H_3 atau H_4 ini bekerja sebagai gaya normal menekan pada palang 3 4 (yaitu apabila $H_3 < 0$ atau $H_4 > 0$)

$H_1 = - H_3 + M_{1a}/h_1$; $H_2 = - H_4 + M_{2b}/h_1$ dan seharusnya $H_1 = - H_2.$

Bekerja menarik apabila $H_1 < 0$ atau $H_2 < 0$

b) *Beban mendatar P ke kanan melalui titik 3.*

$M' = 0$ semuanya.

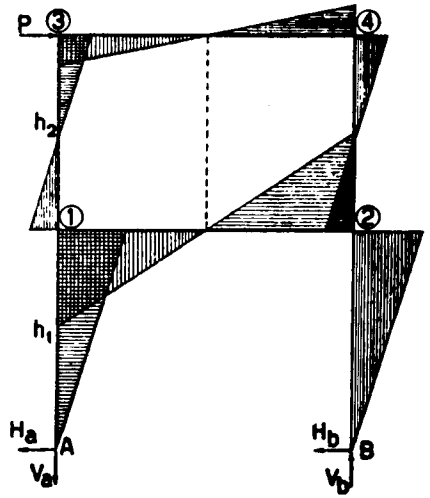
$H'_3 = - P$; $H'_1 = 0$

$\alpha_1 X_1/h_2 + \alpha_2 X_2/h_2 - P = 0$ |
$\beta_1 X_1/h_2 + \beta_2 X_2/h_2 = 0$ |

$2{,}902X_1 - 3{,}060X_2 = Ph_2$ |
$- 3{,}060X_1 + 3{,}848X_2 = 0$ |

$X_1 = + 2{,}13\, Ph_2$

$X_2 = + 1{,}69\, Ph_2.$



Gambar VII, 35c

	1A = 2B	12 = 21	13 = 24	31 = 42	34 = 43
$M_{I..}/Ph_2$	— 0,190	— 1,410	+ 1,600	— 1,491	+ 1,491
M_{II}/Ph_2	+ 0,750	+ 0,617	— 1,367	+ 1,223	- 1,223
M/Ph_2 =	+ 0,561	— 0,536	— 0,025	+ 0,025	- 0,025

$H_a = H_b = - M_{1a}/h_1 = - 0{,}560\, Ph_2/h_1 = - \frac{8}{9} \cdot 0{,}560\, P = - 0{,}498P$ yang sekarang seharusnya $= - \frac{1}{2}P.$

Supaya $H_a = - \frac{1}{2}P$, maka $M_{1a} = - H_a h_1 = \frac{1}{2}P \cdot \frac{9}{8} h_2 = 0{,}5625\, Ph_2$

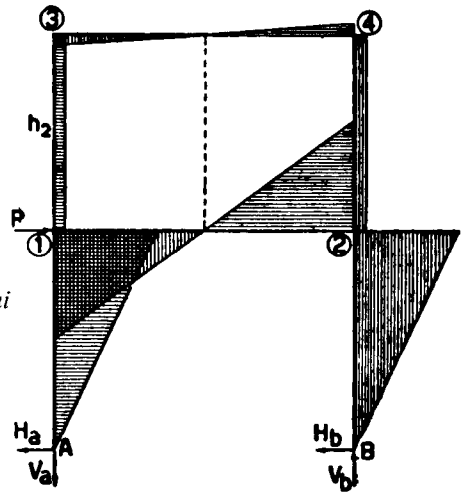
$(M_{12} + M_{21})/l = - 1{,}586Ph_2/l = - 1{,}057P$; $(M_{34} + M_{43})/l = - 0{,}536\, Ph_2/l = - 0{,}357P$

$Q_{12} = Q_{21} = -1{,}057P$; $Q_{34} = Q_{43} = -0{,}357P$.
$V_a = -V_b = Q_{12} + Q_{34} = -1{,}414\ P$ yang seharusnya;
$V_a = -V_b = -P\,(h_1 + h_2)/l = -\frac{17}{12}\,P = -1{,}417P$
$H_4 = (M_{42} + M_{24})/h_2 = 0{,}501P$, yang seharusnya $\frac{1}{2}P$.
$H_3 = -P + 0{,}501P = -0{,}499P$ yang seharusnya $-\frac{1}{2}P$.

Palang 3 4 tertekan dengan gaya normal ½P

$H_2 = -H_4 + M_{2b}/h_1 =$
$(-0{,}501 + 0{,}560 \cdot \frac{8}{8})\ P =$
$(-0{,}501 + 0{,}498)P$ yang seharusnya = 0

Jika P bekerja ke kiri, maka H_3 = + P, dan seterusnya.



Gambar VII, 35d

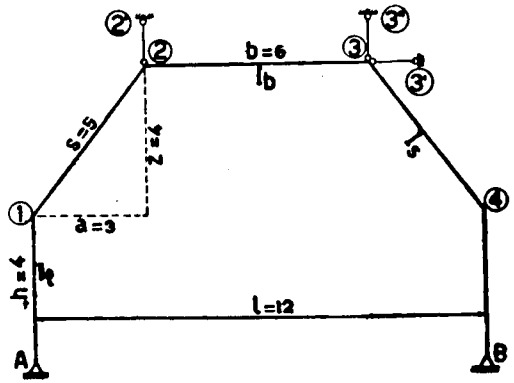
c). *Gaya P mendatar ke kanan melalui titik 1.*

$H_1 = -P.$
$2.902\ X_1 - 3{,}060\ X_2 = 0$
$-3{,}060\ X_1 + 3{,}848\ X_2 = Ph_2$
$X_1 = +1{,}69\ Ph_2$
$X_2 = -1{,}60\ Ph_2$

	1A = 2B	12 = 21	13 = 24	31 = 42	34 = 43
$M_{I..}/Ph_2$	− 0,150	− 1,118	+ 1,268	+ 1,182	− 1,182
M_{II}/Ph_2	− 0,711	+ 0,582	− 1,293	− 1,157	+ 1,157
M/Ph_2	+ 0,560	− 0,793	+ 0,233	+ 0,268	− 0,268

$V_a = -V_b = (M_{12} + M_{21} + M_{34} + M_{43})/l = -1{,}122\ Ph_2/l = -0{,}748\ P$
yang seharusnya $= -Ph_1/l = -0{,}750\ P$.
$H_a = H_b = -M_{1a}/h_1 = -0{,}561 \cdot \frac{8}{8}\ P = -0{,}499P$ yang seharusnya $= -\frac{1}{2}P$.
$H_2 = -(M_{24} + M_{42})/h_2 +$
$+ M_{2b}/h_1 = \frac{1}{2}\ P$
$H_3 = H_4 = (M_{31} + M_{13})/h_2 =$
$= 0.$

Apabila P bekerja ke kiri, diisi $H_1' = +P.$



Gambar VII, 36

§ 32. Bangunan dengan goyangan berganda tiga.

Rangka payon "Mansard"
$h = z = 4\ m$; $a = 3\ m$;

$b = 6\ m$ (jadi $s = 5\ m$)
$I_s = I_b = 2I_t$
$\mu_{1a} : \mu_{12} = 3 \cdot \frac{1}{4} : 4 \cdot \frac{8}{8} = 15 : 32.$
$\mu_{1a} = \mu_{4b} = 15/47 = 0{,}319$; $\mu_{12} = \mu_{43} = 0{,}681.$
$\mu_{21} : \mu_{23} = 6 : 5$; $\mu_{21} = \mu_{34} = 6/11 = 0{,}545.$
$\mu_{33} = \mu_{32} = 5/11 = 0{,}455.$

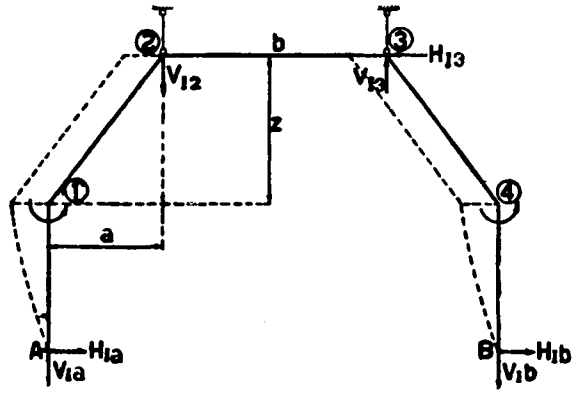
Untuk mencegah goyangan-goyangan kita mengadakan *tiga* batang pendel, yaitu : mendatar di titik 3, vertikal di titik 3 dan 2

I. Goyangan mendatar pribadi (diambil ke kiri)

Yang bekerja hanya pendek-pendel vertikal.
$X_{1a}^o = X_{4b}^o = -X_1.$

	1A 0,319	12 0,681	21 0,545	23 0,455	32 0,455	34 0,545	43 0,681	4B 0,319
	− 1,000X_1							− 1,000X_1
	+ 0,319X_1	+ 0,681X_1	+ 0,340X_1			+ 0,345X_1	+ 0,681X_1	+ 0,319X_1
		− 0,093X_1	− 0,186X_1	− 0,154X_1	− 0,154X_1	− 0,186X_1	− 0,093X_1	
	+ 0,030X_1	+ 0,063X_1	+ 0,031X_1	+ 0,077X_1	+ 0,077X_1	+ 0,036X_1	+ 0,063X_1	+ 0,030X_1
		+ 0,012X_1	− 0,025X_1	+ 0,021X_1	+ 0,021X_1	− 0,021X_1	+ 0,012X_1	
	− 0,004X_1	− 0,008X_1	− 0,004X_1	+ 0,010X_1	+ 0,010X_1	− 0,004X_1	− 0,008X_1	− 0,004X_1
		− 0,004X_1	− 0,003X_1			− 0,003X_1	− 0,004X_1	
$M_{I..} =$	− 0,655X_1	+ 0,654X_1	+ 0,203X_1	− 0,203X_1	− 0,203X_1	+ 0,203X_1	+ 0,654X_1	− 0,655X_1

$H_{Ia} = H_{Ib} = \frac{1}{4} \cdot 0{,}655X_1 = 0{,}164X_1$
$V_{Ia} = (M_{I12} + M_{I21})/a + H_{Ia}\ \mathrm{tg}\,\varphi = 0{,}504\ X_1$; $V_{Ib} = -0{,}504X_1$
$V_{I2} = V_{Ia} + (M_{I23} + M_{I32})/b = (-0{,}504 - 0{,}068)\ X_I = -0{,}572\ M_I = \beta_1\ X_1$

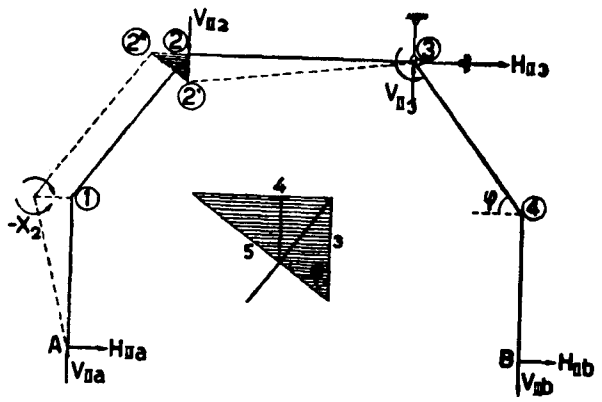


Gambar, 36a

$V_{I3} = -V_{I2} = +0{,}571X_1 = \gamma_1 X_1$

$H_{I3} = -H_{Ib} - (M_{I34} + M_{I43})/2 + V_{Ib}\cot g\,\varphi - H_{Ia} = -0{,}328\ X_1 = \alpha_1 X_1$

$\Sigma H = H_{Ia} + H_{Ib} + H_{I3} = 0;\ \Sigma V = V_{Ia} + V_{Ib} + V_{I2} + V_{I3} = 0$



Gambar VII, 36b

II. Titik 2 bergeser ke bawah.

Pendel-pendel mendatar dan vertikal di titik 3 bekerja.

$X^o_{1a} = -X_2$

$X^o_{12} = X^o_{21} = -2\,X^o_{1a}\,(I_s/I_t)\,(2'2''/22'')\,(h/s)^2 =$
$= +2\,.\,2\,.\,\tfrac{5}{4}(4/5)^2 X_2 = +3{,}2\,X_2$

$X^o_{23} = X^o_{32} = -2\,.\,2\,.\,\tfrac{3}{4}\,.\,(4/6)^2 X_2 = -1{,}333\,X_2.$

A1 0,319	12 0,681	21 0,545	23 0,455	32 0,455	34 0,455	43 6,682	4B 0,319
$-1{,}000X_2$	$+3{,}200X_2$	$+3{,}200X_2$	$-1{,}333X_2$	$-1{,}333X_2$			
$-0{,}700X_2$	$-1{,}500X_2$	$-1{,}020X_2$	$-0{,}847X_2$	$+0{,}607X_2$	$+0{,}726X_2$		
	$-0{,}510X_2$	$-0{,}750X_2$	$+0{,}304X_2$	$-0{,}424X_2$		$+0{,}363X_2$	
$+0{,}163X_2$	$+0{,}347X_2$	$+0{,}243X_2$	$+0{,}203X_2$	$+0{,}193X_2$	$+0{,}231X_2$	$-0{,}246X_2$	$-0{,}117X_2$
	$+0{,}121X_2$	$+0{,}173X_2$	$+0{,}096X_2$	$+0{,}102X_2$	$-0{,}123X_2$	$+0{,}115X_2$	
$-0{,}038X_2$	$-0{,}083X_2$	$-0{,}147X_2$	$-0{,}122X_2$	$+0{,}009X_2$	$+0{,}011X_2$	$-0{,}079X_2$	$-0{,}036X_2$
	$-0{,}073X_2$	$-0{,}042X_2$	$+0{,}005X_2$	$-0{,}061X_2$	$-0{,}040X_2$	$+0{,}006X_2$	
$+0{,}023X_2$	$+0{,}050X_2$	$+0{,}020X_2$	$+0{,}017X_2$	$+0{,}046X_2$	$+0{,}055X_2$	$-0{,}004X_2$	$-0{,}002X_2$
	$+0{,}010X_2$	$+0{,}025X_2$	$+0{,}023X_2$	$+0{,}009X_2$	$-0{,}002X_2$	$+0{,}028X_2$	
$-0{,}003X_2$	$-0{,}007X_2$	$-0{,}026X_2$	$-0{,}022X_2$	$-0{,}003X_2$	$-0{,}004X_2$	$-0{,}019X_2$	$-0{,}009X_2$
	$-0{,}013X_2$	$-0{,}004X_2$	$-0{,}006X_2$	$-0{,}011X_2$	$-0{,}010X_2$	$-0{,}003X_2$	
$+0{,}004X_2$	$+0{,}006X_2$	$+0{,}003X_2$	$+0{,}002X_2$	$+0{,}010X_2$	$+0{,}011X_2$	$+0{,}002X_2$	$+0{,}001X_2$
$M_{II..} = -1{,}551X_2$	$+1{,}551X_2$	$+1{,}675X_2$	$-1{,}675X_2$	$-0{,}846X_2$	$+0{,}846X_2$	$+0{,}163X_2$	$-0{,}163X_2$
$M_{III..} = +0{,}163X_3$	$-0{,}163X_3$	$-0{,}846X_3$	$+0{,}846X_3$	$+1{,}675X_3$	$-1{,}675X_3$	$-1{,}551X_3$	$+1{,}551X_3$

$H_{IIa} = \tfrac{1}{4}\,.\,1{,}551\,X_2 = 0{,}388\,X_2;\ H_{IIb} = \tfrac{1}{4}\,.\,0{,}163\,X_2 = 0{,}041\,X_2.$

$V_{IIa} = (M_{II12} + M_{II21})/a + H_{IIa}\,tg\,\varphi = +1{,}593X_2;\ V_{IIb} =$
$-(M_{II43} + M_{II34})/a - H_{II\,b}\,tg\,\varphi = -0{,}391\,X_2$

$V_{II2} = -V_{IIa} + (M_{II23} + M_{II32})/b + H_{IIa}\,tg\,\varphi = -2{,}012\,X_2 = \beta_2 X_2.$

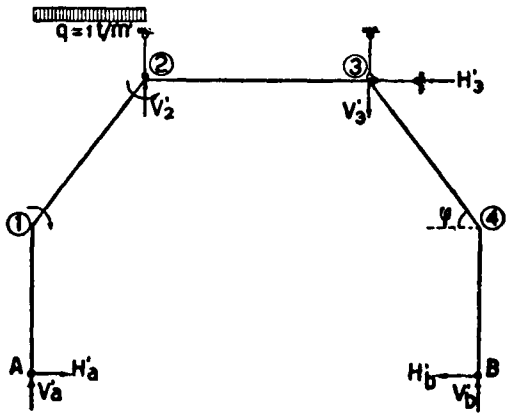
$V_{II3} = -V_{IIb} - (M_{II32} + M_{II23})/b = +0{,}811\,X_2\ o = \gamma_2\,X_2$

$H_{II3} = -(H_{IIa} + H_{IIb}) = -0{,}429\,X_2 = \alpha_2 X_2$

III. Titik 3 bergeser kebawah.

Oleh karena keadaan simetris pendapat-pendapat di atas dapat dipakai secara tukar menukar antimetris (lihat § 28). Besaran-besaran $M_{III..}$ sebagai $f(X_3)$ ditulis dibawah koeffisien-koeffisien untuk $M_{II..}$ supaya dapat mudah dibandingkan. Jadi terdapat :

$\alpha_3 = +0{,}429;$
$\beta_3 = +0{,}811$
$\gamma_3 = -2{,}012$



Gambar VII, 36c

IV. Akibat muatan

a) Muatan merata q = 1t/m' di atas 12

$M^o_{12} = +\tfrac{1}{12}\,ql^2 = +0{,}750\ tm.$

$M^o_{12} = -\tfrac{1}{12}\,ql^2 = -0{,}750\ tm.$

	1A 0,319	12 0,681	21 0,545	23 0,455	32 0,455	34 0,545	43 0,681	4B 0,319
		+ 0,750	— 0,750					
	— 0,240	— 0,510	+ 0,409	+ 0,341				
		+ 0,205	— 0,255		+ 0,170			
	— 0,065	— 0,140	+ 0,139	+ 0,116	— 0,077	— 0,093		
		+ 0,070	— 0,070	— 0,039	+ 0,058		— 0,046	
	— 0,022	— 0,048	+ 0,059	+ 0,050	— 0,026	— 0,032	+ 0,031	+ 0,015
		+ 0,030	— 0,024	— 0,015	+ 0,025	+ 0,016	— 0,016	
	— 0,010	— 0,020	+ 0,020	+ 0,018	— 0,019	— 0,022	+ 0,011	+ 0,005
		+ 0,011	— 0,010	— 0,010	+ 0,009	+ 0,005	— 0,011	
	— 0,003	— 0,008	+ 0,011	+ 0,009	— 0,006	— 0,008	+ 0,007	+ 0,004
		+ 0,005	— 0,004	— 0,003	+ 0,005	+ 0,004	— 0,004	
	— 0,002	— 0,003	+ 0,004	+ 0,003	— 0,004	— 0,005	+ 0,003	+ 0,001
$M_{..} =$	— 0,342	+ 0,342	— 0,471	+ 0,471	+ 0,135	— 0,135	— 0,025	+ 0,025

$H_a^1 = \frac{1}{8} \cdot 0{,}342 = 0{,}086\ t.$; $H_b^1 = -\frac{1}{8}\, 0{,}025 = -0{,}006\ t.$

$V'_a = (M'_{12} + M'_{21})/a + H'_a \operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{2}\, qa = 1{,}571$ t.

$V'_b = -(M'_{43} + M'_{34})/a - H'_b \operatorname{tg}\varphi = 0{,}062$ t.

$V'_2 = -V'_a + (M'_{23} + M'_{32})/b + qa = 1{,}530$ t.

$V'_3 = -V'_b - (M'_{23} + M'_{32})/b = -0{,}163$ t.

$H'_3 = -(H'_a + H'_b) = 0{,}079$ t;

$\Sigma V^1 = V_a^1 + V_b^1 + V_2^1 + V_3^1 = qa = 3{,}000.$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + H_3^1 = 0 \\ \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + V_2^1 = 0 \\ \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 X_3 + V_3^1 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} -0{,}328X_1 - 0{,}429X_2 + 0{,}429X_3 - 0{,}079 = 0 \\ -0{,}571X_1 - 2{,}012X_2 + 0{,}811X_3 + 1{,}530 = 0 \\ +0{,}571X_1 + 0{,}811X_2 - 0{,}2012X_3 - 0{,}163 = 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = -2{,}16\ tm. \\ X_2 = +1{,}30\ tm. \\ X_3 = -0{,}17\ tm. \end{array}\right|$$

	1A	12	21	23	32	34	43	4B
M'	— 0,342	+ 0,342	— 0,471	+ 0,471	+ 0,135	— 0,135	— 0,025	+ 0,025
M_I	+ 1,415	— 1,415	— 0,438	+ 0,438	+ 0,438	— 0,438	— 1,415	+ 1,415
M_{II}	— 2,018	+ 2,018	+ 2,100	— 2,100	— 1,100	+ 1,100	+ 0,212	— 0,212
M_{III}	— 0,027	+ 0,027	+ 0,144	— 0,144	— 0.284	+ 0,284	+ 0,264	— 0,264
M (tm)	— 0,972	+ 0,972	+ 1,416	— 1,416	— 0,811	+ 0,811	— 0,964	+ 0,964

$H_a = \frac{1}{8} \cdot 0{,}972 = 0{,}243t$; $H_b = -\frac{1}{8} \cdot 0{,}964 = -0{,}241\ t.$

$V_a = V_a^o = \frac{10{,}5}{12} \cdot 3{,}000 = 2{,}625\ t$; $V_b = 0{,}375\ t.$

Atau juga: $V_a = \frac{1}{8}(1{,}416 + 0{,}243 \cdot 8 + 3{,}000 \cdot 1{,}5) = 2{,}620\ t.$

$V_b = \frac{1}{8}(-0{,}811 + 0{,}243 \cdot 8) = 0{,}372\ t.$

$N_{12} = H_a \cos\varphi + V_a \sin\varphi = 0{,}145 + 2{,}1 = 2{,}245\ t$ (menekan)

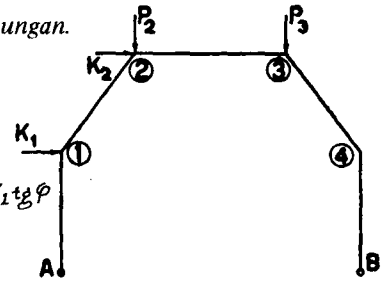
$N_{21} = N_{12} - 3{,}000 \sin\varphi = 2{,}245 - 2{,}400 = -0{,}155\ t$ (tarik)

$N_{23} = N_{32} = H_a = 0{,}243\ t$ (tekan)

$N_{34} = N_{43} = H_b \cos\varphi + V_b \sin\varphi = 0{,}445\ t$ (tekan)

b) *Beban-beban terpusat melalui titik-titik hubungan.*

$$\left.\begin{array}{l} M' = 0 \\ H'_3 = -(K_1 + K_2) \\ V'_2 = +P_2 - K_1 \operatorname{tg}\varphi \\ V'_3 = +P_3 \end{array}\right| \begin{array}{l} -0{,}328X_1 - 0{,}429X_2 + \\ \quad + 0{,}429X_3 = K_1 + K_2 \\ -0{,}571X_1 - 2{,}012X_2 + \\ \quad + 0{,}811X_3 = -P_2 + K_1 \operatorname{tg}\varphi \\ +0{,}571X_1 + 0{,}811X_2 - \\ \quad - 2{,}012X_3 = -P_3 \end{array}$$



Gambar VII, 36d

§ 32a. Dihitung sebagai pelengkung dua sendi.

$$\delta_{hh} = \int y^2 ds/EI;\ I_b = I_s = 2I_t.$$

$$= \frac{2}{3EI_t} h^3 + \frac{2}{3EI_s} \cdot \frac{s}{z} \left\{ (2h)^3 - h^3 \right\} + \frac{1}{EI_b}\, b(2h)^2$$

$$\delta'_{hh} = \delta_{hh}\, EI_b/b = h^2\left(\tfrac{2}{3} \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{8} + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{1}{8} \cdot 7 + 4\right) = \tfrac{79}{9}\, h^2.$$

Muatan merata $q = 1\ t/m'$ di atas 12; $P = qa = 3t$.

$M_3^o = V_b \cdot a = \frac{1}{8}\, Pa.$

$M_2^o = V_b(+a + b) = \frac{1}{8}\, P(a + b).$

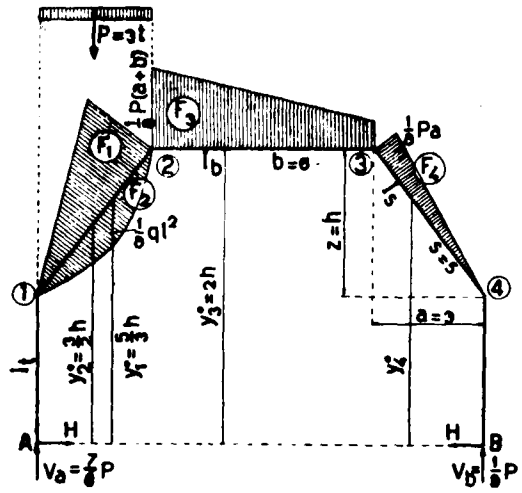
Luas-luas bidang M^o:

$F_1 = \frac{1}{2}\, s \cdot M_2^o = \frac{1}{16}\, Ps\ (a + b);\ y_1^o = \frac{5}{3}\, h.$

$F_2 = \frac{1}{12}\, qsa^2 = \frac{1}{12}\, Psa;\ y_2^o = \frac{3}{2}\, h.$

$F_3 = \frac{1}{2}\,(M_2^o + M_3^o)\, b = \frac{1}{16}\, Pb(2a + b);\ y_3^o = 2h.$

$F_4 = \frac{1}{2}\, s \cdot M_3^o = \frac{1}{16}\, Psa;\ y_4^o = \frac{5}{8}\, h.$



Gambar VII, 37

$$\delta_h^o = \int M^o y\, ds/EI = \frac{1}{EI_t}\,(F_1 y_1^o + F_2 X_2^o + F_4 y_4^o) + \frac{1}{EI_b}\, F_3 y_3^o$$

$EI_b\,\delta_h^o = \frac{1}{16}P(2a+b)(s\,.\,\frac{5}{3}h + 2bh) + \frac{1}{12}Psa\,.\,\frac{3}{2}h = \frac{137}{128}Ph^3.$

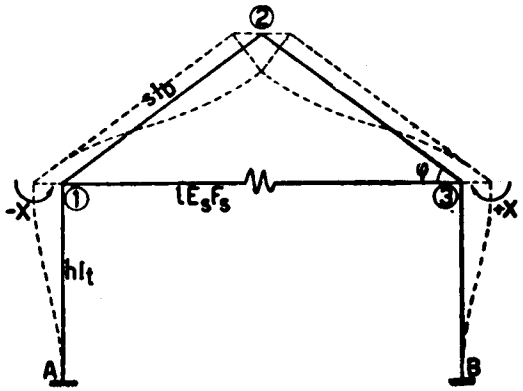
$(\delta_h^o)' = \delta_h^o\,EI_b/b = \frac{1}{8}\,.\,\frac{137}{128}Ph^2 = \frac{274}{384}Ph^2$

$H = (\delta_h^o)'/\delta'_{hh} = \frac{9}{79}\,.\,\frac{274}{384}P = 0{,}244\,t$ (dengan $P = 3t$) dst.

E. BANGUNAN DENGAN BATANG PENARIK

§ 33. Bangunan simetris.

Kita ambil sebagai contoh bangunan di dalam § 28 Kita ulangi-ketentuan-ketentuannya:



Gambar VII, 38

$h = 4\,m;\ l = 8\,m;\ s = 5\,m;\ \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{3}{4}$ (jadi $z = 3\,m$); $I_t = \frac{4}{15}I_b$.

$\mu_{1a} = \mu_{2b} = 0{,}25;\ \mu_{12} = \mu_{32} = 0{,}75.\qquad \mu_{21} = \mu_{23} = 0{,}50.$

Sekarang diadakan batang penarik yang menghubungkan titik-titik hubungan 1 dan 3, dengan faktor kekakuan $E_3F_3 = EI_t/1/80h^2$.

Maksud batang penarik ialah untuk mempertahankan panjangnya jarak antara titik-titik 1 dan 3 itu. Untuk sementara, batang ini kita hapuskan dulu.

Kita mengerjakan momen-momen primar $X_{1a}^o = -X$ dan $X_{3b}^o = +X$, yang menimbulkan gaya-gaya mendatar di 1 dan di 3 yang masing – masing sama besarnya dan berlawanan arah kerjanya (simetris).

Kejadian ini sebetulnya kombinasi kejadian-kejadian I dan II di dalam § 22, dengan $X_1 = X_2 = X$ dan kita dapat mempergunakan hasil-hasil hitungannya.

$H_1 = H_{I1} + H_{III} = -(1{,}354 + 0{,}968)X = -2{,}322X = -9{,}288\,X/h = -H_3$

Jarak antara titik-titik 1 dan 3 akan *bertambah* dengan $2\,Xh^2/6EI_t$.

Gaya-gaya H_1 dan H_3 itu dilimpahkan kepada batang tarik yang dengan demikian menerima gaya tarik sebesar S = 9,288 X/h.

Sebagai akibat ini, batang akan memanjang dengan $Sl/E_SF_S = 9{,}288\,Xl/hE_SF_S$. Jadi jumlah tambahnya jarak 1 – 3 terdapat

$$2\,Xh^2/6EI_t + 9{,}288\,Xl/hE_sF_s = X\,\delta_{xx}$$

$$\delta_{xx} = 2\,h^2/6EI_t + 9{,}288\,l/hE_sF_s = \frac{h^2}{EI_t}\{\tfrac{1}{3} + 9{,}288\,(EI_t/E_sF_sh^2)l/h\}$$

Oleh karena $EI_t/E_sF_s = \frac{1}{80}h^2$ dan $l/h = 2$, maka:

$$\delta_{xx} = \frac{h^2}{EI_t}(\tfrac{1}{3} + 9{,}288\,.\,\tfrac{1}{80}\,.\,2) = 0{,}565\,h^2/EI_t$$

Kemudian kita ambil beban q = 1 t/m' di atas bentang 1 – 2

Jika tidak ada batang penarik, dulu terdapat :

$X_1 = 0{,}350$ tm (dianggap bekerja ke kiri) dan $X_2 = 0{,}956$ tm (ke kanan).

$\delta_1 = -X_1h^2/6EI_t$ (kekiri); $\delta_3 = X_2h^2/6EI_t$ (ke kanan). Tambahan jarak antara 1 dan 3 menjadi :

$\delta_x^o = \delta_3 - \delta_1 = (X_2 + X_1)\,h^2/6EI_t = 1{,}306\,h^2/6EI_t$

Untuk mencegah ini, maka:

$$X\delta_{xx} = \delta_x^o \text{ atau } X = \delta_x^o/\delta_{xx} = \frac{1{,}306}{6.0{,}565}\,tm = 0{,}385\,tm.$$

$$S = 9{,}288\,X/h = 9{,}288\,.\,0{,}385/4 = 0{,}895\,t.$$

Nilai X ini dilipatkan dengan jumlah koeffisien-koeffisien di dalam daftar I dan II di dalam §28 dulu yang menghasilkan M_I dan M_{II}, dan-kemudian dikombinasikan pada pendapat-pendapat M dulu (batang tarik berhasrat *mengurangi* momen-momen yang timbul tanpa batang tarik).

hasil terakhir kita namakan M_S, Jadi umpamanya :

$$M_{s1} = -0{,}879 + (1{,}111 + 0{,}264)\,X = -0{,}879 + 0{,}531 = -0{,}348\,(tm).$$

Selanjutnya lihat daftar di bawah ini

	A1	1A	12	21	23	32	3B	B3
M	– 0,879	– 1,410	+ 1,410	+ 0,966	– 0,966	– 1,214	+ 1,214	+ 1,088
M_x	+ 0,531	+ 0,675	– 0,675	– 1,100	+ 1,100	+ 0,675	– 0,675	– 0,531
M_s	– 0,348	– 0,735	+ 0,735	– 0,134	+ 0,134	– 0,539	+ 0,539	+ 0,557

$\delta_1 = (2M_{a1} - M_{1a})\, h^2/6EI_t = +\,0{,}039\, h^2/6EI_t$ (ke kanan)
$\delta_3 = (2M_{b3} - M_{3b})\, h^2/6EI_t = +\,0{,}575\, h^2/6EI_t$ (ke kanan)

Tambahan pada jarak 1 – 3 menjadi $\delta_x = \delta_3 - \delta_1 = 0{,}536\, h^2/6EI_t = 0{,}0895\, h^2/EI_t$.

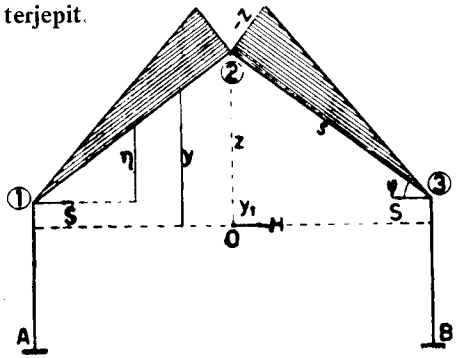
$\Delta l = Sl/E\,F = 0{,}895 \,.\, l \,.\, \frac{1}{80}\, h^2/EI_t = 0{,}0895\, h^2/EI_t$. (cocok)

§ 33a. Dihitung sebagai pelengkung terjepit.

Di dalam § 28 a telah terdapat :

$y_1 = \frac{9}{32}\, h$

$\delta'_{hh} = \delta_{hh}\, EI_b/s = (223/128)/h^2.$
$\delta'_{vv} = \delta_{vv}\, EI_b/s = (5/3)\, l^2$
$\varphi'_{mm} = \varphi_{mm}\, EI/s = 8.$



Gambar VII, 39

Sekarang mempelajari pengaruh gaya batang S.

Di dalam susunan statis tertentu, gaya S = 1 menimbulkan bidang momen (negatif) seperti tergambar, yang berhasrat menggeser serta memutar titik berat lenturan 0.

$\delta_{sh} = \delta_{hs} = 2 \,.\, \frac{1}{2}\, sz\,(\frac{2}{3}\, z + y_1)/EI_b = sh^2 \,.\, \frac{z}{h}(\frac{2}{3} \,.\, \frac{3}{4} + \frac{9}{32})/EI_b.$

$\delta'_{sh} = \delta'_{hs} = \delta_{hs}\, EI_b/s = (75/128)h^2.$
$\delta_{sv} = \delta_{vs} = 0$ (Simetris) .
$\delta'_{sm} = \varphi'_{ms} = -\,2 \,.\, \frac{1}{2}\, sz/EI_b.$
$\delta''_{sm} = \varphi''_{ms} = -z = -\,\frac{3}{4}\, h$
$\delta_{ss} = 2 \,.\, s\tfrac{1}{2}z \,.\, \tfrac{2}{3}\, z/EI_b + l/E_sF_s.$

$\delta'_{ss} = \delta_{ss}EI_b/s = (\frac{3}{8} + \frac{l}{s} \,.\, EI_b/E_sF_s)h^2$, sedang $EI_t/E_sF_s = \frac{1}{80}\, h^2$ dan

$I_b = (15/4)\, I_t$: Jadi :
$\delta'_{ss} = (\frac{3}{8} + \frac{8}{5} \,.\, \frac{15}{4} \,.\, \frac{1}{80})h^2 = \frac{9}{20}\, h^2.$

Pada muatan $q = 1\ t/m'$ di atas 1 — 2 dulu terdapat (lihat gb. 31)
$(\delta^o_h)' = \frac{1}{8}\, qlh^2;\ (\delta^o_v)' = \frac{13}{64}\, ql^3;\ (\varphi^o_m)' = \frac{5}{12}\, ql^2.$
$\delta^o_s = -\,\frac{1}{24}\, ql^2 s \,.\, \frac{1}{4}\, z/EI_b;\ (\delta^o_s)' = -\,\frac{1}{96}\, ql^2 x = -\,\frac{1}{64}\, qlh^2.$

$$H\delta'_{hh} + S\delta'_{hs} = (\delta^o_h)' \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$V\delta'_{vv} = (\delta^o_v)' \ldots\ldots\ldots (2)$$
$$M\varphi'_{mm} + S\varphi''_{ms} = (\varphi^o_m)' \ldots\ldots\ldots (3)$$
$$S\delta'_{ss} + H\delta'_{sh} + M\delta''_{sm} = (\delta^o_s)' \ldots (4)$$

$$\tfrac{223}{128}\, H + \tfrac{75}{128}\, S = \tfrac{1}{8}\, ql \ldots (1)$$
$$\tfrac{5}{8}\, V = \tfrac{13}{64}\, ql \ldots (2)$$
$$8M - \tfrac{3}{4}\, Sh. = \tfrac{5}{12}\, ql^2 \ldots (3)$$
$$\tfrac{9}{20}\, S + \tfrac{75}{128}\, H - \tfrac{3}{4}\, M/h = -\,\tfrac{1}{64}\, ql \ldots (4)$$

kita ganti $\frac{1}{2}\, ql = P = 4t$ dan $l = 2h = 8\ m.$

$$223\, H + 75\, S = 32\, P \ldots (1)$$
$$-\tfrac{3}{8}\, S + M = \tfrac{5}{6}\, P \ldots (3)$$
$$75\, H + 57{,}6\, S - 24\, M = -\,4\, P \ldots (4)$$

$S = 0{,}224\, P = 0{,}896\ t.$

$M_x = M^o_x - Hy - S\,\eta + Vx + M.$

S hanya mempengaruhi bagian-bagian di sebelah atasnya garis 1 – 3

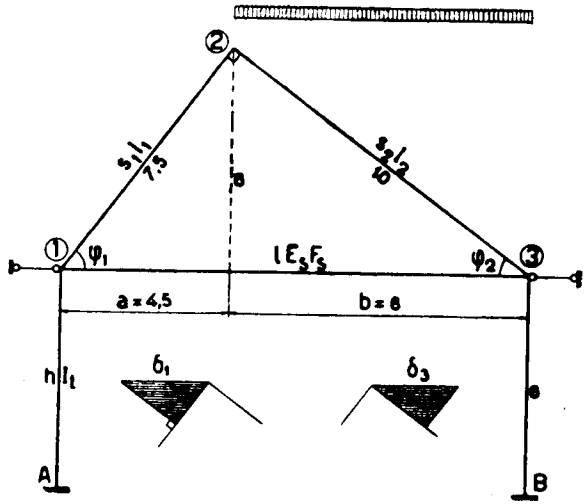
Apabila $E_sF_s = \infty$, maka pada beban P vertikal di titik 2 harus terdapat

$S = \frac{1}{2}\, P \operatorname{cotg} \varphi.$
$M_x = 0$ di seluruh bangunan.

§ 34. Bangunan tidak simetris

Rangka payon dengan tihang-tihang terjepit

$\operatorname{tg} \varphi_1 = 4/3;\ \operatorname{tg} \varphi_2 = 3/4.$
$h = z = 6\ m;$ jadi $s_1 = 7{,}5\ m;\ s_2 = 10\ m.$
$a = 4{,}5\ m;\ b = 8\ m.$
$I_t : I_1 : I_2 = 2 : 3 : 4$



Gambar VII, 40

$\mu_{1a} : \mu_{12} = (2/6) : (3/7{,}5) = 5 : 6$
$\mu_{1a} = 5/11 = 0{,}445;\ \mu_{12} = 6/11 = 0{,}545.$
$\mu_{21} : \mu_{23} = (3/7{,}5) : (4/10) = 1 : 1;\ \mu_{21} = \mu_{23} = 0{,}5.$
$\mu_{32} : \mu_{32} = (2/6) : (4/10) = 5 : 6;\ \mu_{2b} = 0{,}455\ ;\ \mu_{32} = 0{,}545.$

Untuk sementara, batang penarik 1 – 3 kita hapuskan, dan untuk mencegah geseran-geseran, diadakan pendel-pendel mendatar pada titik-titik 1 dan 3.

I. Akibat geseran titik 1 ke kiri.

$X^o_{1a} = -X_1$; $X^o_{12} = X^o_{21} = +X_1(I_1/I_t)(h/s_1)^2 \sin\varphi_1 = 0{,}768\,X_1$.
$X^o_{23} = X^o_{32} = -X_1(I_2/I_t)(h/s_2)^2 \sin\varphi_2 = -0{,}432\,X_1$

	A1	1A 0,455	12 0,545	21 0,5	23 0,5	32 0,545	4B 0,455	B3
	$-1{,}000X_1$	$-1{,}000X_1$	$+0{,}768X_1$	$+0{,}768X_1$	$-0{,}432X_1$	$-0{,}432X_1$		
	$+0{,}053X_1$	$+0{,}106X_1$	$+0{,}126X_1$	$+0{,}063X_1$	$+0{,}118X_1$	$+0{,}236X_1$	$+0{,}196X_1$	$+0{,}098X_1$
			$-0{,}129X_1$	$-0{,}258X_1$	$-0{,}258X_1$	$-0{,}129X_1$		
	$+0{,}029X_1$	$+0{,}058X_1$	$+0{,}071X_1$	$+0{,}035X_1$	$+0{,}035X_1$	$+0{,}071X_1$	$+0{,}058X_1$	$+0{,}029X_1$
			$-0{,}018X_1$	$-0{,}035X_1$	$-0{,}035X_1$	$-0{,}018X_1$		
	$+0{,}004X_1$	$+0{,}008X_1$	$+0{,}010X_1$			$+0{,}035X_1$	$+0{,}008X_1$	$+0{,}008X_1$
$M_{I\,..} =$	$-0{,}914X_1$	$-0{,}828X_1$	$+0{,}828X_1$	$+0{,}573X_1$	$-0{,}573X_1$	$-0{,}262X_1$	$+0{,}262X_1$	$+0{,}131X_1$

$H_{Ia} = \frac{1}{6}(0{,}914 + 0{,}828)\,X_1 = 0{,}290\,X_1$; $H_{Ib} = -\frac{1}{6}(0{,}131 + 0{,}262)\,X_1 = -0{,}065\,X_1$

$V_{Ia} = \frac{1}{12{,}5}(0{,}828 - 0{,}262)\,X_1 = 0{,}045\,X_1$; $V_{Ib} = -0{,}045\,X_1$

$H_{I1} = \frac{1}{6}(0{,}914 - 0{,}573 + 0{,}045\,.\,4{,}5 - 0{,}290\,.\,12)X_1 = -0{,}489X_1 = \alpha_1 X_1$

$H_{I3} = \frac{1}{6}(-0{,}131 + 0{,}572 + 0{,}045.8 + 0{,}065\,.\,12)X_1 = +0{,}265X_1 = \beta_1 X_1$

II. Titik 3 digeser ke kanan.

$X^o_{3b} = +X_2$;

	A1	1A 0,455	12 0,545	21 0,5	23 0,5	32 0,545	3B 0,455	B3
			$+0{,}768X_2$	$+0{,}768X_2$	$-0{,}432X_2$	$-0{,}432X_2$	$+1{,}000X_2$	$+1{,}000X_2$
	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$M_{II\,..} =$	$-0{,}177X_2$	$-0{,}353X_2$	$+0{,}353X_2$	$+0573{,}X_2$	$-0{,}572X_2$	$-0{,}738X_2$	$+0{,}738X_2$	$+0{,}869X_2$

$H_{IIa} = \frac{1}{6}(0{,}177 + 0{,}353)\,X_2 = 0{,}089\,X_2$; $H_{IIb} = -\frac{1}{6}(0{,}869 + 0{,}738)X_2 = -0{,}268\,X_2$

$V_{IIa} = \frac{1}{12{,}5}(0{,}353 - 0{,}738)\,Z_2 = -0{,}031\,X_2$; $V_{IIb} = +0{,}031\,X_2$.

$H_{II1} = \frac{1}{6}(0{,}177 - 0{,}573 - 0{,}031\,.\,4{,}5 - 0{,}089\,.\,12)\,X_2 = -0{,}267\,X_2 = \alpha_2 X_2$

$H_{II3} = \frac{1}{6}(-0{,}869 + 0{,}572 - 0{,}031\,.\,4{,}5 + 0{,}268\,.\,12)X_2 = +0{,}445X_2 = \beta_2 X_2$

III. Akibat muatan q = 1 t/m′ di atas 23

$M^o_{23} = +\frac{1}{12}qb^2 = +5{,}333\ tm.$; $M^o_{32} = -5{,}333\ tm.$

	A1	1A 0,455	12 0,545	21 0.5	23 0,5	32 0,545	3B 0,455	B3
	.....	.....	.....	.....	+ 5,333	− 5,333	.....	.....
$M'_{..} =$	+ 0,444	+ 0,888	− 0,888	− 3,400	+ 3,400	− 3,320	+ 3,320	+ 1,660

$H'_a = -\frac{1}{6}(0{,}444 + 0{,}888) = -0{,}222\,t$;
$H'_b = -\frac{1}{6}(1{,}660 + 3{,}320) = -0{,}830\,t$.

$V^o_a = \frac{4}{12{,}5} \cdot 8{,}0 = 2{,}56\,t$; $V^o_b = 5{,}44\,t$ (sendi dan rol)

$\Delta V'_a = (M'_{12} + M'_{32})/l = -(0{,}888 + 3{,}320)/12{,}5 = -0{,}337\,t$;
$\Delta V'_b = +0{,}337\,t$.

$V'_a = V^o_a + \Delta V'_a = 2{,}223\,t$; $V'_b = V^o_b + \Delta V'_b = 5{,}777\,t$.

$H'_1 = \frac{1}{6}(-0{,}444 + 3{,}400 + 2{,}223\,.\,4{,}5 + 0{,}222\,.\,12) = +2{,}604\,t$

$H'_3 = \frac{1}{6}(-1{,}660 - 3{,}400 - 5{,}777\,.\,8 + 0{,}830\,.\,12 + 8\,.\,4) = -1{,}552\,t$.

$-0{,}489\,X_1 - 0{,}267\,X_2 + 2{,}604 = 0 \mid X_1 = 5{,}06\,(tm)$
$0{,}265\,X_1 + 0{,}445\,X_2 - 1{,}552 = 0 \mid X_2 = 0{,}48\,(tm)$

Pendapat-pendapat di bawah ini berlaku, jika *tidak ada batang penarik*

	A1	1A	12	21	23	32	3B	B3
M'	+ 0,444	+ 0,888	− 0,888	− 3,400	+ 3,400	− 3,320	+ 3,320	+ 1,660
M_I	− 4,640	− 4,200	+ 4,200	− 2,900	+ 2,900	− 1,330	+ 1,330	+ 0,665
M_{II}	− 0,085	− 0,170	+ 0,170	+ 0,275	− 0,275	− 0,355	+ 0,355	+ 0,420
M	− 4,281	− 3,482	+ 3,482	− 0,225	+ 0,225	− 5,005	+ 5,005	+ 2,745

IV. Adanya batang penarik.

Gaya batang S selaras dengan momen-momen ujung primar $X^o_{1a} = -X$ dan $X^o_{3b} = +Z'$, yaitu timbul sebagai penggantinya gaya-gaya mendatar di titik 1 dan 3. Untuk menentukan besarnya, kita memakai koeffisien-koeffisien untuk H_{I1} dan H_{II1} serta H_{I3} dan H_{II3} seperti terdapat di-atas.

$S = 0{,}489\,X + 0{,}267\,X'$ (di titik 1)
$S = 0{,}265\,X + 0{,}445\,X'$ (di titik 3)

Jadi $0{,}489\,X + 0{,}267\,X' = 0{,}265\,X + 0{,}445\,X'$

$$X' = 1{,}255\,X.$$

$S = (0{,}489 + 0{,}267\,.\,1{,}255)\,X = 0{,}823\,X = 10{,}3\,X/l$

Momen primar $-X$ menggeser titik 1 sejauh $\delta_1 = -X\,h^2/6EI_t$ (ke luar), dan momen primar $+X' = 1{,}255\,X$ menggeser titik 3 sejauh $\delta_3 = 1{,}255\,Xh^2/6EI_t$ (ke luar juga).

Ini mengakibatkan penjauhan jarak antara 1 dan 3 sebanyak

$\delta_3 - \delta_1 = (1 + 1{,}255)\,Xh^2/6EI_t = 0{,}375\,Xh^2/EI_t$.

Gaya batang S memperpanjang batangnya sejauh

$$S\,l/E_sF_s = 0{,}823\,X\,l/E_sF_s = 10{,}3\,X/E_sF_s$$

Jadi jumlah tambahnya jarak 1 – 3 terdapat :

$0{,}375\,Xh^2/EI_t + 10{,}3\,X/E_sF_s = X\delta_{xx}$.

$\delta_{xx} = \{0{,}375 + 10{,}3\,(EI_t/h^2E_sF_s)\}\,h^2/EI_t$.

Di sini kita tentukan $EI_t/E_sF_s = \frac{1}{180}\,h^2$

Jadi $\delta_{xx} = \{0{,}375 + (10{,}3)\,(1/180\}\,h^2/EI_t = 0{,}432\,h^2/EI_t$.

Jika tidak ada batang penarik, maka jarak 1 – 3 bertambah dengan

$(X_1 + X_2)h^2/6EI_t = \frac{1}{6}(5{,}06 + 0{,}48)\,h^2/EI_t = 0{,}925\,h^2/EI_t\,. = \delta_x^o$.

$X\delta_{xx} = \delta_x^o$.

$X = \delta_x^o/\delta_{xx} = 0{,}925/0{,}432 = 2{,}14\ tm.$; $X' = 1{,}255\,X = 2{,}68\ tm.$

Momen-momen sebagai akibat dari $+X$ dan $-X'$ ini ditambahkan pada M di atas (menggunakan koeffisien-koeffisien daftar-daftar *I* dan *II*).

	A1	1A	12	21	23	32	3B	B3
M	−4,281	−3,482	+3,482	−0,225	+0,225	−5,005	+5,005	+2,745
M_x	+1,970	+1,775	−1,775	−1,250	+1,250	+0,561	−0,561	−0,280
$M_{x'}$	+0,473	+0,945	−0,945	−1,535	+1,535	+1,980	−1,980	−2,325
M_s	−1,838	−0,762	+0,762	−3,010	+3,010	−2,464	+2,464	+0,140

Kita harus ingat, bahwa gaya S menimbulkan $X_{1a}^o = +X$ (ke dalam atau ke kanan) dan $X_{3b}^o = -X'$ (*ke dalam* atau ke kiri), jadi pendapat-pendapatnya mempunyai tanda berlawanan dengan hasil-hasil daftar-daftar *I* dan *II* (di situ X_1 dan X_2 dianggap berputar *ke luar*).

$H_{sa} = \frac{1}{6}(1{,}838 + 0{,}762) = 0{,}433\ t$.

$H_{sb} = -\frac{1}{6}(0{,}140 + 2{,}464) = -0{,}434\ t$ yang seharusnya $= -H_{sa}$.

$V_a^o = 2{,}56t$; $V_b^o = 5{,}44\ t$.

$\Delta V_a = (M_{s12} + M_{s32})/l = (M_{sa1} + M_{sb3})/l = -0{,}136\ t = -\Delta V_b$.

$V_{sa} = V_a^o + \Delta V_a = 2{,}424\ t$; $V_{sb} = V_b^o + \Delta V_b = 5{,}576\ t$.

$H_{s1} = S = \frac{1}{6}(1{,}838 + 3{,}010 + 2{,}424\,.\,4{,}5 - 0{,}434\,.\,12) = 1{,}758\ t$ ($\Sigma M = 0$ pada bagian A 12) atau $S = 0{,}823\,X = 0{,}823\,.\,2{,}14 = 1{,}760\ t$.

Juga terdapat demikian:

$\delta_1 = (2M_{sa1} - M_{s1a})h^2/6EI_t = (3{,}676 - 0{,}762)h^2/6EI_t = -0{,}486h^2/EI_t$ (ke kiri)

$\delta_3 = (2M_{sb3} - M_{s3b})h^2/6EI_t = (0{,}140 - 2{,}464)h^2/6EI_t = -0{,}364h^2/EI_t$ (ke kiri)

$\Delta l = \delta_3 - \delta_1 = 0{,}122h^2/EI_t$; $\Delta l/l = (0{,}122/12{,}5)h^2/EI_t = 0{,}00976h^2/EI_t$

$S = E_sF_s(\Delta l/l) = (E_sF_s/EI_t)0{,}00976h^2$, sedang $EI_t/E_sF_s = \frac{1}{180}\,h^2$.

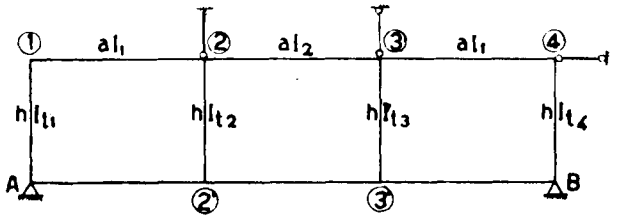
$S = 180.0{,}00976 = 1{,}76\ t$.

Hitungan sebagai pelengkung terdapat di bab VI, §69a, Contoh II dan III.

F. BANGUNAN VIERENDEEL

§ 35. Bangunan simetris berganda dua.

Yang dimaksudkan ialah simetris terhadap garis vertikal yang melalui tengah-tengah bentang (sumbu vertikal) dan garis mendatar yang melalui tengah-tengah tihang-tihang (sumbu mendatar).



Gambar VII, 41

Sebagai contoh kita ambil rasuk dengan tepi-tepi paralel, terdiri dari tiga kotakan yang masing-masing sama panjangnya.

Selanjutnya ditentukan :

$$AB = l = 12\ m;\ h = \tfrac{1}{6}l = \tfrac{1}{2}\,a = 2\ m.$$
$$I_{t1} : I_{t2} : I_1 : I_2 = 3 : 2 : 6 : 12.$$

Tihang-tihang antara dapat bergeser ke arah mendatar dan vertikal, sedang kepala-kepala tihang di tepi hanya dapat bergeser mendatar.

Untuk mencegah geseran-geseran kita mengadakan satu pendel mendatar di ujung 4 dan pendel-pendel vertikal masing-masing di 2 dan di 3.

Oleh karena keadaan simetris membujur, maka titik-titik tengah tihang tidak menahan momen (momen = 0 di situ), dan dengan demikian kita dapat mempelajari satu belahan mendatar saja (misalnya belahan bagian atas), sedang di tengah-tengah tihang-tihang itu dianggap ada sendi (lihat § 30).

Gambar VII, 41a

$\mu_{1a} : \mu_{12} = (3I_{I1}/\frac{1}{2}h) : (4I_1/a) = 3 \cdot \frac{3}{4} : 4 \cdot \frac{6}{4} = 3 : 2$

$\mu_{1a} = \mu_{4b} = 0{,}6$; $\mu_{12} = \mu_{43} = 0{,}4$.

$\mu_{21} : \mu_{23} : \mu_{2s} = (4I_1/a) : (3I_2/\frac{1}{2}h) : (4I_2/a) = 4 \cdot \frac{6}{4} : 3 \cdot \frac{2}{1} : 4 \cdot \frac{12}{4} = 1 : 1 : 2$.

$\mu_{21} = \mu_{31} = 0{,}25$; $\mu_{2s} = \mu_{3s} = 0{,}2$; $\mu_{23} = \mu_{32} = 0{,}5$

I. Geseran mendatar melulu (ke kanan).

$X^o_{22'} = X^o_{33'} = +X_1$; $X^o_{1a} = X^o_{4b} = +1{,}5\,X_1$.

	1A 0,6	12 0,4	21 0,25	22′ 0,25	23 0,5	32 0,5	33′ 0,25	34 0,25	43 0,4	4B 0,6
	+1,500X_1			+1,000X_1			+1,000X_1			+1,500X_1
	−0,900X_1	−0,600X_1	−0,250X_1	−0,250X_1	−0,500X_1	+0,500X_1	−0,250X_1	−0,250X_1	−0,600X_1	−0,900X_1
		−0,125X_1	−0,300X_1		−0,250X_1	−0,250X_1 dst.				
	+0,075X_1	+0,050X_1	+0,138X_1	−0,138X_1	−0,275X_1	+0,275X_1				
		−0,069X_1	−0,025X_1		+0,138X_1	+0,138X_1				
	−0,041X_1	−0,028X_1	−0,040X_1	−0,040X_1	−0,083X_1	−0,083X_1				
		−0,020X_1	−0,014X_1		−0,041X_1	−0,041X_1				
	+0,012X_1	+0,008X_1	−0,014X_1	+0,014X_1	−0,027X_1	+0,027X_1				
		−0,007X_1	+0,004X_1		+0,013X_1	+0,013X_1				
	−0,004X_1	−0,003X_1	−0,004X_1	−0,004X_1	−0,009X_1	−0,009X_1				
$M_{I..}$ =	+0,642X_1	−0,642X_1	−0,428X_1	+0,858X_1	−0,430X_1	−0,430X_1	+0,858X_1	−0,428X_1	−0,642X_1	+0,642X_1

Pendapat-pendapat ini berlaku untuk *separoh bangunan,* belahan atas.

$H_{I4} = (M_{I1a} + M_{I22'} + M_{I33'} + M_{I4b})/\frac{1}{2}h = \frac{1}{1} \cdot 2(0{,}642 + 0{,}858)\,X_1 =$
$= 3{,}000\,X_1 = \alpha_1 X_1$

$\frac{1}{2}V_{I2} = (-M_{I12} - M_{I21} + M_{I23} + M_{I32})/a = -\frac{1}{4} \cdot 0{,}210\,X_1$.

$V_{I2} = -\frac{1}{2} \cdot 0{,}210\,X_1 = -0{,}105X_1 = \beta_1 X_1$

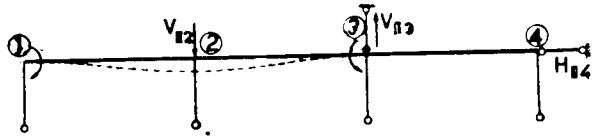
$\frac{1}{2}V_{I3} = (-M_{I23} - M_{I32} + M_{I34} + M_{I43})/a = \frac{1}{4} \cdot 0{,}210\,X_1$.

$V_{I3} = 0{,}105X_1 = \gamma_1 X_1$.

II. Geseran titik 2 (ke bawah).

$X^o_{12} = X^o_{21} = +X_2$

$X^o_{23} = X^o_{32} = -2\,X_2$. (daftar di bawah)



Gambar VII, 41b

$H_{II4} = \frac{1}{1}(-0{,}656 + 0{,}191 + 0{,}465 - 0{,}139)X_2 = -0{,}139X_2 = \alpha_2 X_2$

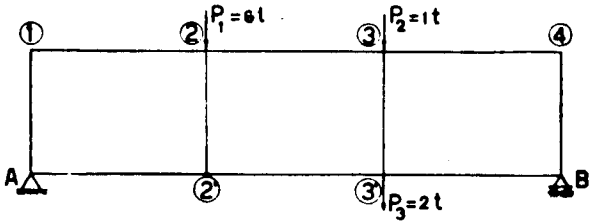
$V_{II2} = \frac{3}{4}(-0{,}656 - 0{,}970 - 1{,}161 - 0{,}883)X_2 = -1{,}835X_2 = \beta_2 X_2$

$V_{II3} = \frac{3}{4}(1{,}161 + 0{,}883 + 0{,}418 + 0{,}139)X_2 = +1{,}300X_2 = \gamma_2 X_2$

	1A 0,6	12 0,4	21 0,25	22′ 0,25	23 0,5	32 0,5	33′ 0,25	34 0,25	43 0,4	4B 0,6
		1,000X_2	+ 1,000X_2		−2,000X_2	2,000X_2				
	−0,600X_2	−0,400X_2	+ 0,250X_2	+ 0,250X_2	− 0,500X_2	− 1,000X_2	0,500X_2	+ 0,500X_2		
		+ 0,125X_2	− 0,200X_2		− 0,500X_2	− 0,250X_2			+ 0,250X_2	
	− 0,075X_2	−0,050X_2	−0,075X_2	−0,075X_2	−0,150X_2	−0,125X_2	− 0,062X_2	− 0,062X_2	−0,100X_2	−0,150X_2
		−0,038X_2	− 0,025X_2		−0,063X_2	−0,075X_2		−0,050X_2	−0,031X_2	
	+ 0,023X_2	+ 0,015X_2	+ 0,022X_2	+ 0,022X_2	+ 0,044X_2	+ 0,063X_2	+ 0,031X_2	+ 0,031X_2	+ 0,012X_2	+ 0,019X_2
		+ 0,011X_2	+ 0,008X_2		+ 0,031X_2	+ 0,022X_2		+ 0,006X_2	+ 0,016X_2	
	−0,007X_2	−0,004X_2	−0,010X_2	−0,010X_2	−0,019X_2	−0,014X_2	− 0,007X_2	− 0,007X_2	− 0,006X_2	−0,010X_2
		−0,005X_2	− 0,002X_2		− 0,007X_2	− 00,10X_2		− 0,003X_2	− 0,003X_2	
	+ 0,003X_2	+ 0,002X_2	+ 0,002X_2	+ 0,002X_2	+ 0,005X_2	+ 0,007X_2	0,003X_2	+ 0,003X_2	+ 0,001X_2	+ 0,002X_2
$M_{II..}$	−0,656X_2	+ 0,656X_2	+ 0,970X_2	+ 0,191X_2	− 1,161X_2	− 0,883X_2	0,465X_2	+ 0,418X_2	+ 0,139X_2	−0,139X_2
$M_{III..}$	+ 0,139X_3	−0,139X_3	−0,418X_3	−0,465X_3	+ 0,883X_3	+ 1,161X_3	0,191X_3	−0,970X_3	+ 0,656X_3	+ 0,656X_3

III. Titik 3 turun.

Oleh karena keadaan simetris, kita mendapat hasil secara tukar-menukar dengan pendapat II (lihat daftar X_3 di atas).



Gambar VII, 41c

Jadi: $\alpha_3 = -\alpha_2 = +0{,}139$

$\beta_3 = +\gamma_3 = +1{,}300$

$\gamma_3 = +\beta_2 = -1{,}835$

IV. Akibat beban (lihat gambar).

$M' = 0$; $H'_4 = 0$

$V'_2 = +P_1 = +6\,t$. (supaya 2 tidak turun)

$V'_3 = P_2 + P_3 = +5\,t$. (supaya 3 tidak turun)

$3{,}000X_1 - 0{,}139X_2 + 0{,}139X_3 = 0$

$0{,}105X_1 - 1{,}835X_2 + 1{,}300X_3 + 6 = 0$.

$-0{,}105X_1 + 1{,}300X_2 - 1{,}835X_3 + 5 = 0$.

$X_1 = 0{,}044\,(tm)$.

$X_2 = 8{,}860\,(tm)$

$X_3 = 7{,}900\,(tm)$

	1A	12	21	22′	23	32	33′	34	43	4B
M_I	+ 0,03	− 0,03	− 0,02	+ 0,04	− 0,02	− 0,02	+ 0,04	− 0,02	− 0,03	+ 0,03
M_{II}	− 5,82	+ 5,82	+ 8,60	+ 1,70	− 10,30	− 7,85	+ 4,13	+ 3,72	+ 1,24	− 1,24
M_{III}	+ 1,09	− 1,09	− 3,31	− 3,67	+ 6,98	+ 9,16	− 1,51	− 7,65	− 5,20	+ 5,20
M	− 4,70	+ 4,70	+ 5,27	− 1,93	− 3,34	+ 1,29	+ 2,66	− 3,95	− 3,99	+ 3,99

Kontrol :

$$\frac{2}{a}(-M_{12}-M_{21}+M_{23}+M_{32})+P_1=\tfrac{1}{2}(-4{,}70-5{,}27-3{,}34+1{,}29)+6=0.$$

$$\frac{2}{a}(-M_{23}-M_{32}+M_{34}+M_{43})+P_2+P_3=\tfrac{1}{2}(3{,}24-1{,}29-3{,}95-3{,}99)+3=0$$

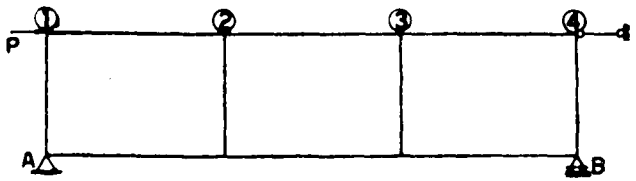
$V_a = 5t$; $V_b = 4t$.

Atau : $V_a = 2\,(M_{12} + M_{21})/a$; $V_b = -2(M_{34} + M_{43})/a$.

$N_{1a} = 2{,}5t$ (tekan); $N_{22'} = 3t$ (tekan); $N_{33'} = 0{,}5t$ (tarik); $N_{4b} = 2t$ (tekan)

V. Beban mendatar P

Bekerja pada tepi atas, ke kanan



Gambar VII, 41d

$M' = 0$; $H' = -P$

$V'_2 = V'_3 = 0$

$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = P$

$\beta_1 X_1 + \beta_3 X_2 + \beta_3 X_3 = 0$

$\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 X_3 = 0$

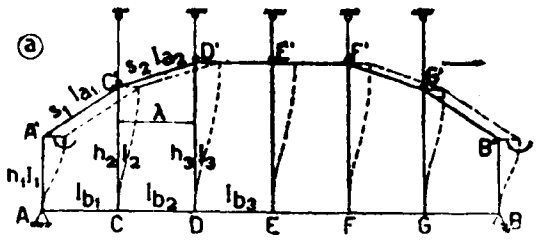
Jika P bekerja pada *tepi bawah,* tidak menimbulkan momen-momen

Cara di atas ini berlaku juga jika tepi-tepinya tidak sejajar satu-sama lain, asal saja simetris terhadap sumbu mendatar.

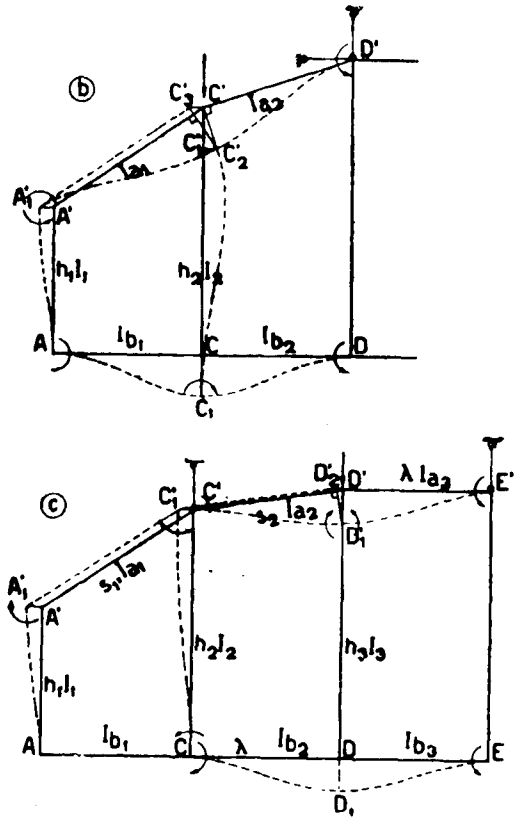
§ 36. Bangunan Vierendeel tidak simetris

Hitungan Gross harus di jalankan pada seluruh bangunan.

yang penting sekarang ialah diagram-diagram Williot untuk menentukan perbandingan-perbandingan antara besaran-besaran X^o jika salah satu pendel di hapuskan. Pendel mendatar cukup sebatang saja (misalnya di D').



Gambar VII, 42a



Gambar VII, 42 bc

I. Goyangan mendatar melulu (pendel mendatar hapus)

$X^o_{a'a} : X^o_{c'c} : X^o_{d'd} \ldots\ldots = I_1/h_1^2 : I_2/h_2^2 : I_3/h_3^2 \ldots\ldots$

II. Pendel (vertikal) di C' hapus.

Tihang C'C turun sejauh $CC_1 = C'C'_1$

Diagram Williot terdapat demikian: Tariklah garis mendatar yang melalui titik C'_1, kemudian garis $\perp$ C'D' melalui C'. Kedua-dua garis ini saling berpotongan di titik C'_2. Dari C'_2 ini tariklah garis $\perp$ C' A' yang memotong garis datar melalui C' di titik C'_3. Pada akhirnya $A'A'_1 = // C'C'_3$

$X^o_{ac} : X^o_{dc} : X^o_{a'c'} : X^o_{d'c'} : X^o_{aa'} : X^o_{c'c} =$

$I_{b1} \cdot CC_1/\lambda^2 : (-I_{b2}CC_1/\lambda^2) : I_{a1}C'_2C'_3/s_1^2 : (-I_{a2}C'C'_2/s_2^2) : (-I_1 \cdot C'C'_3/h_1^2) : I_2C'_1C'_2/h_2^2.$

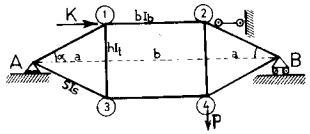
III. Pendel (vertikal) di D′ hapus tiang D′D turun sejauh $DD_1 = D'D'_1$.

Tarik dari D'_1 garis $\perp$ D′C′ yang memotong garis datar melalui-D′ di titik D'_2. Kemudian $C'C'_1 = /\!/ A'A'_1 = /\!/ D'D'_2$

$$X^o_{cd} : X^o_{de} : X^o_{c'd'} : X^o_{d'e'} : X^o_{a'a} : X^o_{c'c} =$$
$$I_{b2} \cdot DD_1/\lambda^2 : (-I_{b3} \cdot DD_1/\lambda^2) : I_{a2} \cdot D'_1D'_2/s_2^2 : (-I_{a3} \cdot D'D'_1/\lambda^2) :$$
$$(-I_1 \cdot D'D'_2/h_1^2) : (-I_2 \cdot D'D'_2/h_2^2)$$

§ 37. Bentuk rasuk vierendeel khusus

Bangunan simetris tangkap, yaitu terhadap garis AB dan garis $\perp$ AB yang membelahnya. Untuk mencegah goyangan, hanya diperlukan satu pendel mendatar. Akibat dari goyangan, tengah-tengah tidak menerima momen, juga titik-titik A dan B (seolah-olah ada sendi di situ).



Gambar VII, 43

$\mu_{1a} = \mu_{13} = 3\, I_s/s : 3\, I_t/0{,}5\, h = I_s/s : 2\, I_t/h.$

$X^o_{1a} : X^o_{13} = I_1\, \delta_s/s^2 : 2\, I_t\, \delta_t/h^2 = I_s/s : 2\, I_t/h = \mu_{1a} : \mu_{13}$

Jadi setelah diratakan, terdapat pada akhirnya :

$X_{1a} : X_{13} = \mu_{1a} : \mu_{13}$ dan $X_{12} = X_{21} = -(X_{1a} + X_{13})$.

$V_{xa} = V_{x1} = 2\,(X_{12} + X_{21})/b = 4\, X_{12}/b$; $V_{xb} = -4\, X_{12}/b$.

Beban seperti tergambar, tanpa goyangan, menghasilkan :

$V'_a = 0$, $V'_b = P$, $M'_{..} = 0$

$V_a = V'_a + V_{xa} = P\, a/l + \frac{1}{2}\, Kh/l$

$0 + 4\, X_{12}/b = (Pa + \frac{1}{2}\, Kh)/l.$

$X_{12} = (Pa + \frac{1}{2}\, Kh)\, b/4\, l = M_{12} = -(M_{1a} + M_{13})$.

Oleh karena $M_{1a} = M_{13} = \mu_{1a} = \mu_{13}$, terdapat :

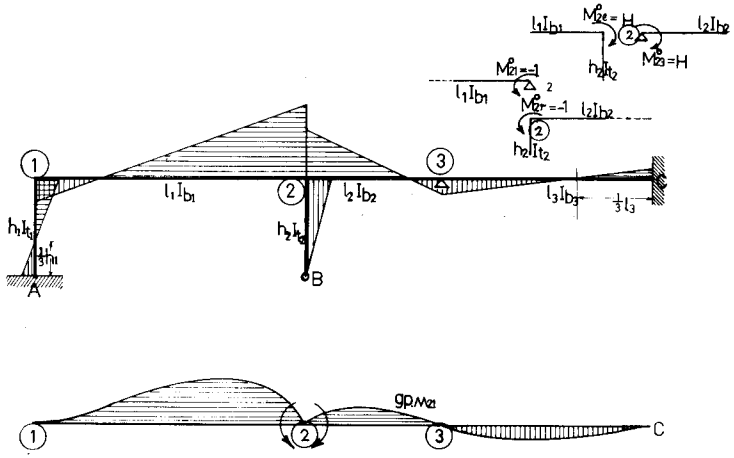
$M_{1a} = -M_{12}\, \mu_{1a}/(\mu_{1a} + \mu_{13})$ dan $M_{13} = -M_{12}\mu_{13}/(\mu_{1a} + \mu_{13})$.

Atau juga : $V_b = V'_b + V_{xb} = P - 4X_{12}/b = P\,(a+b) - \frac{1}{2}Kh/l$.

$X_{12} = M_{12} = P\,(l - a - b) + \frac{1}{2}\, Kh\, b/4\, l = (Pa + \frac{1}{2}\, Kh)/l.$

§38. Garis - lentur sebagai garis-pengaruh.

Seperti sudah dijelaskan dulu, garis pengaruh sesuatu gaya statis tak tertentu (kelebihan) X dapat dilukiskan oleh garis lenturnya bagian bangunan yang dilalui oleh beban P = 1 sebagai akibat dari gaya X = – 1 di titik kerjanya X itu, setelah kemungkinan kerjanya dilenyapkan. Jika X itu momen maka kita mengadakan sendi dibidang pegangannya, kemudian mengerjakan momen = – 1 pada ujung-ujung bagian bangunan yang terpisah oleh sendi itu.



Gambar VII, 44

Sebagai contoh kita pelajari garis pengaruhnya M_{12} pada bangunan seperti gambar VII, 44, Kita mengadakan sendi pada ujung balok 2-1, yang dipikul oleh tihang 2 B dan kemudian mengerjakan momen-momen = – 1 di sebelah kiri dan kanannya sendi itu.

Tertulis $M^o_{21} = -1$ pada ujung balok 2-1 dan $M^o_2 = -1$ terhadap bagian B23 C.

a) **Bagian 21 A.**

$M_{21} = -1$ yang menginduksikan momen sebesar $-\frac{1}{2}$ di ujung 1 – 2.
Ini diratakan di titik kumpul 1 dan menghasilkan :

$M_{12} = -\frac{1}{2} + \mu_{12}.\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(1 - \mu_{12})$, yang bekerja positif.

$M_{1a} = +\mu_{1a}.\frac{1}{2} = -M_{12}$

Dengan demikian pengrataan sudah selesai (sebab hanya ada satu titik-kumpul).

b) **Bagian B 23 C.**

Momen luar $M_2^\circ = -1$ didistribusikan menurut cara Cross seperti biasa. Setelah hitungan selesai, kita melukiskan bidang-bidang momennya untuk memudahkan perjalanan hitungan garis lenturnya balok 1 2 3 C. Kita mulai dengan menghitung putaran sudut $\varphi_{1a} = \varphi_{12}$ dengan perantaraan bidang momen pada tihang 1 A.

Selanjutnya kita menggunakan rumus $d^2y/dx^2 = -M_x/EI$ atau juga dapat dengan cara luas bidang momen (moment area method).

Di dalam contoh ini tidak ada goyangan, sebab perletakan-perletakan 3 dan C itu tetap (mati). Jika semua perletakan-pelretakan itu berbentuk tihang, maka terjadi goyangan yang harus diperhitungkan juga.

Nama ujung C gantilah dengan 4 dan pikirkanlah adanya tihang-tihang 3 C (h_3, I_{t3}) dan 4 D (h_4, I_{t4}).

Di dalam hitungan pada goyangan melulu kita menghitung perbandingan $X_{1a}^\circ : X^\circ_{2b} : X_{3c}^\circ : X_{4d}^\circ = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4$. Tulislah

$X_{1a}^\circ = \alpha_1 X$; $X_{2b}^\circ = \alpha_2 X$; $X_{3c}^\circ = \alpha_3 X$ dan $X_{4d}^\circ = \alpha_4 X$.

Persamaan $H_x + H' = 0$ mendapatkan besaran X, kemudian

M_{1a}, M_{12}, dst.

Geseran mendatar pada kepala-kepala tihang semua sama besarnya yaitu,

$\delta_h = X_{1a}^\circ h_1^2/6\,EI_{t1} = X_{2b}^\circ h_2^2/3\,E\,I_{t2}$, dan seterusnya.

Jika ada tihang serong, kita menjumpai adanya δ_v yang dapat dihitung dengan perantaraan δ_h yang bersangkutan (diagram Williot).

Sesudah ini dapat menjalankan hitungan garis lentur yang diperlukan.

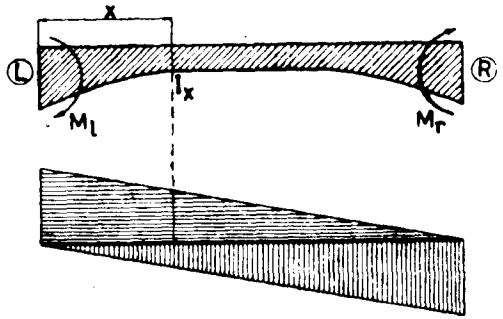
G. MOMEN INERSIA TIDAK TETAP

§ 39. Faktor induksi.

Pada ujung L bekerjalah momen positif M menurut istilah Gross. Momen induksi M_r di ujung R terdapat menurut persamaan:

$$M_l \varphi_{rl} = M_r \varphi_{rr}.$$
$$M_r = M_l \varphi_{rl}/\varphi_{rr} = M_l \cdot i_{rl}.$$

i_{rl} = faktor induksi di ujung R berasal dari L.



Gambar VII, 45

$$\varphi_{rl} = \frac{1}{l}\int_o^l (l-x)x\,dx/EI_x;\quad \varphi_{rr} = \frac{1}{l}\int_o^l x^2 dx/EI_x.$$

Di sini besaran I_x bersifat variabel, jadi tak boleh dikeluarkan dari tanda integrasi

Sekarang faktor induksi i_{lr} di ujung L berasal dari M_r

$$M_r \varphi_{lr} = M_l \varphi_{ll}$$
$$M_l = M_r \varphi_{lr}/\varphi_{ll} = M_r \cdot i_{lr}.$$
$$\varphi_{ll} = \frac{1}{l}\int_o^l (l-x)^2 dx/EI_x,\ \text{sedang}\ \varphi_{lr} = \frac{1}{l}\int_o^l x(l-x)\,dx/EI_x = \varphi_{rl}.$$

Jika $I_x = I$ tetap, maka $i_{rl} = i_{lr} = 1/2$.

Apabila perjalanan I_x itu dibuat simetris terhadap tengah-tengah bentang, namun meskipun demikian $i_{rl} = i_{rl} \neq \frac{1}{2}$, sebab bidang M_l atau bidang M_r tidak berbentuk simetris.

Juga hitungan-hitungan momen primar harus dijalankan secara menem - patkan I_x di dalam tanda integrasi.

$$\varphi_l^\circ = \frac{1}{l}\int_o^l M_x^\circ (l - x)\, dx/EI_x;\ \varphi_r^\circ = \frac{1}{l}\int_o^l M_x^\circ\, x\, dx/EI_x.$$

lihat juga bab IV A, § 4

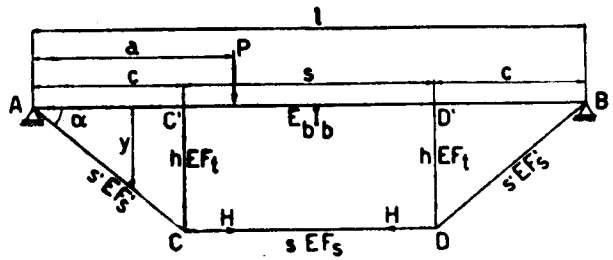
Untuk batang dengan lebar tetap dan peseorangan atau voute lurus lihat bab IV 14, § 48 dan selanjutnya.

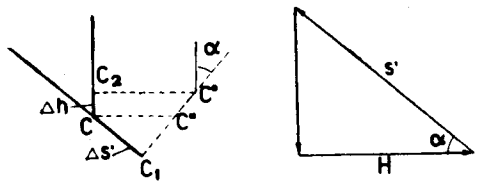
BAB VIII

BANGUN DENGAN GANTUNGAN DAN SOKONGAN

§ 1. Balok bertulang.

Balok AB mempunyai faktor keteguhan melawan lengkungan yang tetap, E_bI_b (prismatis). Selanjutnya bangunan berbentuk simetris.





Gambar VIII, 1

Batang-batang tulang AC, CD, DB, CC′ dan DD′ hanya menahan ke kuatan normal, jadi gaya momen lengkung hanya ditahan oleh balok AB. Bangunan bersifat statis tak tertentu tunggal dengan H sebagai gaya kelebihan.

Kita akan mempelajari soal ini menurut k beberapa perjalanan:

a. Dengan faktor-faktor pengaruh luar

Kekuatan H di batang CD menyebabkan :

1. Momen lengkung pada balok $M_X' = -$ H.y.
2. Kekuatan normal menarik pada batang-batang AC dan BD masing masing $S' = H \sec \alpha$.
3. Kekuatan normal menekan pada tiang-tiang CC′ dan DD′, masing - masing $T = H \operatorname{tg} \alpha$.

M_X' menyebabkan pengurangan jaraka antara C dan D sebanyak

$$\Delta s_1 = \int_o^l M'_x y \frac{dx}{E_b I_b} = H. \frac{1}{E_b I_b} \int_o^l y^2 dx$$

Sebagai akibat dari kekuatan S', batang-batang AC dan BD masing-masing memanjang sebanyak

$$\Delta s' = CC_1 = S' \frac{s'}{EF_s} \qquad H. \frac{1}{EF_s} s' \sec \alpha.$$

Ini berkehendak mengurangi jarak mendatar CD sebanyak

$$CC'' = CC_1 \sec \alpha = H. \frac{1}{EF_s}. s' \sec^2 \alpha.$$

Jadi pendekatan antara C dan D diukur mendatar yang disebabkan oleh perpanjangan batang AC dan BD ada:

$$\Delta s_2 = 2CC'' = H. \frac{2}{EF_s} s' \sec^2 \alpha$$

Tihang-tihang CC" dan DD' masing-masing memandak sebanyak

$$\Delta h = CC_2 = T \frac{h}{EF_t} = H. \frac{1}{EF_t}. h \operatorname{tg} \alpha.$$

Sebagai akibat dari perpanjangan batang AC serta perpandakan tiang CC", maka titik C akan jatuh di C°.
Jadi pengurangan jarak CD yang ditimbulkan oleh perpandakan tihang-tihang CC' dan DD' terdapat : $\Delta s_3 = 2\Delta h \operatorname{tg} \alpha = H. \frac{2}{EF_t} h \operatorname{tg}^2 \alpha.$

Jadi jumlah pendekatan antara kedua-dua titik C dan D yang disebabkan oleh H itu ada :

$$\Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 = H \left(\frac{1}{E_b I_b} \int_o^l y^2 dx + \frac{2}{EF_s} s' \sec^2 \alpha + \frac{2}{EF_t} h \operatorname{tg}^2 \alpha \right)$$

Momen lengkung M_x^o yang disebabkan oleh muatan luar di dalam susunan statis tertentu (balok AB) berkehendak menjauhkan jarak antara C dan D sebanyak $\int M_x^o y \frac{dx}{E_b I_b} = \frac{1}{E_b I_b} \int_o^l M_x^o y dx.$

Muatan luar menimbulkan gaya normal menarik H dalam batang CD yang mengakibatkan perpanjangan pada batang CD sebanyak $\Delta s = H \frac{s}{EF_s}$. muatan luar dan H menghasilkan penjauhan antara C dan D sebanyak :

$$\frac{1}{E_b I_b} \int_o^l M_x^o y dx - (\Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3) = H \frac{s}{EF_s}$$

$$H \left(\frac{1}{E_b I_b} \int_o^l y^2 dx + 2 \frac{s'}{EF_s} \sec^2 \alpha + 2 \frac{h}{EF_t} \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{s}{EF_s} \right) = \frac{1}{E_b I_b} \int_o^l M_x^o y dx$$

$$H \delta_{hh} = \frac{1}{E_b I_b} \int_o^l M_x^o y dx$$

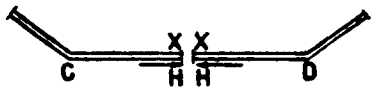
Kita tulis $\delta_{hh} = \delta_{hhm} + \delta_{hhn}$ dengan $\delta_{hhm} = \int y^2 dx / E_b I_b$

$\int y^2 dx = 2 \int (x \operatorname{tg} \alpha)^2 dx + \int h^2 dx = (2/3\ C + s)\ h^2$

Jika I_b tidak tetap, besaran ini dimasukkan di dalam tanda-tanda integral.

$$\delta_{hh} = \frac{1}{E_b I_b} \int_o^l y^2 dx + 2 \frac{s'}{EF_s} \sec^2 \alpha + 2 \frac{h}{EF} \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{s}{EF_s}$$

Mengapa suku $\frac{s}{EF_s}$ itu dimasukkan di dalam δ_{hh} dengan tanda + juga boleh diterangkan demikian. Susunan statis tertentu tercapai secara memotong batang CD di sesuatu tempat misalnya di titik X (Gambar VII, 2).



Gambar VIII, 2

Sebagai akibat dari $M'_x = -Hy$, $S' = H \sec \alpha$ dan $T = H \operatorname{tg} \alpha$, tampang X mendekati satu sama lain sejauh $\Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3$ seperti di atas.

Oleh karena H itu memperpanjang CD atau juga bagian-bagian CX. dan DX, titik-titik X akan mendekati satu sama lain sejauh $H \frac{s}{EF_s}$.

Jadi jumlah pendekatan ini ada $\Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 + H \frac{s}{EF_s} = H\delta_{hh}$

$$H \left(\int_o^l y^2 \frac{dx}{E_b I_b} + 2 \frac{s'}{EF_s} \sec^2 \alpha + 2 \frac{h}{EF_t} \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{s}{EF_s} \right) = H\delta_{hh}$$

b. *Dengan faktor-faktor pengaruh dalam*

Gaya H = – 1 (menekan) menimbulkan pada balok gaya momen sebesar α_m, gaya-gaya normal sebesar α_{ns} pada batang-batang AC serta BD, α_{nt} pada tihang-tihang CC' serta DD' dan α_o pada batang CD sendiri.

Dengan mudah kita mendapat :

$\alpha_m = y$; $\alpha_{ns} = -\sec\alpha$ (menekan), $\alpha_{nt} = \operatorname{tg}\alpha$ (menarik) dan $\alpha_o = -1$

$$H\left(\int \alpha_m^2 \frac{ds}{E_b I_b} + \int \alpha_{ns}^2 \frac{ds}{EF_s'} + \int \alpha_{nt}^2 \frac{ds}{EF_t} + \int \frac{ds}{EF_s}\right) = \int \alpha_m M_x^o \frac{ds}{E_b I_b}$$

$$H\left(\int_o^l y^2 \frac{dx}{E_b I_b} + 2\frac{s'}{EF_s'}\sec^2\alpha + 2\frac{h}{EF_t}\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{s}{EF_s}\right) = \int_o^l M_x^o \frac{ds}{E_b I_b}$$

c. *Dengan hukum Castigliano.*

$$M_x = M_x^o - Hy;\ S' = H\sec\alpha;\ T = H\operatorname{tg}\alpha;\ S = H$$

$$U = \int M_x^2 \frac{dx}{2E_b I_b} + 2(H\sec\alpha)^2 \frac{s'}{2EF_s'} + 2(H\operatorname{tg}\alpha)^2 \frac{h}{2EF_t} + H^2 \frac{s}{2EF_s}$$

$$\frac{dU}{dH} = 0;\ \int_o^l M_x \frac{dM_x}{dH}\frac{dx}{E_b I_b} + 2H\sec^2\alpha\frac{s'}{EF_s'} + 2H\operatorname{tg}^2\alpha\frac{h}{EF_t} + H\frac{s}{EF_s} = 0$$

$$\frac{dM_x}{dH} = -y$$

$$-\int_o^l (M_x^o - Hy)y\frac{dx}{E_b I_b} - 2H\frac{s'}{EF_s'}\sec^2\alpha + 2H\frac{h}{EF_t}\operatorname{tg}^2\alpha + H\frac{s}{EF_s} = 0$$

$$H\left(\int_o^l y^2\frac{dx}{E_b I_b} + 2\frac{s'}{EF_s'}\sec^2\alpha + 2\frac{h}{EF_t}\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{s}{EF_s}\right) = \int_o^l M_x^o y\frac{dx}{E_b I_b}$$

d. *Secara langsung*

Sebagai akibat dari muatan luar dan H, batang CD memanjang sejauh $H\frac{s}{EF_s}$, jadi titik-titik C dan D menjauhkan diri sebanyak $H\frac{s}{EF_s}$ terhadap satu sama lain.

$$\int_o^l M_x y\frac{dx}{E_b I_b} - (\Delta s_2 + \Delta s_3) = H\frac{s}{EF_s}$$

$$\int_o^l (M_x^o - Hy)\frac{dx}{E_b I_b} - H\left(2\frac{s'}{EF_s'}\sec^2\alpha + 2\frac{h}{EF_t}\operatorname{tg}^2\alpha\right) = H\frac{s}{EF_s}$$

$$H\left(\int_o^l y^2\frac{dx}{E_b I_b} + 2\frac{s'}{EF_s'}\sec^2\alpha + 2\frac{h}{EF_t}\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{s}{EF_s}\right) = \int_o^l M_x^o y\frac{dx}{E_b I_b}$$

§ 2. **Lanjutan; garis pengaruh H.**

Muatan P berdiri sejauh a dari A.

$$M_{x<a}^o = \frac{(l-a)}{l}Px;\ M_{x>a}^o = \frac{a}{l}P(l-x)$$

$$P\delta_{hp} = \int_o^l M_x^o y\frac{dx}{E_b I_b} = P\left\{\int_o^a \frac{(l-a)}{l}x\,.\,y\frac{dx}{E_b I_b} + \int_a^l \frac{a}{l}(l-x)\,.\,y\frac{dx}{E_b I_b}\right\}$$

$$\delta_{hp} = \int_o^a \frac{(l-a)}{l}xy\frac{dx}{E_b I_b} + \int_a^l \frac{a}{l}(l-x)y\frac{dx}{E_b I_b}$$

$$\delta_{hp}' = \delta_{hp}E_b I_b = \int_o^a \frac{(l-a)}{l}xydx + \int_a^l \frac{a}{l}(l-x)ydx$$

Ini berarti momen di tempat P pada balok AB yang dimuati penuh dengan ordinat muatan sebesar y atau dimuati dengan bidang ACDB.

$$\delta_{hh}' = \delta_{hh}E_b I_b = \int_o^l y^2dx + 2\frac{E_b}{E}\,.\,\frac{I_b}{F_s}s'\sec^2\alpha + 2\frac{E_b}{E}\,.\,\frac{I_b}{F_t}\,.\,h\operatorname{tg}^2\alpha +$$

$$+ \frac{E_b}{E}\,.\,\frac{I_b}{F_s}\,.\,s = \delta'_{hhm} + \delta'_{hhn} \text{ dengan } \delta'_{hhm} = \int y^2\,dx.$$

$$H = P\delta_{hp}'/\delta_{hh}'$$

Jadi garis pengaruh H boleh dilukiskan oleh garis momen pada balok AB yang dimuati dengan y (yaitu bidang ACDB dianggap sebagai muatan).

Garis momen ini berarti juga $E_b I_b$ x ordinat garis elastis yang ditimbulkan oleh H = – 1. sebab H = – 1 menyebabkan momen H_y = y pada balok, jadi bidang momen itu merupakan dengan bidang AC DB tadi.

Selanjutnya, untuk melukiskan garis elastis, bidang momen itu dianggap sebagai bidang muatan pula.

a. *Hitungan secara analisis.*

Untuk $x < c$ terdapat $y = x \operatorname{tg} \alpha$, untuk $c < x < l - c$ maka $y = c \operatorname{tg} \alpha = h$ (tetap).

$$\int y^2 dx = 2\int_o^c (x \operatorname{tg}\alpha)^2 dx + \int_o^s c^2 \operatorname{tg}^2 \alpha dx = (\tfrac{2}{3}c^3 + c^2 s)\operatorname{tg}^2\alpha$$

$\frac{E_b}{E} = n$; $\frac{I_b}{F_s'} = i_b^2 \frac{F_b}{F_s'}$; $\frac{I_b}{F_t} = i_b^2 \frac{F_b}{F_t}$; $\frac{I_b}{F_s} = i_b^2 \frac{F_b}{F_s}$ jika F_b = luas tampang balok dan i_b = radius inersianya.

$$\delta'_{hh} = (\tfrac{2}{3}c^3 + c^2 s)\operatorname{tg}^2\alpha + ni_b^2\left(\frac{F_b}{F_s'} s' \sec^2\alpha + \frac{F_b}{F_t} h \operatorname{tg}^2\alpha + \frac{F_b}{F_s} s\right) =$$
$$= (1+u)(\tfrac{2}{3}c^3 + c^2 s)\operatorname{tg}^2\alpha = (1+u)\cdot\tfrac{1}{3}(2c^3 + 3c^2 s)\operatorname{tg}^2\alpha =$$
$$= (1+u)\tfrac{1}{3}(3l - 4c)c^2 \operatorname{tg}^2\alpha = (1+u)\tfrac{1}{3}(3l - 4c)h^2$$

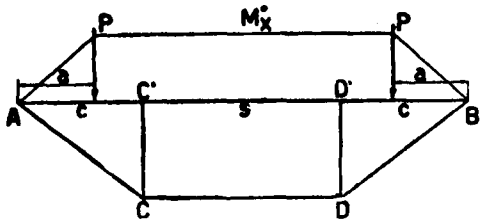
Untuk memudahkan pekerjaan kita mengadakan dua muatan P yang sama serta simetris letaknya. Dengan begitu kiga mencapai besaran $2P\delta_{hp}$. Jarak antara P dan titik perletakan masing-masing adalah a.

1. P berdiri di luar bagian C'D', jadi $a < c$.

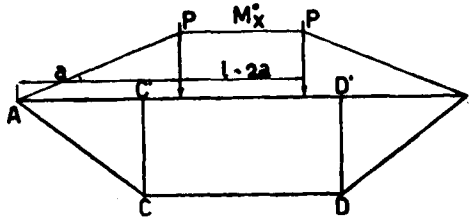
Untuk $x < a$, $M_x^o = Px$ dan $y = x \operatorname{tg}\alpha$.

Untuk $a < x < (l - a)$, $M_x^o = Pa$; $y = x \operatorname{tg}\alpha$

$$2\delta'_{hp} = 2\int_o^a x^2 \operatorname{tg}\alpha dx + 2\int_a^c ax \operatorname{tg}\alpha dx + \int_o^s ac \operatorname{tg}\alpha dx$$
$$\delta'_{hp} = \tfrac{1}{3}a^3 \operatorname{tg}\alpha + \tfrac{1}{2}a(c^2 - a^2)\operatorname{tg}\alpha + \tfrac{1}{2}acs \operatorname{tg}\alpha =$$
$$= (-\tfrac{1}{6}a^2 + \tfrac{1}{2}c^2 + \tfrac{1}{2}cs)a \operatorname{tg}\alpha = \tfrac{1}{6}(3lc - 3c^2 - a^2)a \operatorname{tg}\alpha$$



Gambar VIII, 2a



Gambar VIII, 2b

2. P berdiri di antara C' dan D', jadi $c < a < (l - c)$.

$$\delta'_{hp} = \int_o^c x^2 \operatorname{tg}\alpha dx + \int_c^a cx \operatorname{tg}\alpha dx + \tfrac{1}{2}\int_o^{l-2a} ac \operatorname{tg}\alpha dx =$$
$$= \tfrac{1}{3}c^3 \operatorname{tg}\alpha + \tfrac{1}{2}(a^2 - c^2)c \operatorname{tg}\alpha + \tfrac{1}{2}(l - 2a)ca \operatorname{tg}\alpha =$$
$$= (\tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{6}c^2 + \tfrac{1}{2}la - a^2)c \operatorname{tg}\alpha = \tfrac{1}{6}(3la - c^2 - 3a^2)c \operatorname{tg}\alpha$$

Sebagai kontrol, untuk a = c pendapat kedua-dua hitungan itu harus sama, yaitu: $\frac{1}{6}(3lc - 4c^2)c \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{6}(3l - 4c)c^2 \operatorname{tg}\alpha$.

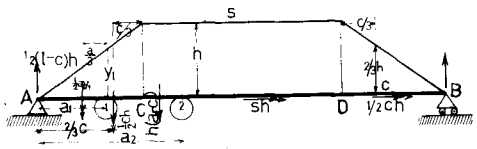
Jadi jika P berdiri di atas tiang CC' (atau DD') akan terdapat :

$H = \frac{1}{(1+u)} \cdot \frac{1}{2} P \operatorname{cotg}\alpha$ dan dengan mengabaikan u (robahan-bangun gantungan) menjadi $H = \frac{1}{2}P \cot\alpha$ dan $T = \frac{1}{2}P$.

b. **Dengan hukum timbal balik Maxwell (gb. VIII, 2c)**

$H = \delta_h^\circ / \delta_{hh} = P\,\delta_{hp}/\delta_{hh} = P\,\delta_{ph}/\delta_{hh}$.

δ_{ph} berarti lagi turunnya titik - pegangan beban P sebagai akibat dari gaya H = – 1, jadi ordinat lenturnya sumbu balok di tempat berdirinya P itu.



Gambar VIII, 2c

H = – 1 menghasilkan bidang momeny yang ⌓ bentuknya bidang gantungan, yaitu trapezium ABCD (dengan tinggi = h). Setelah dibagi dengan besaran E_bI_b, bidang momen seluas F = (l – c)h ini dianggap sebagai bidang muatan, yang menimbulkan reaksi-reaksi perletakan di A dan di B masing-masing sebesar $\frac{1}{2}F/E_b I_b = \frac{1}{2}(l - c)\,h\,/E_bI_b$.

1) P = 1 berdiri sejauh $0 \leqslant a_1 \leqslant c$ dari A (daerah AC atau BD)

$\delta'_{ph} = \delta_{ph} E_bI_b = \frac{1}{2}(l - c)\,ha_1 - \frac{1}{2}a_1 y.\ 1/3\ a_1 = \frac{1}{2}(l - c)a_1$

$1/6\ a_1^3\ h/c = \eta_1$

2) P = 1 sejauh $c \leqslant a_2 \leqslant 1 - c$ (antara C dan D)

$\delta'_{ph} = \frac{1}{2}(l - c)\,ha_2 - \frac{1}{2}ch\,(a_2 - 2/3\ c) - \frac{1}{2}(a_2 - c)^2 h =$

$(\frac{1}{2}la_2 - \frac{1}{2}a_2^2 - 1/6\ c^2)\ h = \eta_2$

Pada kedudukan P = 1 di C (atau D) kita mengisi $a_1 = a_2 = c$ dan mendapat $\delta'_{ch} = (\frac{1}{2}\, 1 - 2/3\ c)ch$.

Besaran $\delta'_{hhm} = \delta_{hhm}\, E_b I_b$ juga terdapat dengan perantaraan bidang momen itu, yang dianggap sebagai gaya mendatar terletak di dalam bidang mendatar atau bidang ⊥ bidang gambar. Titik-titik beratnya bagian-bagian bidang momen ini diproyeksikan pada garis AB dan kemudian mengukur jaraknya sampai garis ACDB. Dengan demikian besaran δ'_{hhm} ditafsirkan sebagai statis momennya luas bidang momen itu terhadap garis ACDB, jadi :

$\delta'_{hhm} = 2.\frac{1}{2}ch.\ 2/3\ h + sh.h = (2/3\ c + s)\ h^2 = (1 - 4/3\ c)\ h^2$.

Dibandingkan dengan pendapat $\delta'_{ch} = (\frac{1}{2}\, 1 - 2/3\ c)\ ch$ ternyata bahwa : $\delta'_{hhm} = 2\delta'_{ch}\ tg\,\alpha = (\delta'_{ch} + \delta'_{dh})\ tg\,\alpha$, sebab dititik-titik C_1 dan D_1 juga turun sejauh $\delta_{ch} = \delta_{dh}$ masing-masing tetapi dipegang oleh batang-batang AC_1 dan BD_1 sehingga C_1 dan D_1 masing-masing juga beralih mendatar sejauh $\delta_{ch}\ tg\,\alpha$ (keluar); dan robahan jarak C_1D_1 ke arah mendatar berarti tak lain δ_{hhm} (diagram Williot). Jadi $\delta_{hhm} = 2\delta_{ch}\ tg\,\alpha$

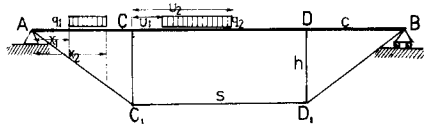
Sekarang besaran a_1 kita ganti dengan x dan a_2 dengan c + u atau $u = a_2 - c$ yang berarti bahwa diantara C dan D, beban P diukur sejauh u dari C.

Jadi tertulis : $\eta_1 = \frac{1}{2}\,(1 - c)\ x - 1/6\ h/c\ x^3$ dan $\eta_2 =$

$= \frac{1}{2}\,(1\text{-}c)\ h\ (c+u) - \frac{1}{2}ch\ (1/3c + u) - \frac{1}{2}\ hu^2$

Ini kita pergunakan untuk menghitung $(\delta^\circ_h)' = \delta^\circ_h\, E_b\ I_b$ pada kejadian menurut gambar VIII, 2d

$$(\delta^\circ_h)' = q_1 \int_{x_1}^{x_2} \eta_1\, dx + q_2 \int_{u_1}^{u_2} \eta_2\, du.$$



Gambar VIII, 2d

Khusus pada beban penuh merata q didapat :

$$(\delta^\circ_h)' = 2q \int_0^c \eta_1\, dx + q \int_0^s \eta_2\, du.$$

Juga boleh dihitung secara langsung.

$M^\circ_x = \frac{1}{2}\, q\ (l_x - x^2)$ dan $y = x\ tg\,\alpha\ h/c$ (daerah AC_1 dan BD_1)

$M^\circ_u = \frac{1}{2}\, q\ [\,l\,(c + u) - (c + u)^2\,] = \frac{1}{2}\, q\ (lc + lu - c^2 - 2cu - u^2)$ dan

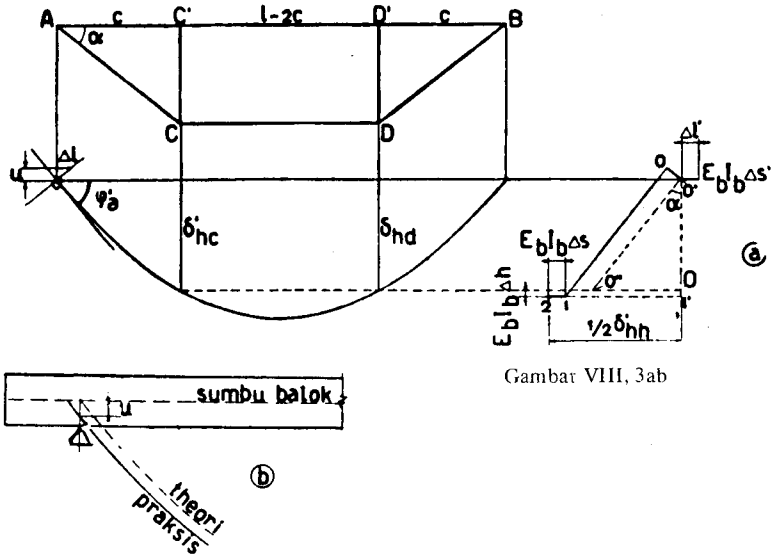
$y = h.\ (C_1 - D_1)$

$$(\delta^\circ_h)' = 2 \int_0^c M^\circ_x\, y\, dx + \int_0^s M^\circ_u\, h\, du$$

Pada pembebanan ½ ql, besaran H menjadi separohnya.

c. *Secara grafis.*

Garis δ'_{hp} digambar sebagai garis momen pada balok AB yang dimuati dengan bidang ACDB. Ordinat di bawah C dinamakan δ'_{hc} dan boleh dianggap sebagai $E_b I_b \times$ ordinat garis elastis di C' sebagai akibat dari



Gambar VIII, 3ab

H = – 1. Turunnya titik C' sedemikian, menimbulkan peralihan mendatar titik C sejauh $\delta'_{hc}\ .tg\,\alpha$. Jadi turunnya C' dan D' menyebabkan penjauhan antara C dan D sebanyak $(\delta'_{hc} + \delta'_{hd})tg\,\alpha = 2\delta'_{hc}\ tg\,\alpha$.

Jika deformasi pada gantungan diabaikan, berarti bahwa $\delta'_{hh} = 2\delta'_{hc}\ tg\,\alpha$ = 2 x panjang garis Oo" (gambar VIII, 3). Ini tercapai dengan secara menggambar garis vertikal Oo" = δ'_{hc} dan kemudian menarik garis o'o" ⊥ AC sedang Oo" ⊥ Oo'. Dengan begitu terdapat

$$Oo'' = \delta'_{hc} \operatorname{tg} \alpha = \tfrac{1}{2}\delta'_{hh} \text{ atau } \delta'_{hh} = 2.Oo''$$

Jika memperhitung robahan panjang pada gantungan, kita menarik garis o'o // CA sepanjang $E_b I_b \Delta s' = E_b I_b \cdot \frac{s'}{EF'_s} \sec \alpha = i_b^2 \frac{F_b}{F'} s' \sec \alpha$ (lihat § 1, a). Kemudian menarik garis o1 ⊥ o'o. Titik 1 ditentukan – terletak sejauh $E_b I_b \Delta h$ di bawah garis mendatar yang melalui titik 0 – (panjang O1' $= E_b I_b \Delta h$). Selanjutnya menarik garis 12 $= E_b I_b \cdot \Delta s$ $= \frac{1}{2} E_b I_b \frac{s}{EF_s} = \frac{1}{2} i_b^2 \frac{F_b}{F_s} s$, serta // CD. Dengan begitu terdapat: $\frac{1}{2}\delta'_{hh} = 1'2$

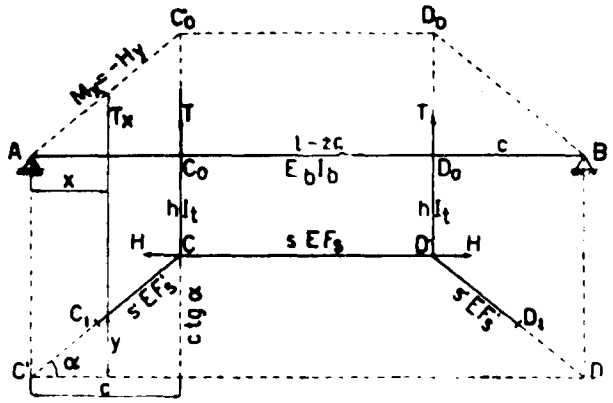
Di dalam praksis, sumbu balok dan sumbu batang AC tidak berpotongan di atas garis vertikal yang melalui titik tengah perletakan (gambar VII, 3). Berhubung dengan itu, pada nilai $\frac{1}{2}\delta_{hh}$ ditambah besaran $\Delta l = u \operatorname{tg} \varphi'_a$ atau pada $\frac{1}{2}\delta'_{hh}$ ditambah besaran $\Delta l' = E_b I_b u \operatorname{tg} \varphi_a = u \operatorname{tg} \varphi'_a$.

Oleh karena bidang ACBD itu dipandang sebagai bidang muatan, maka $\operatorname{tg} \varphi'_a = \frac{1}{2}$ luas ACBD $= \frac{1}{2}(l - c)c \operatorname{tg} \alpha$.

Atau juga $\operatorname{tg} \varphi_a = \left(\frac{d\delta'_{hp}}{da}\right)_{a=o}$

§ 3. Balok dengan sokongan.

Sokongan itu terutama menahan gaya-gaya menekan, sedang gantungan terutama kekuatan-kekuatan menarik.



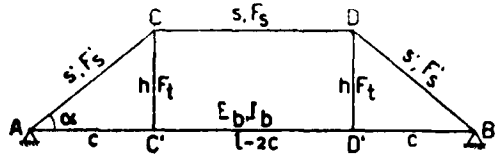
Gambar VIII, 4

Bagaimanapun juga kedudukan muatan pada bangunan seperti gambar VIII, 4 itu, kekuatan normal pada tihang-tihang, CC_o dan DD_o masing-masing terdapat $T = H \operatorname{tg} \alpha$ besarnya. Jadi sebagai akibat dari H ini, balok AB mendapat kekuatan ke atas $T = H \operatorname{tg} \alpha$ di titik-titik C_o dan D_o, yang menimbulkan garis-garis momen M_x yang berbentuk trapezium $(AC'_o D'_o B)$. $M'_x = -Tx = -Hx \operatorname{tg} \alpha = -Hy$. Di bagian antara C_o dan D_o maka $\operatorname{tg} \alpha = o$ dan $y = c \operatorname{tg} \alpha$ tetap . Di sini y diukur pada lukisan C'CDD', jadi tak tergantung pada panjangnya kaki-kaki C_1C dan D_1D.

Selanjutnya rumus-rumus di dalam §1 boleh terpakai di sini. Sedang pada bangunan menurut gambar VIII, 1 kebetulan tinggi tihang $h = c \operatorname{tg} \alpha$, maka di sini h tak berhubungan dengan c dan $c \operatorname{tg} \alpha$ itu hanya berarti nilai y untuk titik C_o.

Jadi untuk menghitung δ'_{hp} kita menganggap bidang C'CDD' sebagai bidang muatan dan selanjutnya:

$$\delta'_{hh} = \int_o^l y^2 dx + 2i_b^2 n \frac{F_b}{F'_s} \cdot s' \sec^2 \alpha + 2i_b^2 n \frac{F_b}{F_t} h \operatorname{tg}^2 \alpha + i_b^2 n \frac{F_b}{F_s} s, \text{ di mana}$$



Gambar VIII, 4a

$s' = C_1C$ = panjang kaki C_1C.

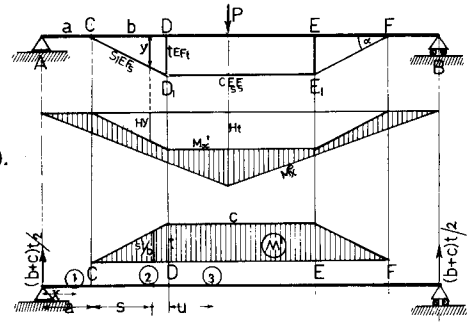
Sokongan menurut gambar VIII, 4 diletakkan di bawah balok. Kita juga dapat memasangnya di atas balok seperti gambar VIII, 4a dan bedanya ialah bahwa sekarang tiang-tiang perantaraa CC' dan DD' tertarik.

§ 4. Gantungan berakhir di antara titik-titik perletakan (Gb. VII,5)

$\delta_{hh} = \delta_{hhm} + \delta_{hhn}$

$\delta_{hhm} = \int y^2\, dx/E_b I_b$

$= (2/3\ b + c)\ t^2/E_b I_d$ (S 2).



Gambar VIII, 5

$\delta_{hhn} = 2\ s_1\ \sec^2 \alpha/EF'_s + b/EF_s + 2\ t\ tg^2\ \alpha/EF_t$

Bidang momen M' yang dihasilkan oleh H = – 1 berbentuk identik dengan trapezium CD_1E_1F. Ini kita pergunakan di dalam hitungan perjalanannya garis pengaruh H dengan hukum Maxwell (analog § 2b).

Luas bidang momen (M') termasuk = (b+c)t.

1) P di titik 1 sejauh x ⩽ a dari A :

   $\delta'_{ph} = \frac{1}{2}(b+c)\ tx = \eta_1$ (garis lurus)

2) P di titik 2 sejauh a ⩽ b dari C :

   $\delta'_{ph} = \frac{1}{2}(b+c)\ t\ (a+s) - 1/6\ s^3\ t/b = \eta_2$

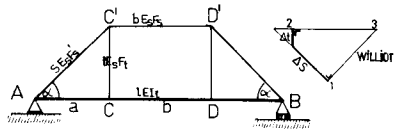
3) P di titik 3 sejauh u ⩽ c dari D

   $\delta'_{ph} = \frac{1}{2}(b+c)\ t\ (a+b+c) - \frac{1}{2}\ bt\ (1/3\ b+u) - \frac{1}{2}tu^2 = \eta_3$.

§ 5. Salah pelaksanaan (gb. VIII, 6)

Pada balok dengan sokongan (atau skor) di atasnya, terdapat bahwa batang C_1D_1 terlalu panjang sebanyak Δb dari pada semestinya (Jadi $C_1D_1 = CD + \Delta b$)

Bagaimanakah akibatnya ?



Gambar VIII, 6

Kejadian ini menyebabkan gaya tekan H di dalam batang C_1D_1 dan tarik pada batang-batang CC_1 dan DD_1 sehingga balok AB melengkung ke atas. Oleh karena itu, gaya H diberi tanda positif (sebab tujuan perkuatan itu supaya mengurangi deformasi lentur pada balok yang ditimbulkan oleh beban).

Telah terdapat : $\delta_{hh} = \delta_{hhm} + \delta_{hhn} = (2/3\ a + b)\ t^2/EI + 2s \sec^2\alpha$

$/E_sF'_s + b/E_sF_s + 2\ t\ tg^2\alpha/E_sF_t$.

$\delta_{ch} = \delta_{dh} = \delta_{ph}$ di C atau di D $= 1/EI\ [\frac{1}{2}(a+b)ta - 1/6\ ta^2)\ ]$

$= 1/EI\ (1/3a + \frac{1}{2}\ b)ta = \frac{1}{2}\ \delta_{hhm}\ \cot.\alpha$

Kita isi $\delta^\circ_h = \Delta b$, jadi $H = \Delta b/\delta_{hh} = H_o$

Supaya balok AB menjadi lurus kembali, maka dibebani dengan P di titik-titik C_1 dan D_1. Berapakan P ini ?

Tujuan ini tercapai apabila $P = T = H\ tg\alpha$.

Beban-beban P menghasilkan $(\delta^\circ_h)_p = 2P\ \delta_{ch} = P\ \delta_{hhm}\ \text{cotg}\ \delta$

Jumlah $\delta^\circ_h = \Delta b + P\ \delta_{hhm}\ \text{cotg}\ \alpha = H\ \delta_{hh}$

Diisi $P = H\ tg\ \alpha$ menjadi

$\Delta b + H\ _{hhm} = H\ (\delta_{hhm} + \delta_{hhn})$.

$$H = \Delta b/\ \delta_{hhn} > H_o$$

Ini juga terdapat secara langsung dengan diagram Williot.

$S = H\ \sec\ \alpha$ (menekan) memandakkan batang-batang AC_1 dan BD_1 masing-masing sebanyak

$\Delta s = S_s/E_sF'_s = H_s\ \sec\ \alpha\ /E_s\ F'_s$ = garis 01

$T = H\ tg\ \alpha$ (menarik) memperpanjang batang-batang CC_1 dan DD_1 masing-masing sebanyak

$\Delta t = Tt\ /\ E_sF_t = Ht\ Tg\ \alpha/\ E_sF_t$ = garis 02.

Satu sama lain berakibat pemindahan titik-titik C_1 dan D_1 ke arah mendatar serta keluar, masing-masing sejauh $\Delta s \sec\alpha + \Delta t\ tg\ \alpha =$

$= H\ (s\ \sec^2\alpha\ /E_sF'_s + t\ tg^2\alpha\ /E_sF_t)$ = garis 23

H sendiri menimbulkan perpandakan pada batang C_1D_1 sebesar $b_o = Hb/E_sF_s$ Dengan demikian terdapat jumlah jarak sejauh $2\,\Delta s \sec\alpha + 2\Delta t \operatorname{tg}\alpha + b_o = H\,(2\,s\sec^2\alpha/E_s\,F'_s + 2t\,\operatorname{tg}^2\alpha/E_sF_t + b/E_sF_s)$ untuk menampung kelebihan panjang b pada batang C_1D_1 itu. Jadi terdapat persamaan :

$H\,(2s\sec^2\alpha/E_s\,F'_s + 2t\,\operatorname{tg}^2\alpha/E_sF_t + b/E_sF_t) = \Delta b$

$H\delta_{hhn} = \Delta b;\quad H = \Delta b/\delta_{hhn}$

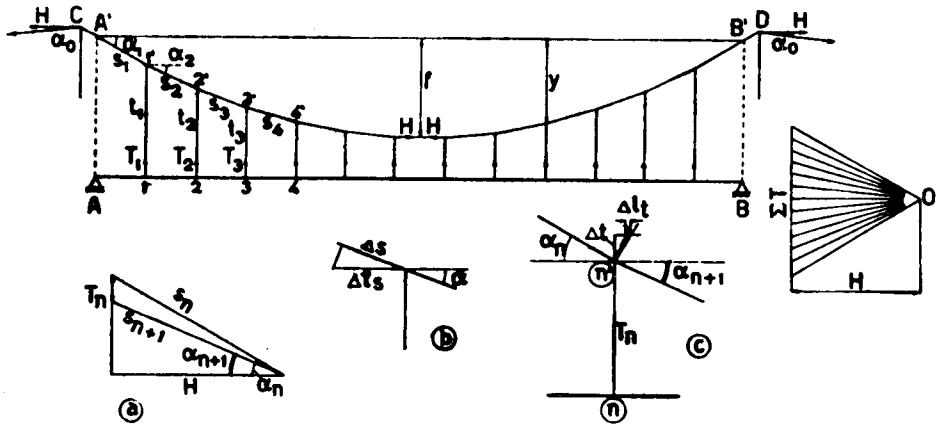
Juga boleh menggunakan hukum Castigliano. Titik-titik pegangan gaya H (yaitu C_1 dan D_1) beralih sejauh $\delta_h = \Delta b = dU/dH = \frac{d\,U_m}{d\,H} + \frac{d\,U_n}{d\,H} = dH = H\,\delta_{hhm} + H\,\delta_{hhn}$.

Oleh karena sama sekali tidak ada momen, maka $U_m = 0$, jadi

$dU_m/dH = H\,\delta_{hhm} = 0$ dan $\Delta b = H\delta_{hhn};\ H = \Delta b/\,\delta_{hhn}$

§ 6. Balok dengan gantungan.

Gantungan terdiri dari kabel atau poligon batang yang tak dapat menaha momen. Oleh karena itu poligon batang pada muatan yang dilimpahkan kepada gantungan bersatu padu dengan padanya, yang berarti bahwa radius-radius kutub // batang-batang gantungan. Lengan kutub H = komponen mendatar dari kekuatan-kekuatan di batang-batang gantungan ini. Jadi gaya pada batang gantungan $S = H \sec\alpha$ (gambar VIII, 7).



Gambar VIII, 7

Tihang-tihang penggantungan melimpahkan muatan di atas balok kepada gantungan. Kekuatan pada sesuatu tiang penggantung terdapat $T = H(\operatorname{tg}\alpha_n - \operatorname{tg}\alpha_{n+1}) = -H\,.\,\Delta\operatorname{tg}\alpha$ (gambar VIII, 7a).

Jadi balok menerima gaya-gaya ke atas $T = -H\Delta\operatorname{tg}\alpha$ pada titik-titik 1, 2, 3 . . . Kita ingat bahwa $\Delta\operatorname{tg}\alpha$ itu negatif.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx};\ \Delta\operatorname{tg}\alpha = \frac{d\operatorname{tg}\alpha}{dx}\,.\,\Delta x = \frac{d^2y}{dx^2}\,.\,\Delta x$$

Kekuatan-kekuatan T menimbulkan garis momen negatif pada balok yang perjalanannya mengikuti batang-batang gantungan, jadi ordinat momen $= -$ H. y dan y diukur dari garis penutup A' B'. Jadi oleh karena T itu-ditimbulkan oleh H, boleh dikatakan bahwa H menimbulkan momen $M'_X = -$ Hy pada balok, Seperti di dalam § 1 kita akan mempelajari beberapa per jalanan.

a. *Dengan faktor pengaruh luar.*

Salah satu batang gantungan kita potong di tampang X. Ini berakibat bahwa kedua-dua ujung potongan X terpisah dan menjauhi satu sama lain. Dengan secara mengadakan kekuatan menarik $S = H \sec\alpha$ pada kedua-dua tampang X tadi kita berusaha memulihkan keadaan lagi, jadi tampang-tampang X harus mendekati kembali satu sama lain. Sebagai akibat dari kekuatan $S = H \sec\alpha$ tadi, tertimbul gaya-gaya di dalam bangunan yaitu :

Momen pada balok $M'_X = -$ Hy, kekuatan-kekuatan tarik di batang-batang gantungan $S = H \sec\alpha$ (di mana $\sec\alpha$ itu variabel) dan kekuatan-kekuatan tarik pada tihang-tihang penggantung $T = -H\Delta\operatorname{tg}\alpha$ (di mana $\Delta\operatorname{tg}\alpha$ negatif nilainya).

Momen-momen $M_X = -$H·y berhasrat mendekatkan tampang-tampang X tersebut di atas sejauh $-\int_o^l M'_x y\,\frac{dx}{E_bI_b} = H\int_o^l y^2\,\frac{dx}{E_bI_b} = \Delta l_m$

(diukur mendatar ke arah dalam).

Batang-batang gantungan yang masing-masing memanjang sebanyak $\Delta s = S\,\frac{s}{EF_s} = H\,\frac{s}{EF_s}\sec\alpha$ menyumbangkan di dalam usaha mendekatkan

tampang-tampang X itu, diukur mendatar, sebanyak $\Sigma\, \Delta s \,.\, \sec\alpha = \Delta l_s =$

$= H \,\Sigma\, \frac{s}{EF_s} \sec^2\alpha$ (lihat gambar VIII, 7b), di mana s = panjang batang.

Tihang-tihang penggantung masing-masing memanjang sebanyak $\Delta t = T\frac{t}{EF_t}$ dan ini menghasilkan pendekatan tampang-tampang X antara satu sama lain, diukur mendatar pula, sejauh $\Delta l_t = \Sigma\Delta t(\text{tg}\,\alpha_n -$

$-\,\text{tg}\,\alpha_{n+1}) = -\,\Sigma\Delta t\,.\,\Delta\text{tg}\,\alpha = -\,\Sigma\, T\frac{t}{EF_t}\Delta\,\text{tg}\,\alpha = H\Sigma\,\frac{t}{EF_t}(\Delta\,\text{tg}\,\alpha)^2$

Jumlah pendekatan mendatar menjadi :

$$\Delta l = \Delta l_m + \Delta l_s + \Delta l_t = H\left(\int_o^l \frac{y^2dx}{E_bI_b} + \Sigma\,\frac{s}{EF_s}\sec^2\alpha + \Sigma\,\frac{t}{EF_t}(\Delta\,\text{tg}\alpha)^2\right) = H\delta_{hh}$$

$= \text{H}\,(\delta_{\text{hhm}} + \delta_{\text{hhn}})$.

Muatan luar menimbulkan di dalam susunan statis tertentu, yaitu balok AB, momen-momen sebesar M_X° yang berkehendak menjauhkan tampang-tampang potongan X tadi sejauh $\int_o^l M_x^\circ y\,\frac{dx}{E_bI_b}$ (diukur mendatar)

$$\text{Jadi } H\delta_{hh} = \int_o^l M_x^\circ y\,\frac{dx}{E_bI_b} \text{ atau } H = \frac{1}{\delta_{hh}}\int_o^l M_x^\circ y\,\frac{dx}{E_bI_b}$$

b. Dengan faktor pengaruh dalam

Pengaruh dari H = — 1 terhadap; momen pada balok $\alpha_m = y$ kekuatan-normal pada batang gantungan, $\alpha_s = -\sec\alpha$; idem tihang penggantung , $\alpha_t = \Delta\,\text{tg}\,\alpha$.

$$H\left(\int\alpha_m^2\frac{ds}{EI} + \Sigma\,\alpha_s^2\frac{s}{EF} + \Sigma\,\alpha_t^2\frac{t}{EF}\right) = \int_o^l M_x^\circ\alpha_m\frac{ds}{EI}$$

$$H\left\{\int_o^l y^2\frac{dx}{E_bI_b} + \Sigma\,\frac{s}{EF_s}\sec^2\alpha + \Sigma\,\frac{t}{EF_t}(\Delta\,\text{tg}\,\alpha)^2\right\} = \int_o^l M_x^\circ y\,\frac{dx}{E_bI_b}$$

c. Dengan hukum Castigliano

$$M_x = M_x^\circ - Hy;\; S = H\sec\alpha;\; T = -H\,.\,\Delta\,\text{tg}\,\alpha$$

$$U = \int M_x^2\frac{dx}{2E_bI_b} + \Sigma\,S^2\frac{s}{2EF_s} + \Sigma\,T^2\frac{t}{2EF_t}$$

$$\frac{dU}{dH} = o$$

$$\int_o^l M_x\frac{dM_x}{E_bI_b} + \Sigma\,S\,\frac{dS}{dH}\cdot\frac{s}{EF_s} + \Sigma\,T\,\frac{dT}{dH}\,\frac{t}{EF_t} = 0$$

$$\frac{dM_x}{dH} = -y;\; \frac{dS}{dH} = \sec\alpha;\; \frac{dT}{dH} = -\Delta\,\text{tg}\,\alpha,\ \text{dst.}$$

d. Secara langsung

Sebagai akibat dari muatan luar dan gaya-gaya di dalam penggantung, tampang-tampang X harus tetap bersatu (tak beralih):

$$\int M_x\,.\,y\,\frac{dx}{E_bI_b} - \Sigma\,S\,\frac{s}{EF_s}\sec\alpha + \Sigma\,T\,\frac{t}{EF_t}(\Delta\,\text{tg}\,\alpha) = 0$$

$$\int(M_x^\circ - H)y\,\frac{dx}{E_bI_b} - H\,\Sigma\,\frac{s}{EF_s}\sec^2\alpha - H\,\Sigma\,\frac{t}{EF_t}(\Delta\,\text{tg}\,\alpha)^2 = 0,\ \text{dst.}$$

Apabila F_b, F_S dan F_t itu tetap sama untuk semuanya, sedang $\frac{E_b}{E} = n$ kita dapat menyederhanakan hitungan dengan secara melipatkan pendapat pendapat tadi dengan $\text{E}_\text{b}\text{I}_\text{b}$

$$\delta_{hh} = \delta_{hh}E_bI_b \int_o^l y^2dx + ni_h^2\left(\frac{F_b}{F_s}\,\Sigma s\sec^2\alpha + \frac{F_b}{F_t}\,\Sigma\,t(\Delta\,\text{tg}\,\alpha)^2\right)$$

Selanjutnya, jika jarak antara tihang-tihang itu tetap — a maka $s = \text{a}\sec\alpha$ dan suku $\frac{F_b}{F_s}\,\Sigma\,s\sec^2\alpha$ menjadi $\frac{F_b}{F_s}\,\Sigma\sec^3\alpha$. Kemudian jika titik-titik V, 2', 3' . .itu terletak di atas parabol dengan persamaan $y = x(l-x)4\frac{f}{l^2}$, maka $\text{tg}\,\alpha = \frac{dy}{dx} = (l-2x)4\frac{f}{l^2}$ dan $\Delta\,\text{tg}\,\alpha = \frac{d\,\text{tg}\,\alpha}{dx}$ $\Delta x = \frac{d^2y}{dx^2}\,\text{a} = -\,8\frac{f}{l^2}\,.\,\text{a} =$ tetap pula. Dengan begitu suku $\frac{F_b}{F_t}\,\Sigma t(\Delta\,\text{tg}\,\alpha)^2$ menjadi $\left(\frac{8f}{l^2}\,\text{a}\right)^2\frac{F_b}{F}\,\Sigma\,t$. Ini berarti pula, bahwa $T = -H\,\Delta\,\text{tg}\,\alpha$ tetap sama pada semua tihang..

Pada akhirnya, jika sebagai pendekatan diambil $\int y^2 dx = \Sigma y^2 . \Delta x = a \Sigma y^2$, menjadi:

$$\delta'_{hh} = a \left\{ \Sigma y^2 + ni_b^2 \left(\frac{F_b}{F_s} \Sigma \sec^3 \alpha + \frac{1}{a} \left(\frac{8fa}{l^2} \right)^2 \frac{F_b}{F_t} \Sigma t \right) \right\}$$

§ 6a. **Lanjutan, garis pengaruh H.**

Muatan berdiri sejauh u dari A

$$M^o_{x<u} = P \frac{(l-u)}{l} x \text{ dan } M^o_{x>u} = P \frac{u}{l} (l-x)$$

$$P\delta_{hp} = \int M^o_x y \frac{dx}{E_b I_b} = P \left(\int_o^u \frac{(l-u)}{l} xy \frac{dx}{E_b I_b} + \int_u^l \frac{u}{l} (l-x) y \frac{dx}{E_b I_b} \right)$$

jika I_b itu tetap, menjadi :

$$\delta_{hp} = \frac{1}{E_b I_b} \left\{ \int_l^u \frac{(l-u)}{l} xydx + \int_u^l \frac{u}{l} (l-x) ydx \right\}$$

$$\delta'_{hp} = \delta_{hp} E_b I_b = \int_o^u \frac{(l-u)}{l} xydx + \int_u^l \frac{u}{l} (l-x) ydx$$

Ini berarti momen di bawah P pada balok AB yang dimuati dengan bidang muatan dengan ordinat = y, jadi bidang antara garis A'B' dan batang gantungan (gambar VIII, 7) dianggap sebagai muatan Seperti biasa, kita mendapat :

$$H = P\delta'_{hp}/\delta'_{hh}$$

a. Secara analisa.

Titik-titik hubungan pada batang-batang gantungan terletak di atas parabol menurut $y = x(l-x)4\frac{f}{l^2}$.

Menurut pendapat di atas, dengan a tetap, $\Delta \operatorname{tg} \alpha$ juga tetap dan $T = -H \Delta \operatorname{tg} \alpha$ tetap sama besarnya pada semua tihang-tihang penggantung.

Untuk *kabel* kita mendapat :

$$\int_o^l y^2 dx = 16 \frac{f^2}{l^4} \int_o^l x^2 (l-x)^2 dx = \tfrac{8}{15} lf^2 \quad \text{(Bandingkan bab VI, § 15).}$$

$$\delta'_{hh} = \tfrac{8}{15} lf^2 + ni_b^2 \left(a \frac{F_b}{F_s} \Sigma \sec^3 \alpha + (\Delta \operatorname{tg} \alpha)^2 \frac{F_b}{F_t} \Sigma t \right) = (1+u) \tfrac{8}{15} lf^2$$

$$\delta_{hp} = \int_o^u \frac{(l-u)}{l} xydx + \int_u^l \frac{u}{l} (l-x) ydx = \tfrac{1}{3} \frac{u(l-u)(l^2 + lu - u^2)}{l^2} f$$

$$H = \tfrac{3}{8} \frac{u(l-u)(l^2 + lu - u^2)}{(1+u) l^3 f}$$

Jika menjalankan pendekatan.

$$\int y^2 dx = \Sigma y^2 . \Delta x = a \Sigma y^2 \text{ (lihat atas);}$$

$$\delta'_{hp} = a \left\{ \sum_o^u \frac{(l-u)}{l} xy + \sum_u^l \frac{u}{l} (l-x) y \right\}$$

$$\delta''_{hh} = \frac{1}{a} \delta'_{hh} = \sum_o^u y^2 + ni_b^2 \left\{ \frac{F_b}{F_s} \Sigma \sec^3 \alpha + \frac{1}{a} (\Delta \operatorname{tg} \alpha)^2 . \frac{F_b}{F_t} \Sigma t \right\}$$

$$\delta''_{hp} = \frac{1}{a} \delta'_{hp} = \sum_o^u \frac{(l-u)}{l} xy + \sum_u^l \frac{u}{l} (l-x) y$$

Ini berarti bahwa δ''_{hp} terdapat jika ordinat-ordinat y pada titik-titik hubungan digantung diambil sebagai muatan.

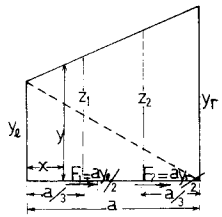
Kemudian: $H = P\delta''_{hp}/\delta''_{hh}$.

a **Secara analisis (gb. VIII, 8)**

Garis momen $M'_x = -H_y = y$

sebagai akibat dari H = −1 berbentuk poligon batang yang menukik-nukik di antara tihang-tihang penggantung.

Kita pelajari satu lapangan sepanjang a yang dibatasi oleh ordinat-ordinat y_l (kiri) dan y_r (kanan)



Gambar VIII, 8

$y = y_l + x (y_r - y_l)/a$

$dy = dx (y_r - y_l)/a$ atau $dx = dy \ a/(y_r - y_l)$

$\int y^2 dx = a/(y_r - y_l) \int y^2 dx = 1/3 \ a (y_l^2 + y_r^2 + y_l y_r)$.

Jadi pada keseluruhannya terdapat :

$\delta_{hhm} = \int y^2 dx / E_b I_b = a/3 E_b I_b \ \Sigma y_l^2 + y_r^2 + y_l r_r$ atau

$\delta_{hhm} = \delta_{hhm} E_b I_b = 1/3 \ a \ \Sigma y_l^2 + y_r^2 + y_l y_r$.

Pada lapangan pertama dari kiri, diisikan : $y_l = y_o = O$, $y_r = y_1$; pada lapangan kedua, $y_l = y_1$ dan $y_r = y_2$, pada lapangan terakhir, $y_l = y_{n-1}$, $y_r = y_n = O$

Dengan cara **moment-area** kita menganggap luas bidang M'_x itu sebagai gaya mendatar. Untuk sesuatu lapangan terdapat :

$\int y^2 dx = \int y dx . y = \frac{1}{2} F_1 z_1 + \frac{1}{2} F_2 z_2$ (lihat § 2,b) dengan :

$F_1 = \frac{1}{2} a y_1$, $F_2 = \frac{1}{2} a y_r$, $z_1 = 2/3\ y_1 + 1/3\ y_r$ dan $z_2 = 2/3\ y_r + 1/3\ y_1$

$\frac{1}{2} F_1 z_1 + \frac{1}{2} F_2 z_2 = \frac{1}{2} a\ [\ y_1 (\ 2/3\ y_1 + 1/3\ y_r) + y_r (2/3\ y_r + 1/3\ y_1)]$

$= 1/3\ a\ (y_1^2 + y_r^2 + y_1 y_r$

$\delta_{hhn} = \Sigma\ s\ \sec^2\alpha / EF_s + \Sigma\ t\ (\Delta\ tg\ \alpha)^2 / EF_t$

Hitungan $\delta'_{hp} = \delta_{ph}\ E_b I_b$ juga dapat dijalankan dengan perantaraan bidang M'_x yang besarnya $F = \frac{1}{2} a\ [\ (y_o + y_1) + (y_1 + y_2) + (y_2 + y_3) + ...]$

$= \frac{1}{2}\ a\ \Sigma\ (y_1 + y_r)$ dianggap sebagai luas bidang muatan, jadi reaksi — reaksi perletakannya masing-masing = ½ F.

$(\delta'_{ph})_o = \delta'_{oh} = 0$ (P di atas titik 0)

$(\delta'_{ph})_1 = \delta'_{1h} = \frac{1}{2} F.2a - a^2 y_1 - 1/6\ a^2 y_2$

$(\delta'_{ph})_2 = \delta'_{2h} = \frac{1}{2} F.2a - a^2 y_1 - 1/6\ a^2 y_2$

$(\delta'_{ph})_3 = \delta'_{3h} = \frac{1}{2} F.3a - 2a^2 y_1 - a^2 y_2 - 1/6\ a^2 y_3$

$(\delta'_{ph})_k = \delta'_{kh} = \frac{1}{2} F.ka - (k-1) a^2 y_1 - (k-2) y_2^2 - (k-3) a^2 y_3 - .....$

$a^2 y_{k-1} - 1\&\ 1/6\ a^2 y_k$ (P di atas titik K)

Terdapat rumus yang ada sistematiknya.

Apabila garis M'_x itu dianggap sebagai kurva yang laju, sedang bentuknya parabol menurut $y = (l_x - x^2)\ 4f/l^2$, maka terdapat :

$\delta'_{hhm} = \int y^2 dx = (16\ f^2/l^4) \int (l^2 x^2 - 2\ l x^3 + x^4)\ dx =$

$= 8/15\ l r^2$ (bab VI, § 15)

$\delta'_{ph} = 1/3\ x\ (l - x)\ (l^2 + l^\circ_x - x^2)\ f/l^2 = 1/3\ (x/l)\ (1 - x/l)\ (1 + x^2/l^2)\ l^2 f.$

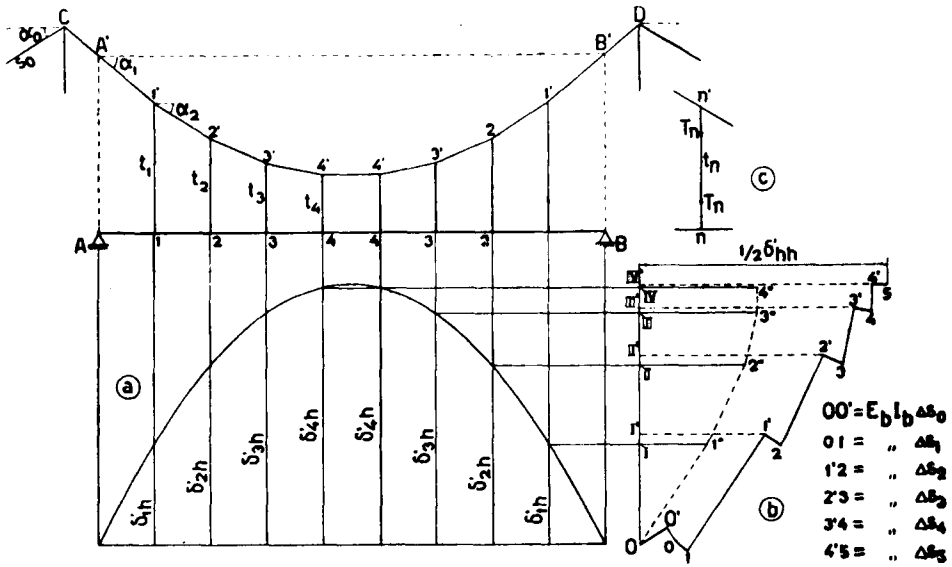
Untuk titik 1 diisi x = a, titik k, x = ka.

b. Secara grafis.

Bidang di antara garis penutup A'B' dan sumbu gantungan kita anggap sebagai bidang muatan.

Dengan perantaraan gambar-Kutub kita menggambar polygon Batang pada muatan ini yang melukiskan perjalanan besaran $\delta'_{hp} = \delta'_{ph}$. Ordinat-ordinat di bawah titik-titik 1, 2, 3 . . . kita sebut δ'_{1h}, δ'_{2h}, δ'_{3h} yang berarti pula $E_b I_b$ kali ordinat-ordinat pada garis lentur yang ditimbulkan oleh H = 1 (gambar VII, 9a).

Berdasarkan atas poligon batang yang terdapat tadi, kita juga dapat mengetahui δ'_{hh}. Untuk ini kita memproyeksikan δ_{1h}, δ_{2h}, . . . di atas garis garis vertikal yang menghasilkan titik-titik O,I,II,III dan IV (gambar VIII, 9b).



Gambar VIII, 9

Jadi $OI = \delta'_{1h}$, $OII = \delta'_{2h}$, **dst.** Perpanjangan-perpanjangan pada tihang tihang penggantung setelah dilipatkan dengan $E_b I_b$ diperhitung juga dengan secara menambahkannya pada δ'_{1h}, δ'_{2h} ..... Jadi

$I - I' = E_b I_b . \Delta t_1 = n i_b^2 \frac{F_b}{F_{t1}} . t_1 . (tg\ \alpha_1 - tg\ \alpha_2)$; $II - II' = n i_b^2 \frac{F_b}{F_{t2}} . t_2$ $(tg\ \alpha_2 - tg\ \alpha_3)$, **dst.**

Kemudian kita menarik garis-garis mendatar dari titik-titik O, I', II', III' dan IV'. Kita menarik garis $OO' = E_b I_b \Delta s_o = ni_b^2 \cdot \frac{F_b}{F_s} \cdot s_o \sec \alpha_o$ (perpanjangan kabel penanam sebagai akibat dari H = 1) serta // s_O sendiri. Kemudian dari O' menarik garis ⊥ OO' yang memotong garis-datar yang melalui O, di titik o.

Panjang garis Oo melukiskan sumbangan kabel penanam (anker) pada peralihan tampang-tampang X seperti termaksud di dalam § 6. Garis o1 ditarik // batang C1' sepanjang $E_b I_b \Delta s_1 = ni_b^2 \frac{F_b}{F_s} \cdot s_1 \sec \alpha_1$ di mana s_1 = panjang batang C1'. Dari titik 1 ditarik garis ⊥ batang C1' (atau o1) sampai memotong garis mendatar dari titik I' di titik 1. Garis 1'2 ditarik // batang 1' 2' sepanjang

$$E_b I_b \Delta s_2 = ni_b^2 \frac{F_b}{F_s} \cdot s_2 \sec \alpha_2$$

di mana s_2 = panjang batang 1' 2', Kemudian dari titik 2 ditarik garis ⊥ batang 1' 2' (atau ⊥ 1'2) hingga memotong garis datar dari titik II' di titik 2', Garis 2' 3 sepanjang $E_b I_b \Delta s_3 = ni_b^2 \frac{F_b}{F_s} \cdot s_3 \sec \alpha_3$ ditarik // batang 2'3' dan dari titik 3 di tarik garis ⊥ 2'3 yang memotong garisdatar dari titik III' di titik 3', dan seterusnya. Dengan begitu kita mendapat — gambar Williot seperti terlukis di gambar VIII, 6b. Jarak mendatar antara titik-titik IV' dan 5 melukiskan $\frac{1}{2}\delta'_{hh}$.

Jika deformasi pada bangunan gantungan diabaikan kita mendapat garis-garis O1" ⊥ C1' ; 1"2" ⊥ batang 1'2'; 2"3" ⊥ batang 2'3', dan seterusnya. Titik-titik 1", 2", 3" dan 4" terletak di atas garis-garis mendatar yang ditaris dari titik-titik I, II, III, dan IV.

Menurut lukisan di atas tadi, δ_{1h} dan Δt_1 digabungkan, dan dengan begitu kita mendapat titik I'. Jadi pada umumnya, δ_{nh} dan Δt_n boleh digabungkan dengan begitu saja, di mana n berarti nomor tihang penggantung (gambar VIII, 6c). Sebagai akibat dari H, titik n naik sejauh $H\delta_{nh}$. Di tiang t_n tertimbul kekuatan $T_n = H(\operatorname{tg} \alpha_n - \operatorname{tg} \alpha_{n+1})$ yang memperpanjang tihang itu sebanyak $\Delta t_n = T_n \cdot \frac{t_n}{EF_t} = H \frac{t_n}{EF_t} (\operatorname{tg} \alpha_n - \operatorname{tg} \alpha_{n+1})$.

Ini menaikkan titik n' sejauh Δt_n itu. Oleh karena titik n telah naik oleh momen balok yang disebabkan oleh H tadi, jadi titik n' naik sejumlah

$$(H\delta_{nh} + \Delta t_n) = H\left\{ \delta_{nh} + \frac{t_n}{EF_t} (\operatorname{tg} \alpha_n - \operatorname{tg} \alpha_{n+1}) \right\} = H \cdot \delta_{th}.$$

Menurut hukum Maxwell, $\delta_{th} = \delta_{ht}$.

Sebagai akibat dari T_n titik-titik pegangan H (yaitu tampang-tampang potongan X) akan beralih sejauh

$$T_n \delta_{ht} = H(\operatorname{tg} \alpha_n - \operatorname{tg} \alpha_{n+1}) \left\{ \delta_{nh} + \frac{t_n}{EF_t} (\operatorname{tg} \alpha_n - \operatorname{tg} \alpha_{n+1}) \right\}$$

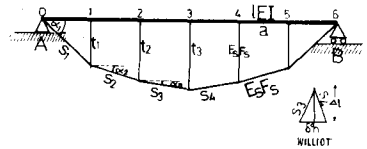
Jadi sumbangan berasal dari naiknya titik-titik hubungan dan perpanjangan tihang-tihang penggantung kepada peralihan titik-titik pegangan H ada:

$$H \Sigma (-\Delta \operatorname{tg} \alpha) \delta_{ht}, \text{ dengan } \delta_{ht} = \delta_{th} = \delta_{nh} + \frac{t_n}{EF_t} (-\Delta \operatorname{tg} \alpha).$$

Jadi δ_{nh} dan $\frac{t_n}{EF_t} (-\Delta \operatorname{tg} \alpha)$ itu mempunyai multiplikator tunggal, yaitu $(-\Delta \operatorname{tg} \alpha)$, dan oleh karena itu boleh digabungkan.

§ 7. Salah pelaksanaan (gb. VIII, 10)

Batang tengah terlalu panjang sebanyak Δt_3 Bagaimanakah akibatnya ? Kita menggunakan hukum Castigliano



Gambar VIII, 10

$\Delta t_3 = dU/dT_3 = (dU/dH)(dH/dT_3)$.

$dU/dH = \delta_h = H\, \delta_{hh}$.

$T_3 = 2H \operatorname{tg} \alpha_3$. Jadi $dH/dT_3 = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \alpha_3$

$\Delta t_3 = \frac{1}{2} H\, \delta_h \operatorname{cotg} \alpha_3$

$H = 2\, \Delta t_3 \operatorname{tg} \alpha_3 / \delta_{hh}$

$\delta_{hh} = \delta_{hhm} + \delta_{hhn} = a/3E_bI_b \; \Sigma(y_l^2 + y_r^2 + y_l y_r) + \Sigma\, s \sec^2 \alpha / EF_s +$

$+ \Sigma\, t\, (\Delta \operatorname{tg} \alpha)^2 / EF_t$

$\delta'_{hhm} = 2a/3\, (t_1^2 + t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_1 t_2 + t_2 t_3)$ sebab y = t.

Juga terdapat dengan Williot, yang memperlihatkan bahwa :

$$\delta_h^\circ = 2\ \Delta t_3\ tg\ \alpha_3 = H\ \delta_{hh};\quad H = 2\Delta t_3\ tg\ \alpha_3\ /\ \delta_{hh}$$

Kemudian terdapat : $M_1 = M_5 = Ht_1$; $M_2 = M_4 = -Ht_2$; $M_3 = -Ht_3$

Balok melengkung ke atas.

Sekarang diusahakan supaya balok menjadi **lurus** kembali secara membebani nya di titik-titik 1 s/d 5, yaitu:

$P_1 = P_5 = H\ (tg\ \alpha_1 - tg\ \alpha_2)$;

$P_2 = P_4 = H\ (tg\ \alpha_2 - tg\alpha_3)$; $P_3 = 2H\ tg\ \alpha_3$

Oleh karena balok tetap lurus sehingga tidak ada momen di manapun juga, berarti bahwa $H\ \delta_{hhm} = dU_m/dH = 0$. Jadi $\delta_h^\circ = H\ \delta_{hhn}$ (lihat § 5).

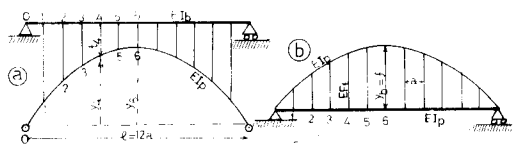
Atau juga $(\ \delta_h^\circ\ )_p = P\ \delta_{ph} = H\ [\ 2\ \delta_{1h}\ (tg\ \alpha_1 - tg\ \alpha_2) + 2\ \delta_{2h}\ (tg\alpha_2 - tg\ \alpha_3) + 2\ \delta_{3h}\ tg\ \alpha_3\ ] = H_{hhm}$ (§ 2,6 diperluas).

$\delta_h^\circ + (\ \delta_h^\circ)_p = \delta_h^\circ + H\ \delta_{hhm} = H\ (\delta_{hhm} + \delta_{hhn})$; $H = \delta_h^\circ\ /\ \delta_{hhn} =$

$= 2\ \Delta t_3\ tg\ \alpha_3\ /\ \delta_{hhn}$.

§ 8. Pelengkung sebagai sokongan (gb. VIII, 11)

Ini sebetulnya kabel terbalik, dan di dalam praksis boleh dilaksanakan sebagai pelengkung laju (konstruksi beton misalnya) jadi bukan bentuk poligon. Namun demikian, garis $M_x = -H.y$ tetap merupakan poligon batang



Gambar VIII, 11

Oleh karena sokongan sekarang bersifat kaku sehingga dapat menerima momen, maka $M_x = M_x^o - H.y$ pada penampang X dibagi-bagi kepada balok dan pelengkung menurut perbandingan : $M_{xb} : M_{xp} = E_bI_b : E_pI_p\ \cos\ \alpha$ jika α = sudut antara garis datar dan garis singgung pelengkung di penampang X itu.

Jadi terdapat : $M_{xb} = M_xE_bI_b/(E_bI_b + E_pI_p\ \cos\ \alpha) = \omega M_x$ dan

$$M_{xp} = (1 - \omega)M_x.$$

Diingat, bahwa akan terdapat M_x^+ max. dan M_x^- max.

Di samping menahan momen, penampang X pada pelengkung masih menerima juga gaya normal, yaitu $N_x = H\ sec\ \alpha$ (satu sama lain dengan perantaraan garis pengaruhnya $M_x = M_x^o - Hy = (M_x^o / y - H)_y$

Berhubung sekarang pelengkung juga menahan momen, bangunan juga sering-sering dinamakan : **pelengkung dengan balok peneguh** (pengaku, penguat). Pada bangunan seperti di gambar kanan, balok juga bekerja sebagai **batang tarik.**

Selanjutnya berlaku rumus-rumus di dalam § 6 :

$$\delta_{hhm} = \int y^2dx\ /\ E_bI_b = a/\ 3E_bI_b\ \ \Sigma\ (y_l^2 + y_r^2 + y_l\ y_r)$$

$$\delta_{hhn} = \Sigma\ s\ sec^2\ \alpha/EF_s + \Sigma\ t\ (\Delta\ tg\ \alpha\ )^2/EF_t$$

$$(\ \delta_{ph}\ )_k = \delta_{kh} = 1/E_bI_b\ [\tfrac{1}{2}\ Fka - (k-1)\ a^2y_1 - (k-2)a^2y_2 - (k-3)\ a^3y_3 - a^2y_{k-1} - 1/6\ a^2y_k$$

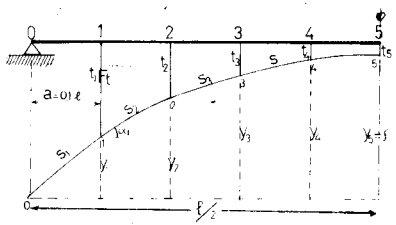
Sebagai pendekatan juga boleh diambil $\delta_{hhm} = a\ \Sigma\ y^2/E_bI_b$ dan untuk menghitung $\delta_{ph}\ E_bI_b$, unsur bidang M'_x sebesar $\Delta\ F = ay$ dianggap sebagai beban muatan, jadi $\Delta\ F_1 = ay_1$ bekerja di titik 1, $\Delta\ F_2 = ay_2$ di-titik k.

§ 8a. Contoh (gb. VIII, 12)

Balok dengan pelengkung parabol di bawahnya menurut data-data sebagai berikut :

$l = 10a = 5f$, jadi $f = 2a$; $t_5 = 0{,}25\ a$

$I_b/F_p = I_b/F_s = 0{,}02\ a^2$; $I_b/F_t = 0{,}06a^2$



Gambar VIII, 12

Persamaan pelengkung

$y = x(1-x)\ 4f/l^2$ atau $y/a = (x/l)(1-x/l)\ 4f/a = 8(x/l)(1-x/l)$.

$\delta'_{hhm} = \delta_{hhm}\ EI_b/a^3 = 1/3\ \Sigma\ (y/a)_1^2 + (y/a)_r^2 + (y/a)_1(y/a)_r$

yang tidak berdimensi.

$\delta'_{hhn} = \delta_{hhn}\ EI_b/a^3 = \Sigma(s/a)\ \sec^2\alpha\ (I_b/F_p a^2) + (\Delta tg\alpha)^2$

$(t/a)(I_b/F_t a^2) = \Sigma\ \sec^3\alpha\ (I_b/F_p\ a^2) + (\Delta tg\alpha)^2\ (t/a)(I_b/F_t a^2)$,

juga tidak berdimensi

$\Delta tg\alpha = -8\,(f/a)\ (f/l) = -\ 8.2.0{,}1. = -\ 0{,}16.$

Untuk mudahnya, kita menghitung secara daftar

	Titik	0	1	2	3	4	5
I	x/l	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
II	1 – x/l	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
III	y/a = 8 x/l(1–x/l)	0	0,72	1,28	1,68	1,92	2.00
IV	Q (gaya-lintang)	6,60	5,88	4,60	2,92	1,00	
V	$M/a = \delta'_{ph}$	0	0,660	1,248	1,708	20,00	21,00
VI	$(y/a)^2$	0	0,52	1,64	2,82	3,69	4,00
VII	$(y/a)_l \cdot (y/a)_r$		0	0,92	2,66	3,24	3,84
VIII	$Tg\,\alpha = \Delta y/a$		0,72	0,56	0,40	0,24	0,08
IX	$Tg^2\,\alpha$		0,52	0,31	0,16	0,06	0,006
X	$\sec\alpha = V\ 1+tg^2$		1,23	1,13	1,08	1,02	1,003
XI	$Sec^3\,\alpha$		1,85	1,44	1,26	1,06	1,01
XII	t/a		1,53	0,97	0,57	0,33	0,25

$\delta'_{hhm} = 2/3\ [2(y/a)_1^2 + 2(y/a)_2^2 + \ldots\ldots + (y/a)_5^2 + (y/a)_2 + (y/a)_2(y/a)_3 +$

$+(y/a_4)\ (y/a_5)]$

= 21.00 (lihat garis-garis VI dan VII didaftar).

$\delta'_{hhn} = 0{,}02.13{,}24 + 0{,}06.0{,}16^2.7{,}05 = 0{,}26+0{,}20 = 0{,}27$ (garis-garis XI dan XII)

$\delta'_{hh} = 21.00 + 0{,}27 = 21{,}27.$

½F = ½ luas bidang $(y/a) = (y/a)_1 + (y/a)_2 + (y/a)_3 + (y/a)_4 + ½\,(y/a)_5 = 6{,}60$

$(\delta'_{ph})_k = \delta'_{kh} = ½\ F.k - (k-1)(y/a)_1 - (k-2)(y/a)_2 \ldots\ldots (y/a)_{k-1} - 1/6\ (y/a)_k^2$

Ordinat pengaruh H $\eta_k = \delta'_{kh}/\ \delta'_{hh}/21{,}27$

$(\delta'_{ph})_o = \delta'_{oh} = \ldots\ldots\ 0\ ;\quad \eta_o = 0 \qquad \eta_o = 0$

$(\delta'_{ph})_o = \delta'_{oh} = 6{,}60.1 - 1/6.\ 0{,}72 = \ldots\ldots\ 6{,}48;\quad \eta_1 = 0{,}290$

$\delta'_{2h} = 6{,}60.2 - 0{,}72 - 1/6.1{,}28 = \ldots\ldots\ 12{,}27;\quad \eta_2 = 0{,}552$

$\delta'_{3h} = 6.60.3 - 2.0{,}72 - 1{,}28 - 1/6.1{,}68 = \ldots 16{,}80\quad \eta_3 = 0{,}764$

$\delta'_{4h} = 6{,}60.4 - 3.0{,}72 - 2.1{,}28 - 1{,}68 - 1/6.1{,}92 \ldots\ldots 19{,}68;$

$\eta_4 = 0{,}880$

$\delta'_{5h} = 6{,}60.5 - 4.0{,}72 - 3.1{,}28 - 2.1{,}68 - 1{,}92 - 1/6.2{,}000 =$

$20{,}59;\ \eta_5 = 0{,}965.$

Sekarang secara pendekatan seperti termaksud di dalam § 8 terakhir.

Dengan $\int y^2 dx \approx \Sigma\ \Sigma y^2.\ \Delta x = \Sigma\ y^2.a$ maka $\delta'_{hh} EI_b/a^3 = \Sigma(y/a)^2$ = 21,34 (garis VI daftar). Di dalam hitungan $\delta'_{ph} = \delta_{ph} EI_b/a^3$, besaran-besaran (y/a) dianggap sebagai beban, dan δ'_{ph} terdapat sebagai 1/a momennya (garis-garis III, IV, V).

Besaran δ'_{hhn} tidak berobah, $\delta'_{hh} = 21{,}34 + 0{,}27 = 21{,}61$

Jadi $\eta_k = \delta'_{kh}/21{,}61.$

Titik	0	1	2	3	4	5
$\delta'_{ph} = \delta'_{kh}$	0	6,60	12,48	17,08	20,00	21,00
η	0	0,293	0,293	0,767	0,883	0,968

Untuk lengkapnya dibandingkan dengan pendapat-pendapat didasarkan atas Anggapan bahwa garis $M'_x = -Hy$ berbentuk pelengkung juga. Soal menjadi identik dengan pelengkung dua sendi dan kita dapat menggunakan hasil-hasil di dalam Bab VI, § 15.

$\delta'_{hhm} = \int y^2 dx/a^3 = 8/15\ lf^2/a^3 = 8/15.10.2^2 = 21{,}33;$

$\delta'_{hh} = 21{,}33 + 0{,}27 = 21{,}60$

$\delta'_{ph} = 1/3a^3 \times (l-x)(l^2+lx-x^2)\ f/l^2 = 1/3\ (x/l)(1-x/l)(1+x/l)(1+x/l-x^2/l^2)$

$(l/a)^2\ (f/a) = 200/3\ (x/l)(1-x/l)(1+x/l^2).$

Titik	0	1	2	3	4	5
x/l	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\delta'_{ph} = \delta'_{kh}$	0	6,54	12,37	16,91	19,84	10,484
η	0	0,30	0,57	0,78	0,91	0,96

Terlihat, bahwa ketiga-tiga hasil itu tidak begitu berbeda dari satu dengan yang lain, dan di dalam praktis biasanya cara yang kedua itu yang dipergunakan, sebab yang paling mudah.

Juga terdapat bahwa $\delta'_{hhn} \ll \delta'_{hhm}$, yaitu $\delta'_{hhn} / \delta'_{hhm} = 0{,}015$.

Sehingga dapat diabaikan di dalam pra-rencana (pre-design).

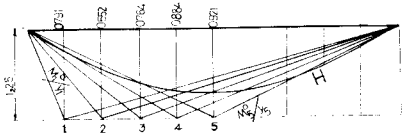
Setelah terdapat nilai-nilai η, kita menggambar garis-garis pengaruh

$M_x = M_x^\circ - Hy = (M_x^\circ/y - H)y.$

Garis pengaruh M_x° berbentuk segitiga dengan ordinat-puncak

$= x(l-x)/l = yl/4f$ sebab $y = x(l-x)\ 4f/l^2$

Jadi ordinat puncak $M_x^\circ/y = l/4f$ = tetap dan di dalam contoh ini = 1,25 (gb. VIII, 12a).



Gambar VIII, 12a

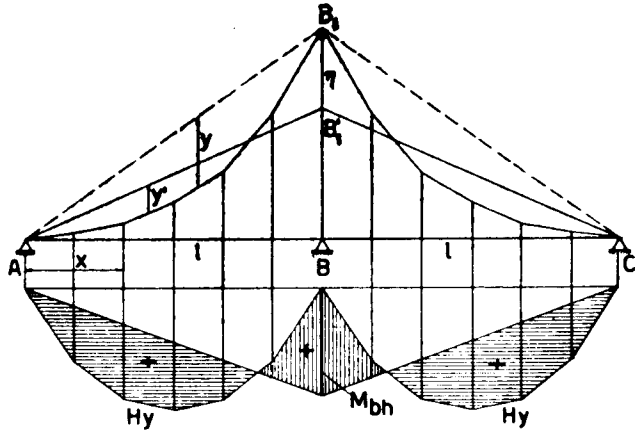
Kemudian menentukan besarnya M^+max. dan M^-max. disertai H yang bersangkutan; yang terakhir ini untuk menentukan besarnya $N_x = H \sec \alpha$ yang menyertai $M^{\pm}_{xp}$ max. Dengan demikian penampang pelengkung dihitung berdasarkan N exsentris.

§ 9. Balok di atas tiga perletakan dengan gantungan.

Bangunan ini statis tak tertentu berganda dua:

a. Susunan dasar diambil balok di atas tiga perletakan yang sendirinya masih statis tak tertentu (tunggal). Komponen mendatar pada batang-batang gantungan H menimbulkan momen sebesar Hy pada balok statis tertentu dan momen peralihan sebesar M_{bh} di titik perletakan tengah B, yang boleh dihitung dengan persamaan tiga momen.

Perlu dimengerti bahwa y diukur terhadap garis-garis AB_1 dan CB_1



Gambar VIII, 13

$$2H\,\frac{1}{l}\int_o^l yx\,\frac{dx}{E_b I_b} = \tfrac{2}{3} M_{bh}\,\frac{l}{E_b I_b}$$

$$M_{bh} = H\,.\,\frac{3}{l^2}\int_o^l yx\,dx = H\,.\,\eta_1 \text{ dimana } \eta_1 = \frac{3}{l^2}\int_o^l yx\,dx \text{ itu nilai tetap.}$$

M_x berarti momen tampang pada balok terusan dia atas tiga titik perletakan, jadi di dalam susunan dasar.

$$M_x = M'_x - Hy + \frac{x}{l}\,M_{bh}$$

Tanda + di muka M_{bh} disebabkan oleh arah kerjanya berlawanan dengan momen Hy, jadi M_{bh} itu bekerja positif.

$$M_x = M_x' - H\left(y - \frac{x}{l}\eta\right) = M_x' - Hy'$$

$y' = y - \frac{x}{l}\eta$ terdapat sebagai ordinat diukur dari garis AB'_1 dengan $B_1B_1' = \eta$.

(Garis AB_1 melukiskan persamaan $\frac{x}{l}\eta$). Berhubungan dengan ini kita mendapat

$$\delta_{kh} = \int (y')^2 \frac{dx}{E_bI_b} + \Sigma \frac{s}{EF_s}\sec^2\alpha + \Sigma \frac{t}{EF_t}(\Delta \operatorname{tg}\alpha)^2$$

$$\delta_h^o = \Sigma P\delta_{hp} = \int M_x' y' \frac{dx}{E_bI_b}$$

$$H = \frac{1}{\delta_{kh}}\Sigma P\delta_{hp}$$

M_X' berarti momen pada balok di atas tiga perletakan, yang harus dihitung lebih dahulu (misalnya dengan persamaan tiga momen).

Biasanya titik-titik penggantungan itu terletak di atas parabol.

$$y = x(l - x)4\frac{f}{l^2}$$

dan jarak antara tihang-tihang itu tetap, sama dengan

$$a = \frac{1}{n}l; \Delta \operatorname{tg}\alpha = -8\frac{fa}{l^2} \text{ tetap pula}$$

$$T = -H\Delta \operatorname{tg}\omega = 8\frac{fa}{l^2}\cdot H = \frac{8}{n}\cdot\frac{f}{l}H, \text{ tetap juga.}$$

Di titik k sejauh $x = k \cdot a = \frac{k}{n}\cdot l$ dari A bekerja kekuatan ke atas sebesar Tk = T yang menimbulkan momen peralihan di atas B sebesar ΔM_{bh} yang boleh dihitung dengan persamaan tiga momen :

$$\Delta M_{bh} = \frac{1}{6l^2}Tx(l^2 - x^2) = \frac{1}{6}Tl\cdot\frac{k}{n}\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{6n^3}Tl\cdot k(n^2 - k^2)$$

$$\Delta M_{bh} = \frac{1}{4n^3}\cdot Tl\cdot k(n^2 - k^2) = \frac{1}{4n^3}\cdot\frac{8}{n}\frac{f}{l}H\cdot lk(n^2 - k^2) = \frac{2}{n^4}Hf\cdot k(n^2 - k^2)$$

$$M_{bh} = \sum_1^n \Delta M_{bh} = \frac{2}{n^4}Hf\sum_{k=1}^{k=n} k(n^2 - k^2) = \frac{(n^2 - 1)}{n^2}Hf$$

Jika $n = \infty$ menjadi $M_{bh} = Hf$ dan $\eta = f$.

Ini juga terdapat dengan menjalankan integrasi:

$$\eta = \frac{3}{l^2}\int_o^l yxdx = 3\cdot\frac{4f}{l^4}\int_o^l x^2(l - x)dx = f$$

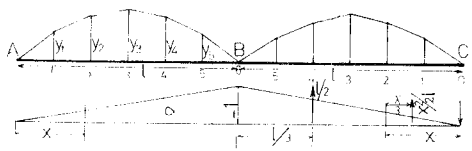
b. Sebagai susunan dasar juga boleh dipilih dua balok AB dan BC masing-masing di atas dua perletakan bebas, jadi statis tertentu, gaya-gaya statis kelebihan ialah H dan M_b

Untuk ini kita menggunakan faktor-faktor pengaruh dalam. Faktor-faktor pengaruh dalam berasal dari H ada :

α_{mh} (terhadap momen balok) = y
α_{sh} (terh. gaya normal pada batang-batang gantungan = – sec α
α_{th} (idem idem tihang penggantung) = Δ tg α

Faktor-faktor pengaruh dalam berasal dari $M_b = -1$, $\alpha_{mm} = x/l$ (terhadap momen balok) dan o terhadap gantungan.

$\delta_{hhm} = \int \alpha^2_{mh} dx/E_bI_b = a/3E_bI_b \Sigma y_l^2 + y_r^2 + y_ly_r$ (§ 6a).
$\delta_{hhn} = \Sigma s \sec^2\alpha/EF_s + \Sigma t (\Delta \operatorname{tg}\alpha)^2 / EF_t$.
$\delta_{hh} = \delta_{hhm} + \delta_{hhn}$



Gambar VIII, 13a

Besaran-besaran y diukur secara vertikal antara kabel-kabel dan garis-garis penghubung AB, dan CB_1. Selanjutnya lihat gambar VIII, 13a.

$\alpha_{mm} = -x/l$ (dari $M_b = -1$)
$\varphi_{mm} = \int \alpha^2_{mm} dx/E_bI_b =$
$= 2\int (x^2/l^2)\, x/E_bI_b = 2\, l/3E_bI_b = \varphi_{bb}$ (identik dengan hitungan – cara Claypeyron, bab IV).

$\delta'_{hm} = \varphi'_{mh} = \int \alpha_{mh}\alpha_{mm}\, dx/E_bI_b$.

Lebih mudah menghitung φ'_{mh} dengan moment area, yaitu luas bidang momen akibat H = – 1 (jadi bidang α_{mh}). Jika luas bidang ini $=F_{mh}$ padas satu bentang, maka $\varphi'_{mh} = 2.½\ F_{mh}/E_bI_b = F_{mh}/E_bI_b$.

$(\delta_{hp})_k = (\delta_{ph})_k = \delta_{kh} = 1/E_bI_b\ [\ ½\ F_{mh}.\ kax - (k-1)\ a^2y_1 -$

$- (k-1)a^2y_2 \ldots\ldots - a^2y_{k-1} - 1/6\ a^2y_k \ldots\ldots$ (§ 6a)

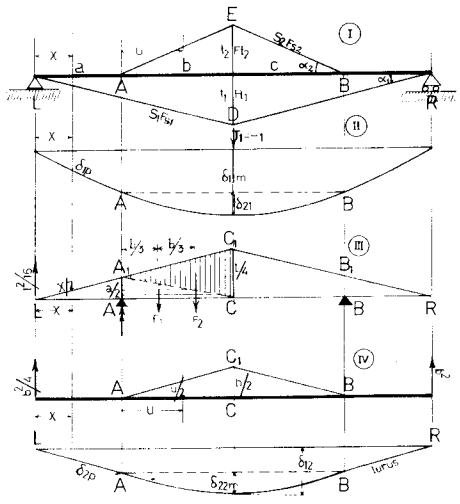
$\varphi'_{mp} = \delta'_{pm} = - 1/6E_bI_b\ (l_x - x^3/l)$

$H\ \delta_{hh} + M_b\ \delta'_{hm} = P\ \delta_{hp}$.

$H\ \varphi'_{mh} + M_b\ \varphi_{mm} = P\ \varphi'_{mp}$.

§ 10. **Kombinasi gantungan dan sokongan (gb. VIII, 14)**

Kedua-keduanya berbentuk segitiga (simetris). Gaya-gaya kelebihan adalah gaya-gaya tihang yaitu : $X_1 = T_1$ (tihang bawah) dan $X_2 = T_2$ (tihang atas) Pada pembebanan biasa (ke bawah), gaya-gaya T_1 dan T_2 bekerja ke arah atas terhadap baloknya (di titik C mengurangi deformasinya).



Gambar VIII, 14

Jadi gaya-gaya T_1 = – 1 dan T_2 = –1 bekerja ke bawah di C, dan menimbulkan momen-momen positif pada balok atau membebaninya.

Faktor-faktor pengaruh dalam :

$\alpha_{m1} = ½\ x$, berlaku pada $x \leqslant ½\ l = a + b$;

$\alpha_{s1} = - ½ \sin \alpha_1$; $\alpha_{t1} = -1$ (meskipun tarik);

$\alpha_{m2} = ½\ u$, selama $0 \leqslant u \leqslant b$;

$\alpha_{s2} = ½ \sin \alpha_2$; $\alpha_{t2} = - 1$.

$\delta_{11m} = \int \alpha^2_{m1} dx/EI = 2 \int_0^{l/2} 1/4\ x^2\ dx/EI = l^3/48\ EI$

$\delta_{11n} = \int \alpha^2_{n1}\ ds/EF = s_1/2\ EF_{s1}\ \sin^2 \alpha_1 + t_1/EF_{t1}$.

$\delta_{11} = \delta_{11m} + \delta_{11n}$.

$\delta_{22m} = 2 \int_0^b \alpha^2_{m_2}\ dx/EI = b^3/6EI = (2b)^3/48\ EI$

$\delta_{22n} = s_2/2EF_{s2}\sin^2\alpha_2 + t_2/EF_{t2}$.

$\delta_{22} = \delta_{22m} + 22_n$

$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \alpha_{m1}\alpha_{m2}\ dx/EI = 2 \int_0^b ½(a+u).\ ½udu/EI.$

$= (1/4\ ab^2 + 1/6\ b^3)/EI.$

Kita mempelajari bidang-bidang momen akibat T_1= –1 dan T_2= –1 itu, yang berturut-turut kita namakan M_1 dan M_2.

1. Bidang M_1 berbentuk segitiga dengan tinggi ¼ l dianggap sebagai bidang muatan yang luasnya = $1/8\ l^2$, menghasilkan momen di C sebesar

$1/16\ l^2$, ½ l – $1/16\ l^2$. $1/6\ l = 1/48\ l^3 = EI\ \delta_{11}m$ (gb.II).

Jika sebagian bidang ini di antara A dan B (bidang $AA_1C_1B_1B$) dianggap sebagai bidang muatan di atas balok dengan bentang AB=2b, maka ½ luasnya terdapat : F_1+F_2 = ½b.½a + ½b.½(a+b) = ¼ab+¼b(a+b); gambar IIIb.

F_1 = ¼ ab sebagai beban sejauh 1/3 b dan F_2 = ¼ b(a+b) sejauh 2/3 2/3 b dari titik perletakan A. pada bagian AC, dan pada bagian BC. terdapat yang sama serta simetris. Semuanya ini menghasilkan momen di-C sebesar

$F_1.1/3b + F_2.2/3b = ¼\ ab^2 + 1/6\ b^3 = EI_{21}$

Pada garis lenturnya, terlihat $\delta_{11m} = y_c$ dan $\delta_{21} = y_c - y_A$; gambar II.

2. Bidang M_2 sebagai bidang-beban di atas balok berbentang AB = 2b - yang luasnya F = ½b^2. Ini mendapatkan momen di C sebesar:

¼ b^2.b – ¼b^2. 1/3b = 1/6 b^3 = 1/48 $(2b)^3$ = EI δ_{22m}; (gambar IB bawah).

Sekarang bidang M_2 ini dikerjakan sebagai beban di atas balok LR = l = 2(a+b). Ini menghasilkan reaksi-reaksi perletakan L = R = ½F = ¼ b^2 dan momen di C sebesar

½F (a+b) – ½F. 1/3b = 1/4 b^2(a+2/3b) = ¼ ab^2+1/6b^3 = EI δ_{12} (gambar IV).

Garis lenturnya pada balok LR berbentuk garis-garis lurus di antara L dan A dan di antara R dan B yang menyinggung pada garis lengkung di antara A dan B.

Terlihat : $y_c = \delta_{12}$ diukur dari garis LR.

$y_c - y_A = \delta_{22}$m atau Y_c terhadap garis AB.

3. Besaran $\delta_{p1} = \delta_{1p}$ dapat dilihat sebagai ordinat lentur menurut gambar-II (bidang M_1 sebagai bidang muatan).

EI δ_{p1} = 1/16 l^2x – ¼ x^2. 1/3 x = 1/16 l^2x – 1/12 x^3 dengan x ⩽ ½l.

4 Hitungan $\delta_{p2} = \delta_{2p}$. Ini ordinat lentur menurut gambar IV (bawah) pada x ⩽ a dari L terdapat :

EI δ_{p2} = ¼ b^2x (garis lurus).

Pada 0 ⩽ u ⩽ b diukur dari A :

EI δ_{p2} = ¼ b^2 (a+u) – 1/12 u^3

Persamaan - persamaan

$T_1 \delta_{11} + T_2 \delta_{12} = P \delta_{p1}$ ..... (1)

$T_1 \delta_{21} + T_2 \delta_{22} = P \delta_{p2}$ ..... (2)

$M_x = M_x^\circ$ – ½ T_1x jika x = a

$M_x = M_x^\circ$ – ½ T_1 (a+u) – ½ T_2 u untuk 0 ⩽ u ⩽ b diukur dari A

Pembebanan merata q_1 di luar AB dan q_2 di dalam AB :

$\delta_1^\circ = \int q_1 \delta_{p1}\, dx + \int q_2 \delta_{p1}\, dx.$

$\delta_1^\circ = \int q_1 \delta_{p2}\, dx + \int q_2 \delta_{p2}\, du$

5. Garis-garis pengaruh T_1 dan T_2.

Persamaan-persamaan (1) dan (2) di atas menghasilkan :

$$T_1 = P. \frac{\delta_{p1}\,\delta_{22} - \delta_{12}\,\delta_{p2}}{\delta_{11}\,\delta_{22} - \delta_{12}\,\delta_{21}} = P. \frac{\delta_{p1} - (\delta_{12}/\delta_{22})\,\delta_{p2}}{\delta_{11} - \delta_{12}\,\delta_{21}/\delta_{22}}$$

$$= P. \frac{\delta_{p1} - \beta\delta_{p2}}{K_1}$$

Ini berarti; garis pengaruh T_1 dapat dilukiskan oleh selisih antara ordinat δ_{p1} pada gambar II dan β kali ordinat δ_{p2} pada gambar IV.

(K_1 adalah bilangan tetap atau konstanta). Jadi pada gambar II kita tambahkan gambar IV setelah ordinat-ordinatnya direduksi dengan $\beta = \delta_{12}/\delta_{22}$ (konstanta)

$$T_2 = P. \frac{\delta_{p2}\cdot\delta_{11} - \delta_{21}\cdot\delta_{p1}}{\delta_{11}\,\delta_{22} - \delta_{12}\,\delta_{21}} = P. \frac{\delta_{p2} - (\delta_{21}/\delta_{11})\,\delta_{p1}}{\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}/\delta_{11}}$$

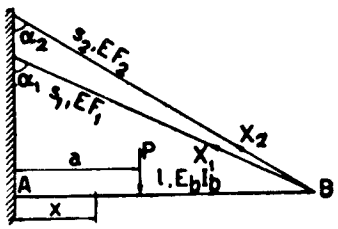
$$= P. \frac{\delta_{p2} - \gamma\delta_{p1}}{K_2}$$

Garis pengaruh T_2 dapat terbaca pada gambar IV setelah di kombinasi dengan gambar II yang ordinat-ordinatnya di kalikan dengan $\gamma=\delta_{21}/\delta_{11}$ (konstanta).

Beda antara kedua-dua ordinat ini sesudah dibagi dengan K_2 menghasilkan ordinat T_2

§ 11. Gantungan rangkap.

Peralihan vertikal ujung B adalah δ_v dan peralihannya mendatar, δ_h.



Gambar VIII, 15

$$\delta_v = P.\,\tfrac{1}{2}\frac{a^2(l-\frac{1}{3}a)}{E_b I_b} + P\frac{a}{G_b F'_b} - \\ -(X_1\cos\alpha_1 + X_2\cos\alpha_2)\left(\frac{l^3}{3E_b I_b} + \frac{l}{G_b F'_b}\right) \quad (1)$$

$$\delta_h = (X_1\sin\alpha_1 + X_2\sin\alpha_2)\frac{l}{E_b F_b} \cdots\cdot (2)$$

$$\Delta s_1 = X_1 \frac{s_1}{EF_1} = \delta_v \cos \alpha_1 - \delta_h \sin \alpha_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\Delta s_2 = X_2 \frac{s_2}{EF_2} = \delta_v \cos \alpha_2 - \delta_h \sin \alpha_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Sekarang dengan faktor-faktor pengaruh dalam:

Bagian	α_{m_1} terh. mom. dari X_1	α_{n_1} terh. kek. normal dari X_1	α_{q_1} terh. geseran dari X_1	α_{m_2} dari X_2	α_{n_2} dari X_2	α_{q_2} dari X_2
Balok AB	$-(l-x)\cos\alpha_1$	$\sin\alpha_1$	$\cos\alpha_1$	$-(l-x)\cos\alpha_2$	$\sin\alpha_2$	$\cos\alpha_2$
Batang BC	o	-1	o	o	o	o
„ BD	o	o	o	o	-1	o

Persamaan-persamaan yang terdapat :

$$X_1 \Sigma \int \alpha_1^2 dw + X_2 \Sigma \int \alpha_1 \alpha_2 dw = \int \alpha_{m1} M_x^o \frac{ds}{E_b I_b} + \int \alpha_{n1} N_x^o \frac{ds}{E_b F_b} + \int \alpha_{q1} Q_x^o \frac{ds}{GF_b'} \quad (1)$$

$$X_1 \Sigma \int \alpha_1 \alpha_2 dw + X_2 \Sigma \int \alpha_2^2 dw = \int \alpha_{m2} M_x^o \frac{ds}{E_b I_b} + \int \alpha_{n2} N_x^o \frac{ds}{E_b F_b} \int + \alpha_{q2} Q_x^o \frac{ds}{GF_b'} \quad (2)$$

$$X_1 \left\{ \int_o^l (l-x)^2 \cos^2\alpha_1 \frac{dx}{E_b I_b} + \frac{l \sin^2\alpha_1}{E_b I_b} + \frac{s_1}{EF_1} + \frac{l \cos^2\alpha_1}{G_b F_b'} \right\} +$$

$$+ X_2 \left\{ \int_o^l (l-x)^2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \frac{dx}{E_b I_b} + \frac{l \sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{E_b F_b} + \frac{l \cos\alpha_1 \cos\alpha_2}{G_b F_b'} \right\} =$$

$$= - \int_o^l (l-x) \cos\alpha_1 M_x^o \frac{dx}{E_b I_b} + \int_o^l \cos\alpha_1 Q_x^o \frac{dx}{G_b F_b'} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$X_1 \left\{ \int_o^l (l-x)^2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \frac{dx}{E_b I_b} + \frac{l \sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{E_b F_b} + \frac{l \cos\alpha_1 \cos\alpha_2}{G_b F_b'} \right\} +$$

$$+ X_2 \left\{ \int_o^l (l-x)^2 \cos^2\alpha_2 \frac{dx}{E_b I_b} + \frac{l \sin^2\alpha_2}{E_b F_b} + \frac{s_2}{EF_2} + \frac{l \cos^2\alpha_2}{G_b F_b'} \right\} =$$

$$= - \int_o^l (l-x) \cos\alpha_2 M_x^o \frac{dx}{E_b I_b} + \int_o^l \cos\alpha_2 Q_x^o \frac{dx}{G_b F_b'} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$M_x^o = -P(a-x)$ selama $x \leq a$ dan $M_x^o = o$ untuk $x > a$

Jadi $- \int_o^a (l-x) \cos\alpha M_x^o \frac{dx}{E_b I_b} = + \frac{P \cos\alpha}{E_b I_b} \int_o^a (l-x)(a-x) dx$

$N_x^o = o$

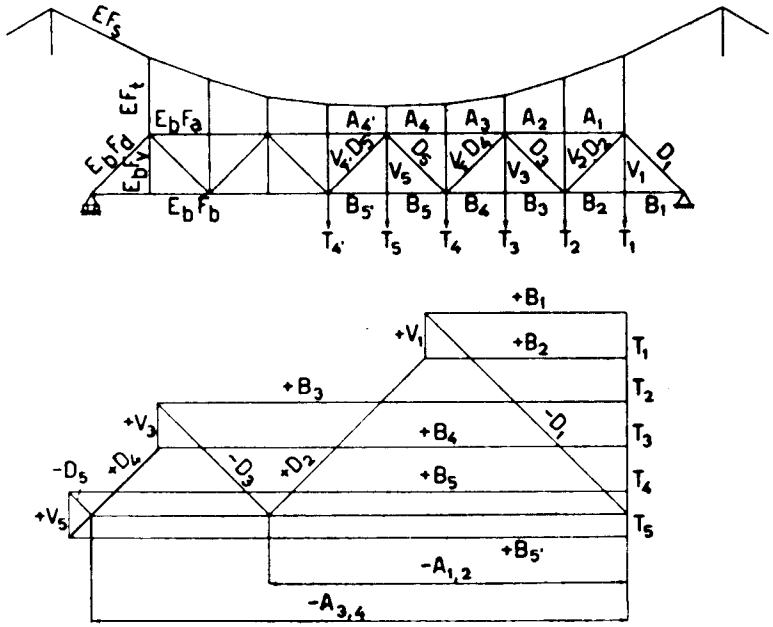
$Q_x^o = + P$ selama $x \leq a$ dan $Q_x^o = o$ pada $x > a$

Jadi $\int_o^a \cos\alpha Q_x^o \frac{dx}{G_b F_b'} = \frac{P \cos\alpha}{G_b F_b'} \int_o^a dx = P \frac{a \cos\alpha}{G_b F_b'}$

§ 12. Vakwerk tergantung.

Kita memakai faktor-faktor pengaruh dalam berasal dari H = – 1 terhadap gaya-gaya batang pada vakwerk dan gantungan.

H = – 1 menimbulkan gaya-gaya T sebesar $+ \Delta \operatorname{tg} \varphi$ (negatif) – yang berarti bahwa mereka bekerja ke bawah terhadap rusuk. Kemudian -



Gambar VIII, 16

kita menggambar Cremona sebagai akibat dari kekuatan-kekuatan T ini untuk mengetahui faktor-faktor pengaruh dalam α terhadap kekuatan-batang pada vakwerk. Pada gantungan yang berbangun parabol kekuatan-kekuatan T itu tetap besarnya, sebab $\Delta \operatorname{tg} \varphi = -8 \frac{f_a}{l^2}$ itu besaran yang tetap, Jadi $= 8 \frac{f_a}{l^2}$ (nilai mutlak). Jika di dalam Cremona kita mengambil T = 1, pendapat-pendapat gaya batang harus dilipatkan dengan $8 \frac{f_a}{l^2}$.

Jika panjang sesuatu batang vakwerk itu b dan S^o = gaya batang vakwerk di dalam susunan statis tertentu, akan terdapat

$$H \left\{ \Sigma \frac{\alpha^2 b}{E_b F} + \Sigma \sec^2\alpha \frac{s}{EF_s} + \Sigma (\Delta \operatorname{tg} \varphi^2) \cdot \frac{t}{EF_t} \right\} = \Sigma \alpha S^o \frac{b}{E_b F}$$

Untuk F diisi : F_a, F_b, F_d dan F_v; dan untuk α diisi: α_a, α_b, α_d dan α_v.

Selanjutnya, gaya batang vakwerk: $S = S^o - \alpha H$

Contoh : Kita ambil rusuk vakwerk (truss) paralel tanpa batang-batang vertikal dengan diagonal-diagonal berserong 45°, dengan bentang l = 8a (gambar VIII, 17) Kabel berbentuk parabol dengan :

f = 0,21 = 1,6 a.

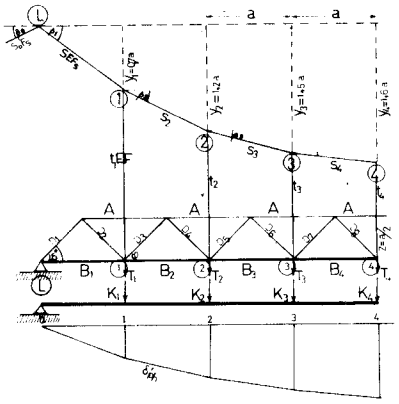
F_o = luas tampang batang-batang paralel

F_d = luas tampang diagonal-diagonal = 0,5 F_o

F_s = luas tampang kabel

F_t = luas tampang tihang-tihang penggantung

$-\Delta$ tg β = 8(a/l)(f/l) = 8. 1/8.0,2 = 0,2



Gambar VIII, 17

H = 1 menimbulkan gaya-gaya T = 0,2 yang bekerja ke bawah terhadap rasuk (jadi membebaninya). Ini menghasilkan gaya-gaya sebesar α, yaitu α_a untuk batang-batang A (tepi-atas), α_b untuk batang-batang B (tepi bawah) dan α_d untuk batang-batang diagonal D, α_s = –Sec β untuk kabel dan α_t = 0,2 untuk tihang-tihang penggantung itu sendiri Besaran-besaran α pada rasuk terdapat dengan perantaraan **Cremona** α (tak tergambar) atau secara analisa. Selanjutnya lihat daftar:

Btg.	b/a	F_o/F	α	$\alpha^2(b/a(F_o/F)$	$\epsilon' = F_o/F$
A1	1	1	–1,4	1,96	–1,4
2	1	1	–2,4	5,76	–2,4
3	1	1	–3,0	9,00	–3,0
4	0,5	1	–3,2	5,12	3,2
B1	1	1	+0,7	0,49	+0,7
2	1	1	+1,9	3,61	+1,9
3	1	1	+2,7	7,29	+2,7
4	1	1	+3,1	9,61	+3,1
D1	0,5 2	2	-0,7 2	0,98 2	1,4 2
2	0,5 2	2	+0,7 2	0,98 2	+1,4 2
3	0,5 2	2	0,5 2	0,50 2	–1,0 2
4	0,5 2	2	+0,5 2	0,50 2	+1,0 2
5	0,5 2	2	0,3 2	0,18 2	–0,6 2
6	0,5 2	2	+0,3 2	0,18 2	+0,6 2
7	0,5 2	2	0,1 2	0,22 2	–0,2 2
8	0,5 2	2	+0,1 2	0,02 2	+0,2 2
				42,8 – 4+21 2 = ½δ_{hh} Vakw.	

$\delta_{hh} = \delta_{hh}$ vakwerk + δ_{hh} gantungan. Jika b itu panjang sesuatu batang vakwerk dan F luas tampangnya, maka δ_{hh} vakwerk = $\Sigma \alpha^2$ b/EF dan δ_{hh} gant = Σ s $\sec^2 \beta$ /EF_s + Σt $(\Delta \text{tg } \beta)^2/EF_t$. Jadi δ_{hh} vakwerk itu penggantinya δ_{hhm} pada balok dan δ_{hh} gant. = δ_{hhn} nya.

Untuk mudahnya kita lipatkan dengan EF_o/a schingga terdapat :

$$\delta'_{hh} = \delta_{hh}\, EF_o/a = \Sigma \alpha^2 (b/a)(F_o/F) + \Sigma (s/a)(F_o/F) \sec^2\beta + \Sigma (t/b)(F_o/F_t)(\Delta \text{ tg } \beta)^2$$

yang tidak berdimensi, jangan lupa memasukkan s_o dan sec $_o$ di dalam hitung an, yaitu kabel - kabel luar.

Terlihat bahwa besaran-besaran a berbanding lurus dengan y. Ini cocok dengan hitungan cara Retter, A = Hy/z.

Garis pengaruh H. kita anggap, beban bekerja pada tepi bawah.

$H = P\,\delta_{hp} / \delta_{hh} = P\,\delta_{ph} / \delta_{hh}$. Lagi δ_{ph} berarti melenturnya titik pegangan gaya P sebagai akibat dari gaya H = – 1. Oleh karena P dianggap bekerja langsung di titik kumpul (di sini pada tepi bawah), maka cukup mempelajari ordinat lenturnya titik-titik kumpulnya tepi bawah saja. Satu sama lain kita kerjakan secara analisa dengan perantaraan **robahan-robahan sudut** $\Delta\gamma$ pada titik-titik kumpul itu.

Oleh karena tepi bawah itu lurus,maka beban fiktif pada titik hubungan yang bersangkutan, menjadi K = – $\Delta\gamma$

Besaran $\Delta\gamma$ dihitung dengan perantara robahan-robahan panjang spesifik $\epsilon = \sigma/E = \alpha'/EF$ (gaya batanganya = α). Dilipatkan dengan EF menjadi $\epsilon' = \alpha\, F_o/F$ (lihat lajur terakhir di daftar).

Ordinat momen sebagai akibat dari pembebanan K di titik-titik hubungan itu, sesudah **dibagi dengan a** menghasilkan $\delta'_{ph} = \delta_{ph}\, EF_c/a$, sesuai dengan $\delta'_{hh} = \delta_{hh}\, EF_o/a$. Selanjutnya diketahui bahwa cotg φ = 1 ($\varphi = 45^o$).

$K_1 = -\Delta\gamma_1 = -(\epsilon'_{d1} \text{ cotg } \varphi - \epsilon'_{b1} \text{ cotg } \varphi + \varphi\epsilon'_a \text{ cotg } \varphi \quad \epsilon'_{d2} \text{ cotg } \varphi \quad \epsilon'_{d3} \text{ cotg } \varphi + \epsilon'_{d4} \text{ cotg } \varphi \quad \epsilon'_{b2} \text{ cotg } \varphi) =$

$= 5,4 + 0,8\sqrt{2} = K_7.$

$K_2 = \Delta\gamma_2 = -(\epsilon'_{d3} - \epsilon'_{b2} + 2\epsilon'_{a2} - \epsilon'_{d4} - \epsilon'_{d5} + \epsilon'_{d6} - \epsilon'_{b3}) =$
$= 94 + 0{,}8\sqrt{2} = K_6$

$K_3 = -\Delta\gamma_3 = -(\epsilon'_{d5} - \epsilon'_{b3} + 2\epsilon'_{a3} - \epsilon'_{d6} - \epsilon'_{d7} - \epsilon'_{d8} - \epsilon'_{b4}) =$
$= 11{,}8 + 0{,}8\sqrt{2} = K_5.$

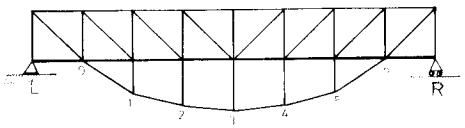
$K_4 = -\Delta\gamma_4 = -(\epsilon'_{d7} - \epsilon'_{b4} + 2\epsilon'_{a4} - \epsilon'_{d8} - \epsilon'_{d9} + \epsilon'_{d10} - \epsilon'_{b5}) = 12{,}6 + 0{,}8\sqrt{2}$

Kemudian dihitung secara daftar :

Titik	0	1	2	3	4
Beban K		$5{,}4 + 0{,}8\sqrt{2}$	$9{,}4 + 0{,}8\sqrt{2}$	$11{,}8 + 0{,}8\sqrt{2}$	$12{,}6 + 0{,}8\sqrt{2}$
Gaya lintang Q	$32{,}9 + 2{,}8\sqrt{2}$		$27{,}5 + 2{,}0\sqrt{2}$	$18{,}1 + 1{,}2\sqrt{2}$	$6{,}3 + 0{,}8\sqrt{2}$
$M/a = \delta'_{ph}$	0	$32{,}9 + 2{,}8\sqrt{2}$	$0{,}4 + 4{,}8\sqrt{2}$	$78{,}5 + 6{,}0\sqrt{2}$	$84{,}8 + 6{,}4\sqrt{2}$

Jadi bentuk garis-pengaruh Hi itu serupa dengan garis δ'_{ph} ini, hanya tinggal membagi dengan δ'_{hh} nanti.

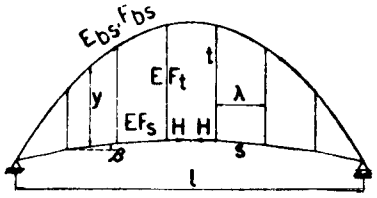
Gantungan juga boleh dipasang di bawah seperti pada gambar VIII, 18. Faktor-faktor pengaruh α untuk batang-batang tepi bawah di antara titik O dan titik 6 ditambah dengan + 1. Sebab sebagai akibat dari gaya H = –1, batang-batang gantungan 01 dan 65 tertekan yang dititik-titik 0 dan 6 menghasilkan komponenta-komponenta mendatar ke luar sebesar 1. Ini diterima sebagai gaya tarik extra pada batang tepi 06.



Gambar VIII, 18

§ 13. Pelengkung dengan batang tarik tergantung.

Batang tarik berbangun tertekuk, yang digantungkan pada busur ditekuk-tekukkan. Ordinat y diukur dari sumbu batang tarik. Selanjutnya pendapat pendapat di atas berlaku dengan perobahan-perobahan yang tepat, sebab sekarang terutama yang menahan momen ialah pelengkungnya.



Gambar VIII, 19

$$H\left\{\int_o^l y^2\frac{ds}{E_{bs}I_{bs}} + \Sigma\frac{s}{EF_s}\sec^2\beta + \Sigma\frac{t}{EF_t}(\Delta\,\mathrm{tg}\,\beta)^2\right\} = \int_o^l M_x^o y\frac{ds}{E_{bs}}$$

Di sini β adalah sudut yang dibentuk oleh batang tarik dengan garis-datar. Jika perpandakan busur juga diperhitung, menjadi :

$$H\left\{\int_o^l y^2\frac{ds}{E_{bs}I_{bs}} + \int_o^l\frac{\cos^2\alpha ds}{E_{bs}F_{bs}} + \Sigma\frac{s}{EF_s}\sec^2\beta + \Sigma\frac{t}{EF_t}(\Delta\mathrm{tg}\beta)^2\right\} = \int_o^l M_x^o y\frac{ds}{E_{bs}I_{bs}}$$

Dan dengan I_{bs}, F_s, F_t dan λ yang tetap, terdapat dengan $\int\cos^2\alpha ds \infty l$.

$$H\int_o^l y^2 ds + i_{bs}^2 l + ni_{bs}^2\lambda\left\{\frac{F_{bs}}{F_s}\Sigma\sec^3\beta + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{F_{bs}}{F_t}\Sigma t(\Delta\,\mathrm{tg}\,\beta)^2\right)\right\} = \int_o^l M_x^o y ds$$

§ 14. Portal sendi/rol dengan gantungan (gb. VIII, 20)

Gaya statis kelebihan ialah gaya H di batang CD yang pada umumnya menarik.

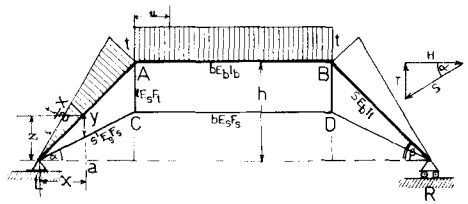
H = –1 (menekan) menimbulkan gaya.

S = – sec α dan T = –tg α

Gaya-gaya S di titik-titik L dan R dapat diuraikan kedalam komponenta komponenta mendatar H ke arah luar dan vertikal T = H tg α ke bawah sehingga menimbulkan momen-momen pada portal LABR.

Tihang LA atau RB. Momen pada titik sejauh x dari A terdapat :
$M'_x = Hx\,\mathrm{tg}\beta - Tx = Hx\,(\mathrm{Tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha) = Hy$ = y jika y diukur vertikal –

sampai garis LC (atau RD). Pada x = a menjadi $M'_x = M'_a$ (positip).



Gambar VIII, 20

Palang atau balok AB. Di titik A bekerja gaya sebesar T ke atas.

Jadi $M'_x = Ta$. $Ht = t$ (tetap).

Terdapat lagi $\delta_{hhn} = \int y^2\, ds/EI$ dan $\delta'_{hhn} = 2\, s' \sec^2\alpha/E_sF_s + 2t\, tg^2\alpha/E_sF_t + b/E_sF_t$.

Pada tihang-tihang LA dan RB kita isi d = dy. s/t.

$\delta_{hhm} = 2\int y^2(s/t)\, dy/E_bI_t + \int_0^b t^2\, dx/EbIb = 2st^2/EI_b\, I_t + bt^2/E_bI_b$.

Besaran-besaran kita gandakan dengan E_bI_b/b dan memakai $k = (s/b)(I_b/I_t)$:

$\delta'_{hh} = \delta_{hh}E_bI_b/b = (2/3k + 1)t^2 + 2\,(E_b/E_s)(I_b/F_s)(s'/b)\sec^2\alpha + 2(E_b/E)(I_b/F_t)(t/b)\, tg^2\alpha + (E_b/E_s)(I_b/F_s)$.

δ_{hhm} juga terdapat dengan moment-area.

Bidang-bidang momen akibat H = –1 itu dianggap sebagai gaya-gaya mendatar dan menghitung jumlah statis momennya /EI terhadap garis LCDR.

$F_1 = ½st$; $y_1 = 2/3\ t$; $F_2 = bt$; $y_2 = t$.

$\delta_{hhm} = 2/E_bI_t.\ ½\ st.\ 2/3t/E_bI_b$; $\delta_{hhm}\, E_bI_b/b = (2/3k + 1)\, t^2$

Garis pengaruh H. Bidang momen/EI dianggap sebagai bidang muatan.

$\Sigma F/EI = 2.½\ st/E_bI_t + bt/E_bI_b$ = beban

Reaksi-reaksi perletakan di L dan di R masing-masing terdapat :

$½\Sigma F/EI = st/2E_bI_t + bt/2E_bI_b$; $½F = (½F/EI)\, E_bI_b/b = ½\,(k+1)\, t$.

a) Beban P vertikal di atas LA sejauh x = a dari L Bidang momen sebagai gaya vertikal.

$\delta_{ph} = (½\ F/EI)x - ½.s/a\ x.y.\ 1/3\ x/E_bI_t$ sedang y = x t/a.

$\delta'_{ph} = \delta_{ph}\, E_bI_b/b = ½(k+1)tx - 1/6\ ktx^3/a^2$; $H = P\,\delta'_{ph}/\delta'_{hh}$

b) P (vertikal) sejauh u = b dari A.

$\delta_{ph} = (½\ F/EI)u - ½\ st\,(\ 1/3\ a + u/E_bI_t - ½\ tu^2/E_bI_b$.

$\delta'_{ph} = \delta_{ph}\, E_bI_b/b = 1/3\ kta + ½\ t(a+u) - ½\ tu^2/b$.

c) P mendatar (ke dalam) di LA setinggi z dari L ; luas bidang momen = – gaya mendatar

$\delta_{ph} = (½\ \Sigma\ F/EI)\ z - ½\ s/h\ z.y\ 1/3\ z\ /\ E_bI_t$ dengan y = tz/h.

$\delta'_{ph} = \delta_{ph}\, E_bI_b/b = ½\,(k+1)\, tz - 1/6\ ktz^3/h^2$.

d) P mendatar pada tihang RB. Pendapat di atas tidak boleh diperguna kan, sebab perletakan R itu tetap rol, tidak boleh disamakan dengan L, dan pada z = 0 hasilnya tidak nol.

Kita menentukan perjalanannya M°_x dan menghitung :

$\delta^\circ_h = \int M^\circ_x\, y\, ds/EI$.

Pada bagian tihang-tihang, y berarti jarak vertikal antara garis-garis LA dan LC (atau RB dan RD), ds = dy s/t; $EI = E_bI_t$.

Pada balok AB diisi y = t (tetap), ds = dx; $EI = E_bI_b$.

Pada z = h, terdapat $\delta^\circ_h = -P.½\ \delta_{hhm}\ h/t$. Jika mengabaikan δ_{hhn} maka terdapat $H = -½P\ h/t$ (P ke dalam).

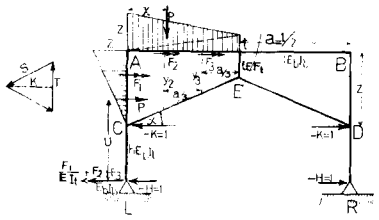
Pada z = 0, $\delta^\circ_h = -P\ \delta_{hhm}\ h/t$ dan $H = H_o$. Ini boleh dipergunakan pada kedudukan $0 \leqslant z \leqslant h$, yang menghasilkan H = H_o + pendapat di dalam kejadian d.

§15. Portal dua sendi dengan gantungan (gb VIII, 21).

Gaya-gaya statis tak tertentu ialah H di L dan di R, dan K di C dan dianggap positif jika bekerja ke dalam.

Supaya menjadi statis tertentu, salah satu perletakan diganti dengan rol. serta menghapus gantungannya.

Kemudian mengerjakan gaya-gaya keluar, yaitu H = 1 dan S = 1 sec α (di C dan di D). yang terakhir ini menghasilkan K = 1 (ke luar) dan ½T = tg α (ke-2 bawah).



Gambar VIII, 21

$\delta_{hh} = 2\,h^3/3E_bI_t + 1h^2/E_bI_b$ seperti pada soal portal dua sendi biasa (gb.–VI. § 28)

$\delta_{kkn} = 2\,s\,\sec^2\alpha/EF_s + 4t\,\mathrm{tg}^2\alpha/EF_t$.

$\delta_{kkn} = 2\int_o^z y^2 dy/E_bI_t + 2\int_t^z y^2\ a/(z-t)\ dy/E_bI_b = 2\,z^3/3E_bI_t +$
$+ 2a(z^2 + zt + t^2)/\,3E_bI_b$.

Besaran-besaran kita lipatkan dengan $E_bI_b/1$ dan $k = (h/1)(I_b/I_t)$; $n = E_b/E$.

$\delta_{hh} = (2/3\,k + 1\,)\,h^2$

$\delta'_{kk} = \delta'_{kkm} + \delta'_{kkn} = 2/3\,kz^3/h + 1/3\,(z^2+zt+t^2) + 2(n)(I_b/F_s)\,s/1\,\sec^2\alpha$
$+ 4\,n\,(I_b/F_t)(t/l)\,\mathrm{tg}^2\alpha$

$\delta_{kh} = \delta_{hk} = 2\int_o^z y(h-z+y)\,dy/E_bI_t + 2\int_o^z hy\ a/t - z\,dy/E_bI_b =$
$= (hz^2 - 1/3\,z^3)/E_bI_t + h(z+t)\,ta/E_bI_b$.

$\delta'_{kh} = \delta'_{hk} = k\,(1 - 1/3\,z/h)\,z^2 + ½\,h\,(z+t)$

δ_{kkm} dan δ_{hk} juga terdapat dengan momen area, yaitu luas bidang momen akibat K = –1 yang dikerjakan sebagai gaya mendatar.

$F_1 = ½z^2$; $y_1 = 2/3\,z$.

$F_2 = ½\,az$; $y_2 = 2/3\,z + 1/3\,t$.

$F_3 = ½\,at$; $y_3 = 2/3t + 1/3\,z$.

$\delta_{kkm} = 2F_1y_1/E_bI_t + 2(F_2y_2 + F_3y_3)/F_bI_b = 2\,x^3/3\,E_bI_t + a(z^2+zt+t^2)/E_bI_b$

$\delta_{hk} = 2F_1(h-z+2/3z)/E_bI_t + 2(F_2+F_3)h/E_bI_b = z^2(h - 1/3z)/E_bI_t + a(z+t)\,h/E_bI_b$

Hitungan δ_{ph} dapat dikerjakan menurut bab VI, § 28 (portal dua sendi).

Hitungan δ_{pk} menurut Maxwell atau dengan perantaraan M_x° akibat dari P.

Pada perjalanan pertama, 1/EI kali bidang momen akibat K = –1 dianggap - sebagai muatan vertikal jika P bekerja vertikal, dan hanya bidang momen yang ada di atas palang AB; sebagai muatan mendatar jika P bekerja

mendatar, dan seluruh bidang-bidang momen diperhitungkan (yang ada pada palang AB dan pada tihang-tihang) sehingga menghasilkan "reaksi-reaksi perletakan" mendatar pula di titik-titik L dan R (masing-masing separohnya).

Apabila menggunakan bidang-bidang momen M_x°/EI dari beban P, maka $P\delta_{kp} = \delta_k^\circ = \int M_x^\circ y\,/EI$ dan y diukur vertikal dari garis CED (juga dapat dengan cara momen area, bidang-bidang M_x°/EI dikerjakan sebagai gaya mendatar, analog dengan hitungan δ_{kkm} atau δ_{hk}).

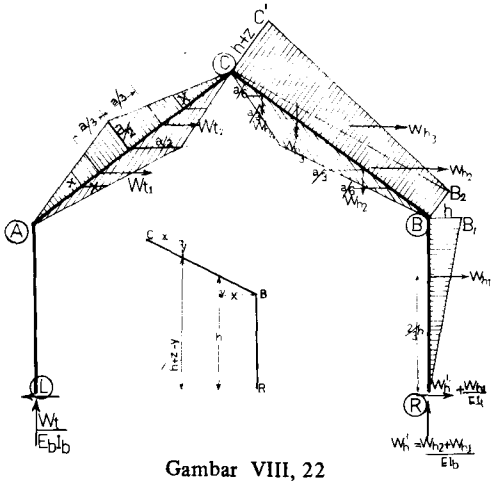
Pada akhirnya : $H\,\delta_{hh} + K\,\delta_{hk} = \delta_h^\circ$ dan $H\,\delta_{kh} + K\,\delta_{kh} = \delta_k^\circ$

§16. Portal payon dua sendi dengan pendel bercabang (Gb. VIII, 22).

Gaya-gaya kelebihan ialah H di L dan di R, dan T pada pendel TD.

α_{mh} = y untuk tihang-tihang LA dan LR, dan α_{mh} = h+y untuk balok - balok AC dan BC jika y diukur dari garis penghubung AB;

$\alpha_{nh} = 0$ (diabaikan).



Gambar VIII, 22

$\delta_{hh} = \delta_{hhm} = 2\int_o^h y^2 dy/E_bI_t + 2(2\,s/z)\int_o^z (h+y)^2\,dy/E_bI_b =$
$2h^3/3\,E_bI_t + 4\,s(h^2+hz+1/3x^2)/E_bI_b$

$\delta'_{hh} = \delta_{hh}\,E_bI_b/2s = 2/3\,kh^2 + 2(h^2+hz+1/3z)$ jika $k = (h/2s)(I_b/I_t)$.

Gaya S di E (dan di F) akibat dari T = –1 diuraikan ke dalam komponenta-komponenta vertikal = T = ½ ke bawah dan sejajar AC (atau BC) = =S. (yang terakhir ini tidak menyebabkan momen).

α_{mt} untuk AE (dan BF) = ½ u = x jika x diukur mendatar sampai garis AE_1 (atau BF_1) dengan $EE_1 = FF_1 = a/2$ (mendatar).

α_{mt} pada CE (atau CF) = ½ (2a–u) – 1(a – u) = ½u = x (diukur mendatar) sampai garis CE_1 (atau CF_1). Kemudian menjadi ds=dx.2s/a.

$\delta_{ttm} = \int \alpha^2_{mt}\, ds/EI = 4 \int_0^{a/2} x^2\, dx.2s/a\ E_bI_b = sa^2/3E_bI_b$

$\delta'_{ttm} = \delta_{ttm}\ E_bI_b/2s = 1/6\ a^2.$

$\delta_{ttn} = s/2\ EF_s \sin^2\alpha + h/EF_1$; $\delta'_{ttn} = \frac{1}{4}\, n(I_b/F_s \sin^2\alpha)$

$+ \frac{1}{2}n\ (h/s)(I_b/F_t)$

jika $n = E_b/E$

$\delta'_{tt} = \delta'_{ttm} + \delta'_{ttn}$

$\delta_{th} = \delta_{ht} = 2 \int_0^{a/2} x(h+y)\, dx.2s/a\ F_bI_b + 2 \int_0^{a/2} x(h+z-y)\, dx.2s/a\ E_bI_b.$

$\delta'_{th} = \delta'_{ht} = 2 \int_0^{a/2} x(2h+z)dx = \frac{1}{4}\, a(2h+z) = \frac{1}{2}a(h+\frac{1}{2}z).$

Sekarang dengan luas-luas bidang momen akibat dari α_{mh} dan α_{mt} (moment–area).

Bidang momen α_{mh} dipakai untuk hitungan δ_{hh} dan δ_{th}.

$\delta_{hh} = 2\ W_{h1}.\ 2/3\ h/E_bI_t + 2\ [\ W_{h2}(h + 1/3z) + W_{h3}\ (h+2/3z)]/E_bI_b =$

$2.\frac{1}{2}h^2.\ 2/3\ h/E_bI_t + 2\ [\ sh(h+1/3z) + s(h + z\ )(h + 2/3z)\ ]/E_bI_b =$

$= 2h^3/3\ E_bI_t + 2s(2h^2+2hz+2/3\ z^2)/E_bI_b$; $\delta'_{hh} = 2/3\ kh^2 + 2(h^2+hz+1/3z^2)$

Untuk menghitung δ_{th} maka bidang trapezium BB_2C_1C dibagi dalam 4 bagian dan dianggap sebagai gaya-gaya **vertikal.**

$W_{h1} = \frac{1}{2}\ sh$ dengan $x_1 = 1/3\ FF_1 = 1/6\ a.$

$W_{h2} = W_{h3} = \frac{1}{2}s(h\ \frac{1}{2}\ z)$ dengan $x_2 = x_3 = 2/3\ FF_1 = 1/3\ a.$

$W_{h4} = \frac{1}{2}\ s(h+z)$ dengan $x_4 = 1/3\ FF_1 = 1/6\ a.$

$\delta_{th} = 2.\frac{1}{2}\ sa\ [\ 1/6\ h + 2/3\ (h+\frac{1}{2}z) + 1/6\ (h+z)]/F_bI_b = sa\ (h + \frac{1}{2}z)/E_bI_b$

$\delta'_{th} = \frac{1}{2}\ a(h + \frac{1}{2}\ z).$

Untuk menghitung δ_{ht} maka bidang-bidang W_{t1} dan W_{t2} dianggap sebagai gaya-gaya **mendatar**..

$Wh_1 = Wh_2 = \frac{1}{4}\ sa$, simetris terhadap garis EE_1 (atau FF_1)

$\delta_{ht} = 2(W_{h1} + W_{h2})\ (h+\frac{1}{2}z)\ /\ E_bI_b = sa(h+\frac{1}{2}z)/F_bI_b;$

$\delta'_{ht} = \frac{1}{2}\ a(\ h + \frac{1}{2}s).$

Di dalam hitungan δ_{ttm} besaran=besaran W_{t1} dan W_{t2} dianggap sebagai gaya-gaya **vertikal**

dengan $x_1 = x_2 = 2/3\ EE_1 = 1/3\ a.$

$\delta_{ttm} = 2(W_{t1}+W_{t2})\ 1/3a/E_bI_b = 1/3\ sa^2/E_bI_b$; $\delta'_{ttm} = 1/6\ a^2.$

Hitungan $\delta^\circ_h = P\ \delta_{hp} = P\ \delta_{ph}$ dan $\delta^\circ_t = P\ \delta_{tp} = P\ \delta_{pt}$

dilakukan seperti diuraikan di dalam § 15

$P\ \delta_{hp} = \int M^\circ_x\ yds/EI$ jika y diukur terhadap garis LR.

Atau dengan bidang-bidang M°_x / EI yang dianggap sebagai **gaya-gaya mendatar** dan menjumlah statis-statis momennya terhadap garis LR.

Besaran δ_{ph} dapat dihitung dengan perantaraan 1/EI kali bidang-bidang momen akibat H = –1. pada **beban vertikal**, hanya W_{h2} dan W_{h3} yang diperhitungkan dan dianggap sebagai bidang-bidang muatan **vertikal** (setelah dibagi dengan E_bI_b)

Dan pada **beban mendatar**, semua bidang-bidang momen diperhitung, jadi W_{h1}/E_bI_t, Wh_2/E_bI_b dan W_{h3}/E_bI_b yang dianggap sebagai **beban mendatar** juga, dengan reaksi-reaksi perletakan (mendatar pula) di L dan di R.

$P\ \delta_{tp} = \int M^\circ_x\ x\ ds/EI$ dan x diukur mendatar sampai garis-garis AE_1C – atau BF_1C.

Juga boleh menganggap bidang-bidang M°_x/EI sebagai gaya-gaya **vertikal** dan menghitung jumlah statis-statis momennya terhadap garis-garis AE_1C atau BF_1C (analog hitungan δ_{th} di atas). Hitungan δ_{pt} secara analog dengan hitungan δ_{ph}.

§ 17. Pengaruh robahan derajat - panas.

Derajat panas sesuatu batang di dalam bangunan gantungan melebihi t^oC dari pada seluruh bangunan. Ini menimbulkan $H_t = \gamma \cdot t^o \cdot \frac{s \sec \alpha}{\delta_{hh}}$ jika s = panjang batang.

Sebatang tihang penggantung dengan panjang t(m') yang panasnya melebihi t^oC dari pada bagian-bagian lainnya, menimbulkan :

$$H_t = \frac{1}{\delta_{hh}} \cdot \gamma \cdot t^o\ (-\Delta\ \mathrm{tg}\ \alpha)\ t.$$

Jika beberapa batang gantungan dan tihang penggantung naik t^oC derajat panasnya (terhadap panas bangungan), menjadi:

$$H_t = \frac{\gamma t^o}{\delta_{hh}} \left(\Sigma s \sec \alpha - \Sigma t \,.\, (\Delta \operatorname{tg} \alpha) \right)$$

Nilai H_t ini positif apabila t^O itu positif, yaitu batang-batang serta tihang-tihang yang bersangkutan lebih panas dari pada bagian-bagian lainnya jadi negatif jika sebaliknya.

Sekarang tepi bawah balok lebih panas sebanyak $\Delta\ t^oC$ dari pada tepi atasnya, Ini menimbulkan : $H_{\Delta t} = \frac{1}{\delta_{hh}} \cdot \gamma \cdot \frac{\Delta t}{h} \int_o ydx$ jika h = tebal balok

Dan positif, jika Δt juga positif.

BAB I·X

VAKWERK STATIS TAK TERTENTU

§ 1. Uraian.

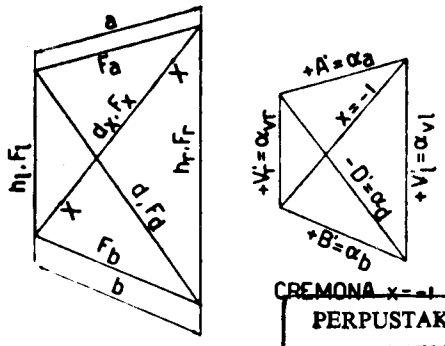
Vakwerk rata yaitu yang terletak di dalam bidang rata harus memenuhi kepada syarat : s = 2k—3 supaya teguh (stabil), di mana s berarti banyaknya batang dan k banyaknya titik hubungan, sedang bilangan 3 itu menunjukkan banyaknya reaksi luar pada bangunan statis tertentu (sendi + rol atau cepitan sebelah). Jika reaksi-reaksi luar ini dimasukkan dalam gaya-gaya batang dan banyaknya ditulis dengan r, syarat tadi boleh ditulis: s + r = 2k. Akan tetapi di samping ini harus diusahakan supaya batang-batang disusun yang tepat, sehingga tak ada kotakan (vak) yang mempunyai batang kelebihan, atau yang kekurangan batang (labil).

Apabila $s + r > 2k$ dan $n = (s + r) - 2k$ maka bangunan menjadi statis tak tertentu berlipat n.

Syarat keteguhan untuk vakwerk ruang ialah $s = 3k - 6$ atau $s + r =$ =3k, di mana r = 6 itu banyaknya reaksi luar.

§ 2. Diagonal rangkap.

Jika diagonal rangkap terdapat di dalam satu vak saja, maka hanya vak inilah yang statis tak tertentu. Dibagian-bagian lainnya, batang-batang tetap statis tertentu, dan yang kita pelajari juga hanya vak yang kelebihan diagonal itu. Di dalam gambar IX, 1 terlihat suatu kotakan dengan diagonal



Gambar IX, 1

PERPUSTAKAAN DAERAH JAWA TIMUR
JL. MENUR PUMPUNGAN No. 32
SURABAYA

rangkap. Yang kita anggap sebagai statis kelebihan ialah diagonal d_X dengan gayanya D_X yang berhubung dengan sifatnya statis tak tertentu akan kita sebut X. Di sini kekuatan X dianggap sebagai gaya-tarik - atau positif. Batang d_X ini kita potong dan kemudian mengadakan kekuatan-kekuatan menekan sebesar –1 pada tampang-tampang potongan ini (tentu saja // d_X sendiri), atau boleh dikatakan: kita mengadakan X = –1 pada batang kelebihan d_X ini.

Kemudian kita menggambar Cremona yang ditimbulkan oleh X = – 1 ini dan dengan begitu kita mendapat faktor-faktornya pengaruh dalam α, terhadap gaya-gaya batang di dalam kotakan ini. Oleh karena Cremona ini sebangun dengan kotakan, maka kita mendapat dengan mudah faktor-faktor α tersebut itu.

$$\alpha_a = \frac{a}{d_x}\,;\ \alpha_b = \frac{b}{d_x}\,;\ \alpha_d = -\frac{d}{d_x}\,;\ \alpha_{vl} = \frac{h_r}{d_x}\,,\ \alpha_{vr} = \frac{h_l}{d_x} \text{ dan } \alpha_x = -1$$

Jadi di sini α_a berarti faktor pengaruh dalam dari X terhadap kekuatan di batang atas a, yaitu kekuatan di batang a ini yang disebabkan oleh –X = 1; α_b idem idem untuk batang bawah b, dan seterusnya.

$$\delta_{xx} = \sum_{1 vak} \alpha^2 \frac{s}{EF} = \alpha_a^2 \frac{a}{EF_a} + \alpha_b^2 \frac{b}{EF_b} + \alpha_d^2 \frac{d}{EF_d} + \alpha_{vl}^2 \frac{h_l}{EF_l} + \alpha_{vr}^2 \frac{h_r}{EF_r} + \alpha_x^2 \frac{d_x}{EF_x}$$

$$\delta'_{xx} = EF_x \cdot d_x^2 \cdot \delta_{xx} = \frac{F_x}{F_a} a^3 + \frac{F_x}{F_b} \cdot b^3 + \frac{F_x}{F_d} \cdot d^3 + \frac{F_x}{F_l} \cdot h_l h_r^2 + \frac{F_x}{F_r} \cdot h_l^2 h_r + d_x^3$$

Muatan P yang bekerja di titik hubungan k menyebabkan robahan jarak antara titik-titik pegangan X sejauh : $P\delta_{xk} = \sum_{1 vak} \alpha S^o \frac{s}{EF}$ di mana S^o = gaya batang disusunan statis tertentu.

$$\delta_{xk} = \alpha_a A^o \frac{a}{EF_a} + \alpha_b B^o \frac{b}{EF_b} + \alpha_d D^o \frac{d}{EF_d} + \alpha_{vl} V_l^o \cdot \frac{h_l}{EF_l} + \alpha_{vr} V_r^o \cdot \frac{h_r}{EF} + o$$

$$\delta'_{xk} = EF_x d_x^2 \delta_{xk} = d_x \left(A^o a^2 \frac{F_x}{F_a} + B^o b^2 \frac{F_x}{F_b} + D^o d^2 \frac{F_x}{F_d} + V_l^o h_l h_r \frac{F_x}{F_l} + V_r^o h_l h_r \frac{F_x}{F_r} \right)$$

$$X = P \frac{\delta'_{xk}}{\delta'_{xx}}$$

$$A = A^o - \alpha_a X; \quad B = B^o - \alpha_b X; \quad D = D^o - \alpha_d X; \quad V_l = V_l^o - \alpha_{vl} X;$$

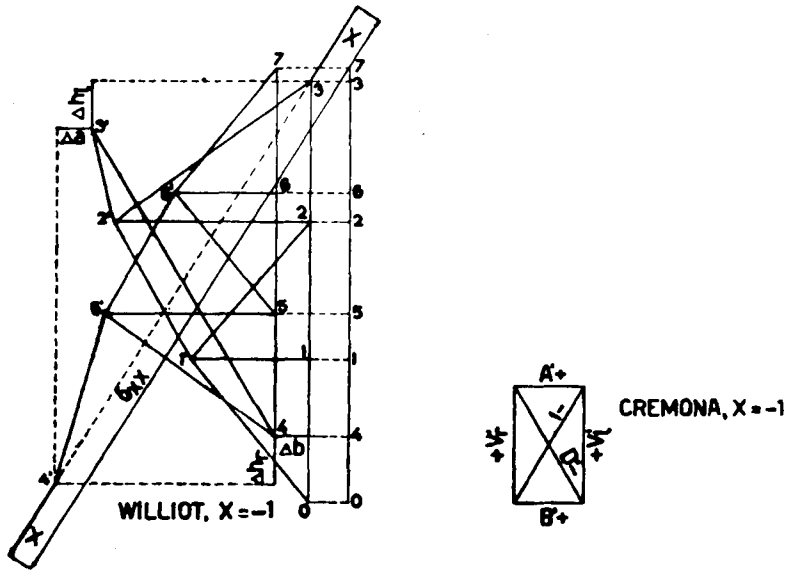
$$V_r = V_r^o - \alpha_{vr} X; \ D_x = X$$

$$A = \alpha_a \left(\frac{A^o}{\alpha_a} - X \right); \ B = \alpha_b \left(\frac{B^o}{\alpha_b} - X \right), \text{ dst.}$$

Cara terakhir ini adalah kombinasi garis pengaruh X dan garis-garis pengaruh $\frac{A^o}{\alpha_a}$; $\frac{B^o}{\alpha_b}$ dan sebagainya.

§ 3. Lanjutan garis pengaruh X

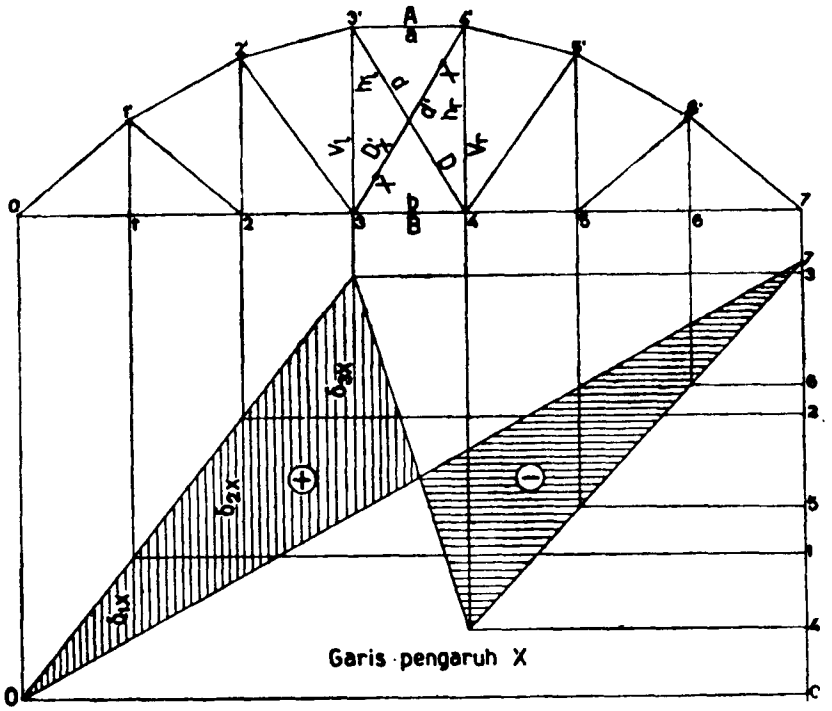
Besaran $\delta_{xk} = \delta_{kx}$ dilukiskan oleh naik/turunnya titik hubungan k yang disebabkan oleh X = 1 atau X = – 1. Untuk ini kita menggunakan lukisan Williot. Di dalam contoh menurut gambar IX,2 ketika menggambar Williot pada –X = 1, diagonal 3'4 untuk sementara waktu dianggap tetap letaknya. Kekuatan X = – 1 menimbulkan gaya-gaya batang



Gambar IX, 2a

$A' = \alpha_a$, $B' = \alpha_b$, $V'_l = \alpha_{vl}$, $V'_r = \alpha_{vr}$, $D'_d = \alpha_d$ dan $D'_x = -1$, yang semuanya dapat terbaca pada Cremonanya.

Panjang garis 3'4 di dalam gambar Williot melukiskan robahan panjang di batang d atau 3'4) pada vak-werk sebanyak $\alpha_d \cdot \frac{d}{EF_d} = \Delta d$ (di sini perpandakan, sebab D' negatif). Dari titik 3' kita menarik garis garis sepanjang $\Delta h_l = \alpha_{vl} \cdot \frac{h_l}{EF_l}$ dan $\Delta a = \alpha_a \frac{a}{EF_a}$. Dari titik 4 garis-garis $\Delta h_r = \alpha_{vr} \frac{h_r}{EF_r}$ dan $\Delta b = \alpha_b \frac{b}{EF_b}$.



Gambar IX, 2b

Sesudah itu mendapat letaknya titik-titik 3 dan 4', Dari 3 dan 3' menarik garis-garis ⊥ diagonal 3 2' dan ⊥ batang tepi atas 3'2' yang saling berpotongan di titik 2'. Kemudian ditarik 2'2 ⊥ batang vertikal 2' 3; 3 O ⊥ batang bawah 07 (jadi vertikal). Dari 2 dan 2' ditarik garis-garis berturut-turut ⊥ tongkat 21' dan 2'1 yang berpotongan di titik 1'. Garis 1'1 ⊥ vertikal 1'1 dan seterusnya. Dengan begitu kita mengetahui-turunnya titik-titik 0, 1 . . . . . 7, sedang titik 0 dan titik 7 tetap tingginya.

Pada gambar garis pengaruh X maka garis penutup ialah garis penghubung antara titik-titik 0 dan 7

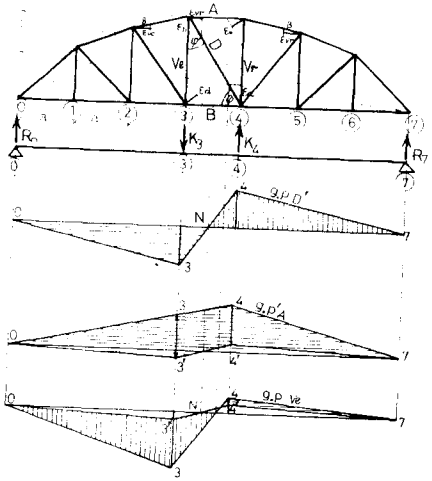
Panjang garis 34' di dalam gambar Williot melukiskan robahan pada jarak antara titik-titik 3 dan 4' di dalam vakwerk, sedang panjangnya $(3X + 4'X)$ = perpandakan diagonal d_X sendiri, jadi $\frac{d_x}{EF_x}$. Dengan

begitu kita dapat mengerti bahwa $34' + (3X + 4'X) = \delta_{xx}$ = robahan pada jarak (penjauhan) antara tampang-tampang potongan pada diagonal d_X atau antara titik-titik pegangan X sebagai akibat dari $X = -1$.

Oleh karena robahan-panjang pada batang $\Delta s = \alpha \frac{s}{EF}$ itu kecil nilainya, lebih mudah jika dilipatkan dengan sesuatu faktor tetap: EF_o, menjadi $\Delta s' = EF_o \Delta s = \alpha s \frac{F_o}{F}$

§ 3a. Cara analisa (gb.IX, 3)

Ini analog dengan cara di dalam bab VIII, § 12 (vakwerk dengan kabel) Setelah mengerjakan gaya X = –1, kita mendapatkan besaran-besaran faktor pengaruh dalam α. Kemudian menghitung besaran : $\delta = \Sigma \ \alpha^2 \ s/EF$, yang untuk mudahnya kita lipatkan dengan EF_0/a, di mana F_0 itu luas penampang sesuatu batang yang kita pilih sendiri (misalnya batang A atau D sendiri).



Gambar IX, 3

Terdapat $\delta'_{xx} = \delta_{xx} EF_0/a = \Sigma \ (s/a)(F_0/F)$ yang **tidak berdimensi.**

$X = P \ \delta_{xp}/\delta_{xx} = P \ \delta_{px}/\delta_{xx} = P \ \delta'_{px}/\delta'_{xx}$

$\delta'_{px} = \delta_{px} \ EF_0/a = (EF_0/a)$ kali ordinat melenturnya titik pegangan beban bergerak P akibat dari gaya X = –1 tadi, sedang P bekerja disesuatu titik kumpul (di sini diambil **pada tepi bawah**, jadi di titik 0 s/d titik 7)

Hitungan dijalankan dengan perantaraan robahan-robahan sudut γ berdasarkan atas besaran-besaran $\epsilon = \sigma/E = \alpha/EF$ atau $\epsilon' = \epsilon EF_o = \alpha (F_o/F)$.

Gaya fiktif pada sesuatu titik kumpul yang bersangkutan. terdapat $K = -\Delta \gamma$ dan ordinat-ordinat momennya nanti dibagi dengan a (sesuai dengan faktor reduksi EF_o/a).

Satu sama lain dikerjakan dengan daftar sebagai berikut :

Batang	A	B	V_l	V_r	D	D =X
s/a	1	1	tg φ	tg φ	sec φ	sec φ
F_o/F	...	...	...	...	...	...
	+ cos φ	+ cos φ	+ sin φ	+ sin φ	– 1	– 1
$\alpha^2(s/a)(F_o/F)$	...	...	...	...	...	...
$\epsilon' = \alpha F_o/F$	...	...	...	...	...	...

Gaya-gaya fiktif K yang diperlukan hanya terdapat di titik-titik 3 dan 4 (K_3 dan K_4), selanjutnya $\varphi' = 90° - \varphi$.

$K_3 = -\Delta\gamma_3 = +\epsilon'_{vl}$ cotg $\varphi - \epsilon'_d$ (cotg φ + cotg φ') + ϵ'_b cotg φ + $+\epsilon'_{vl}$ cotg $\varphi' = 0$ (ke bawah).

$K_4 = -\Delta\gamma_4 = +\epsilon'_{vr}$ cotg $\varphi - \epsilon'_d$ cotg $\varphi + \epsilon'_d$ cotg $\varphi - \epsilon'_{vr}$ cotg φ' $+\epsilon'_d$ cotg $\varphi' > 0$ (ke atas)

Reaksi-reaksi perletakan terdapat :

$R_o = 4/7\ K_3 + 3/7\ K_4$ (positif) dan $R_7 = 3/7\ K_3 + 4/7\ K_4$ (negatif).

Garis momen berjalan lurus antara 0 dan 3, antara 7 dan 4 dan antara 3 dan 4 dengan membalik tandanya (titik nol).

$(\delta'_{px})_3 = \delta'_{3x} = M_3/a = 3\ R_o$(positif); $(\delta'_{px})_4 = M_4/a = 3\ R_7$ (negatif)

Pada akhirnya, ordinat pengaruh D' = X terdapat $\eta = \delta''_{px} / \delta_{xx}$

Garis pengaruh gaya batang $S = S^o - \alpha X$ terdapat sebagai superposisi garis-pengaruh S^o dan garis pengaruh $-\alpha X$.

Sebagai contoh kita ambil $A = A^o - \alpha_a X = A^o - X \cos \varphi$

Garis pengaruh A^o berbentuk segitiga dengan puncak di bawah titik 4 sebesar 4.3/7 tg φ = 12/7 cotg φ atau ordinat fiktif da bawah titik 0 sebesar 4 – cotg φ (garis 047).

A^o selalu bernilai **negatif** (tekan), sedang garis X cos φ itu serupa dengan

garis X, yaitu dengan faktor-reduksi cos φ dan nilainya **positif** di sebelah kiri titik 3, sehingga $-\alpha X = -X \cos \varphi$ itu **negatif** (garis 0.3.4.7.).

Ini berarti menambah nilai mutlaknya A° yang negatif juga

Oleh karena keadaan simetris, maka garis 3'4 // garis 0 4, sebab ordinat-ordinat garis pengaruh A di 3 dan di 4 itu sama panjangnya.

Jika garis O 3' 4' 7 digambar sebagai garis mendatar (absis), maka pada akhirnya garis pengaruh A berbentuk trapezium sama kaki (simetris) dengan tingti = 4'4.

Sebagai teladan lainnya kita ambil $V_l = V_l^o - \alpha_{vl} X = V_l^o - X \sin \varphi$

Di dalam contoh ini, hanya ada dua gaya (fiktif) K, ini disebabkan oleh arahnya diagonal-diagonal di lapangan-lapangan 32 dan 45 sehingga $\Delta\gamma_2 = \Delta\gamma_5 = 0$.

Jika arah-arah diagonal-diagonal itu dibalik, akan terdapat adanya

$\Delta\gamma_2 = +\epsilon'_{vl}$ tg φ' dan $\Delta\gamma_5 = +\epsilon'_{vr}$ cotg φ'

$K_2 = -\Delta\gamma_2$ dan

$K_5 = -\Delta\gamma_5$

Besarnya K_3 dan K_4 akan berobah juga, begitu pula bentuknya garis pengaruh X (bagian-bagian 0 2 3 dan 7 6 5 tidak lagi lurus).

Ini kita pergunakan pada contoh menurut gambar IX, 3a dengan beban bekerja di **tepi atas.** Robahan-robahan sudut harus diambil di **bagian atasnya** derat-betang 0 - 5 (tertulis $\Delta\gamma'$).

Jadi $K = -\Delta\gamma' = +\Delta\gamma$, jika $\Delta\gamma$ berarti robahan sudut di bagian bawah nya (jadi yang riel).

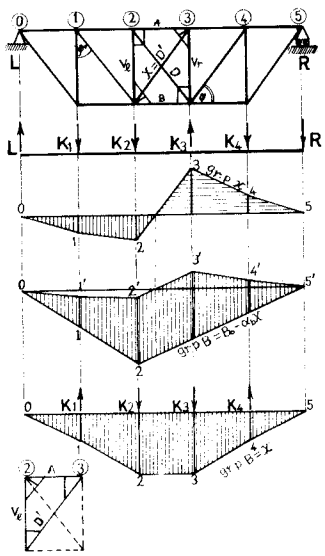
Akan terdapat $K_1 = K_4 = \epsilon'_{vl}$ cotg $\varphi' = \epsilon'_{vr}$ cotg φ' (positif).

K_2 positip dan K_3 negatif (analog dengan K_4 di atas).

Tergambar garis-garis pengaruhnya X = D' dan $B = B^o - \alpha_b X$.

yang terakhir ini menunjukkan, bahwa garis 2' 3' // garis 2 5.

dan ordinat-ordinat akhir di bawah titik-titik 2 dan 3 sama panjangnya.



Gambar IX, 3a

Sebagai kontrol, kita menjadikan B = X sebagai gaya statis kelebihan.
Tentu saja besaran-besaran α menjadi lain (lihat daftar di bawah).

Batang	A	B = X	V_l	V_r	D	D'
α	– 1	– 1	– tg φ	– tg φ	+ sec φ	+ sec φ

$K_1 = \epsilon'_{vl} \operatorname{cotg} \varphi' = K_4 = \epsilon'_{vr} \operatorname{cotg} \varphi'$. (negatif)

$K_2 = K_3 = -\epsilon'_{vl} \operatorname{cotg} \varphi' + \epsilon'_d (\operatorname{cotg} \varphi + \operatorname{cotg} \varphi') - \epsilon'_a \operatorname{cotg} \varphi - \epsilon'_{vl} \operatorname{cotg} \varphi'$

(positif).

§ 4. Diagonal rangkap di seluruh bangunan.

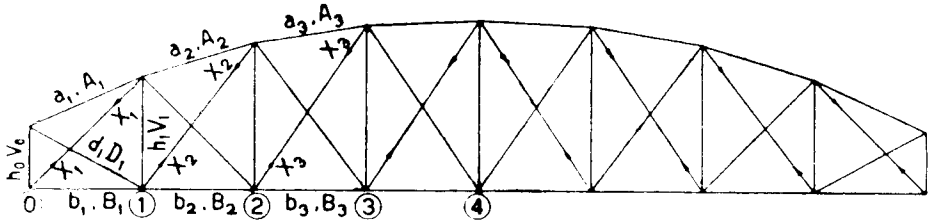
X_1 mempengaruhi A_1, B_1, D_1, V_o dan V_1; $\delta_{11} = \Sigma \alpha_1^2 \frac{s}{EF}$ vak no 1

X_2 mempengaruhi A_2, B_2, D_2, V_1 dan V_2; $\delta_{22} = \Sigma \alpha_2^2 \frac{s}{EF}$ vak no 2

X_k mempengaruhi A_k, B_k, D_k, V_{k-1} dan V_k; $\delta_{kk} = \Sigma \alpha_k^2 \frac{s}{EF}$ vak no k

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \alpha_1 \alpha_2 \frac{h_1}{EF_1} \text{ (tihang 1 itu tunggal antara } X_1 \text{ dan } X_2)$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \alpha_2 \alpha_3 \frac{h_2}{EF_2} \text{ (tihang 2 itu tunggal antara } X_2 \text{ dan } X_3)$$



Gambar IX, 4

$$\delta_{k(k+1)} = \delta_{(k+1)k} = \alpha_k \alpha_{k+1} \frac{h_k}{EF_k} \text{ (tiang } k \text{ itu tunggal antara } X_k \text{ dan } X_{k+1})$$

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} = \Sigma \alpha_1 S^o \frac{s}{EF} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} = \Sigma \alpha_2 S^o \frac{s}{EF} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$X_{(k-1)} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} + X_{(k+1)} \delta_{k(k+1)} = \Sigma \alpha_k S^o \frac{s}{EF} \quad \ldots\ldots (k)$$

Persamaan-persamaan ini memperlihatkan analogos dengan persamaan persamaan tiga momen.

Sebagai pendekatan boleh dianggap bahwa $(EF)_{\text{tihang}} = \infty$ (tihang kaku tak terhingga) jadi $\delta_{12} = \delta_{21} = o$ atau pada umumnya $\delta_{k(k-1)} = o$

Dengan begitu persamaan-persamaan hanya mengandung satu besaran tak terketahui masing-masing:

$$X_1 \delta_{11} = \Sigma \alpha_1 S^o \frac{s}{EF}$$

$$X_2 \delta_{22} = \Sigma \alpha_2 S^o \frac{s}{EF}$$

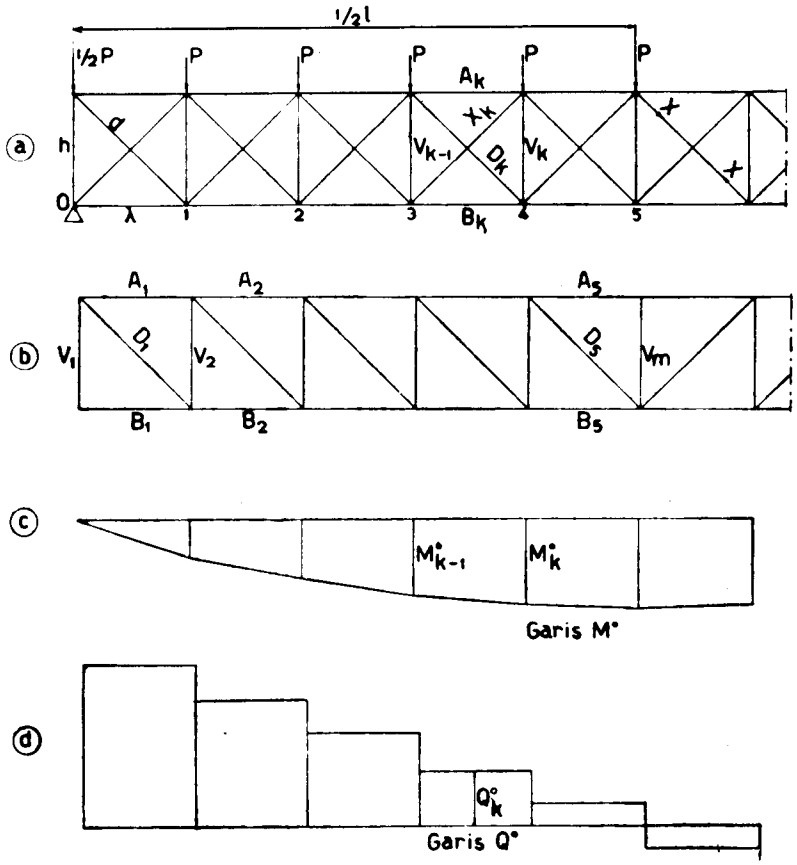
$$X_k \delta_{kk} = \Sigma \alpha_k S^o \frac{s}{EF}$$

Pendapat-pendapat secara pendekatan ini, yang kita namakan X_1', X_2', X_k' kita pergunakan di dalam persamaan-persamaan yang lengkap seperti tertulis di atas, yaitu besaran-besaran X_{k-1}' dan X_{k+1}' dipergunakan di dalam persamaan (k).

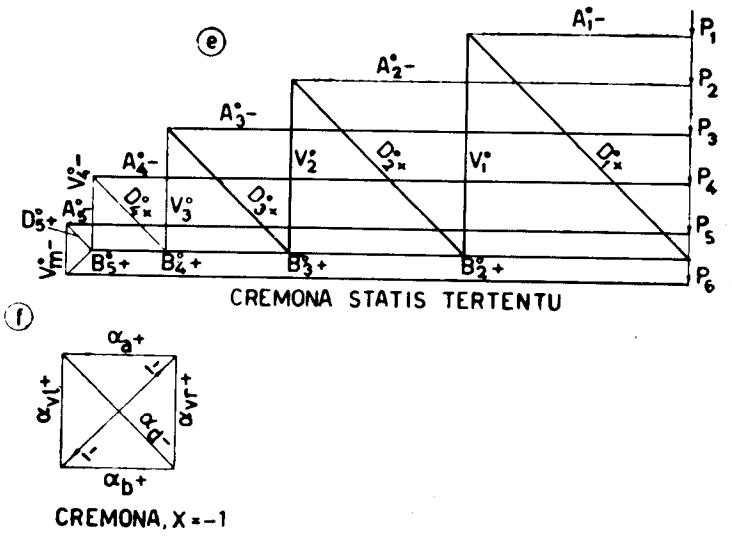
$$X_{(k-1)}'\ \delta_{(k-1)k} + X_k \delta_{kk} + X_{(k+1)}'\ \delta_{k(k+1)} = \Sigma\, \alpha_k S^o \frac{s}{EF} \cdots\cdots (k)$$

$$X_k = 1/\delta_{kk} \left\{ \Sigma\, \alpha_k S^o \frac{s}{EF} - X_{(k-1)}'\ \delta_{(k-1)k} - X_{(k+1)}'\ \delta_{k(k+1)} \right\}$$

§ 5. Penahanan angin bawah dengan diagonal-diagonal rangkap pada vakwerk.



Gambar IX, 5 abcd



Gambar IX, 5ef

Batang-batang tepi terdiri dari batang-batang tepi bawah pada bangunan vakwerk dasar, sedang batang-batang vertikal" (sebetulnyamendatar) dibentuk oleh rasuk-rasuk melintangnya (gambar IX, 5). Muatan di saban titik hubungan, P = λq_w jika q_w = tekanan angin per m'. Gambar IX, 5b menunjukkan susunan statis tertentu, sedang gambar-gambar c,d - dan e memperlihatkan garis momen, garis kekuatan melintang dan Cremona yang ditimbulkan oleh muatan-muatan P pada susunan statis tertentu ini. Untuk menentukan faktor-faktor α kita menggambar Cremona pada X = – 1 yang untuk semua kotak sama (Gambar IX, 5f).

Kita mendapat: $\alpha_a = \alpha_b = \frac{\lambda}{d}$; $\alpha_v = \frac{h}{d}$ dan $\alpha_d = -1$; $\delta_{(k-1)k} = \alpha_v^2 \frac{h}{EF_v}$

Kita mempelajari kotakan no k : $A_k^o = -\frac{1}{h} M_k^o$;

$$B_k^o = \frac{1}{h} M_{(k-1)}^o \text{ atau } B_k^o = \frac{1}{h}(M_k^o - \lambda Q_k^o) = -\left(A_k^o + \frac{\lambda}{h} Q_k^o\right);$$

$V_{(k-1)}^o = -Q_{(k-1)}^o$; $V_k^o = -Q_k^o$; $D_k^o = \frac{d}{h} Q_k^o$ (mempergunakan garis-garis M^o dan Q^o). Pendapat-pendapat ini dicocokkan dengan Cremona.

Persamaan kotakan k menjadi:

$$X_{(k-1)}\alpha_v^2\frac{h}{EF_v}+X_k\left(\alpha_a^2\frac{\lambda}{EF_a}+\alpha_b^2\frac{\lambda}{EF_b}+\alpha_d^2\frac{d}{EF_d}+\frac{d}{EF_d}+2\alpha_v^2\frac{h}{EF_v}\right)+$$
$$+X_{(k+1)}\alpha_v^2\frac{h}{EF_v}=\Sigma\,\alpha S_k^o\frac{s}{EF}$$

Selanjutnya: $F_a=F_b=F$ dan setelah mengisi nilai-nilai α menjadi:

$$X_{(k-1)}\frac{h^3}{d^2EF}+X_k\left(2\frac{\lambda^3}{d^2EF}+2\frac{d}{EF_d}+2\frac{h^3}{d^2EF_v}\right)+X_{(k+1)}\frac{h^3}{d^2EF_v}=$$
$$=\frac{\lambda^2}{dEF}(A_k^o+B_k^o)-\frac{d}{EF_d}D_k^o+\frac{h^2}{dEF_v}(V_{k-1}^o+V_k^o)$$

Setelah dilipatkan dengan $\frac{d^2}{\lambda^3}EF_d$ menjadi :

$$X_{k-1}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^3\frac{F_d}{F_v}+2X_k\left\{\frac{F_d}{F}+\left(\frac{d}{\lambda}\right)^3+\left(\frac{h}{\lambda}\right)^3\frac{F_d}{F_v}\right\}+X_{k+1}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^3\frac{F_d}{F_v}=$$
$$\frac{d}{\lambda}\frac{F_d}{F}(A_k^o+B_k^o)-\left(\frac{d}{\lambda}\right)^3D_k^o+\frac{d}{\lambda}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2\frac{F_d}{F_v}(V_{k-1}^o+V_k^o)$$

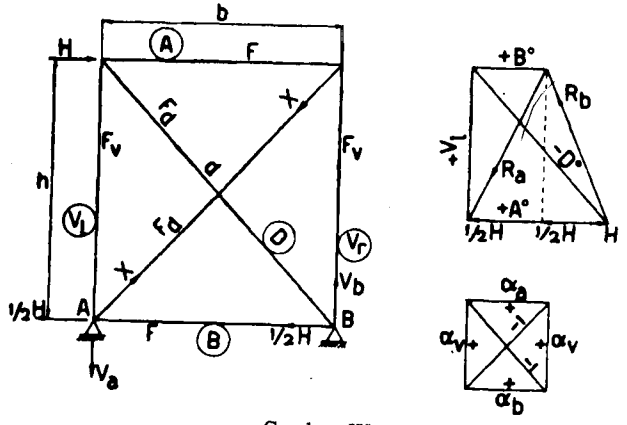
Sebagai pendekatan pertama, semua tihang dianggap kaku tak terhingga ($F_v=\infty$) dan dengan begitu kita mendapat $X_1', X_2' - X_k'$ seperti termaksud di dalam § 4

Sesudah itu, X_{k-1}' dan X_{k+1}' yang terdapat ini, dipakai di dalam persamaan k yang mengandung X_k (pendekatan kedua). Jadi menurut pendekatan-pertama, suku-suku yang mengandung X_{k-1} dan X_{k+1} di dalam persamaan (k) lenyap :

$$2X_k'\left\{\frac{F_d}{F}+\left(\frac{d}{\lambda}\right)^3+\left(\frac{h}{\lambda}\right)^3\frac{F_d}{F_v}\right\}=\frac{d}{\lambda}\frac{F_d}{F}(A_k^o+B_k^o)-\left(\frac{d}{\lambda}\right)^3D_k^o$$

§ 6. Portal angin penghabisan dengan diagonal rangkap.

Ini sering terdapat pada jembatan vakwerk dengan lintasan di atas. Di sini kita akan menyelidiki akibat dari resultanta tekanan angin yang bekerja mendatar, kekuatan H.



Gambar IX, 6

Perletakan-perletakan A dan B dianggap sebagai sendi dan $H_a = H_b = \frac{1}{2}H$.

Batang	α	S^o	αS^o	α^2
A	$\frac{b}{d}$	o	o	$\frac{b^2}{d^2}$
B	$\frac{b}{d}$	$\frac{1}{2}H$	$\frac{1}{2}\frac{b}{d}H$	$\frac{b^2}{d^2}$
V_l	$\frac{h}{d}$	$\frac{h}{b}H$	$\frac{h^2}{db}H$	$\frac{h^2}{d^2}$
V_r	$\frac{h}{d}$	o	o	$\frac{h^2}{d^2}$
D	-1	$-\frac{d}{b}H$	$\frac{d}{b}H$	1
X	-1	o	o	1

$$2X\left(\frac{b^3}{d^2EF}+\frac{h^3}{d^2EF_v}+\frac{d}{EF_d}\right)=\left(\tfrac{1}{2}\frac{b^2}{dEF}+\frac{h^3}{dbEF_v}+\frac{d^2}{bEF_d}\right)H$$

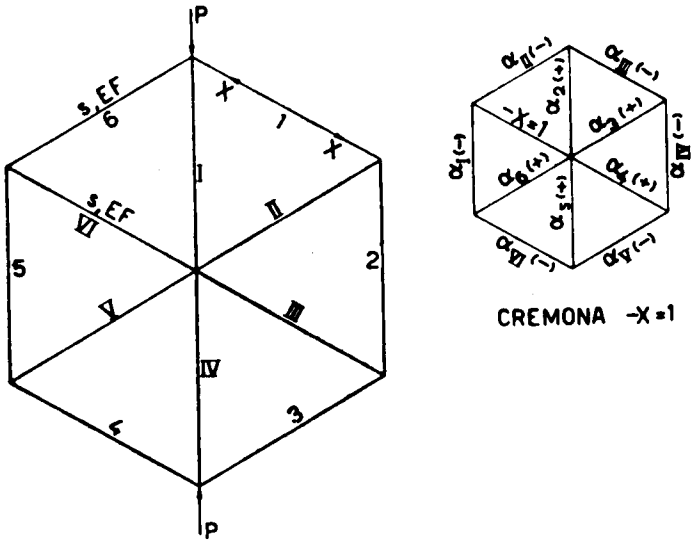
$$2X\left\{\frac{F_d}{F}+\left(\frac{h}{b}\right)^3\frac{F_d}{F_v}+\left(\frac{d}{b}\right)^3\right\}=\left\{\tfrac{1}{2}\frac{d}{b}+\frac{F_d}{F}+\left(\frac{d}{b}\right)\left(\frac{h}{b}\right)^3\frac{F_d}{F}+\left(\frac{d}{b}\right)^4\right\}H$$

$$A=A_o-\alpha_a X;\quad B=B_o-\alpha_b X \text{ dst.}$$

§ 7. Segi enam teratur dengan semua diagonal-diagonalnya.

(Ujian T.H. Bandung 1936).

Muatan-muatan P bekerja radial simetris. Bangunan menjadi statis tertentu jika salah satu batang tepi, umpamanya batang 1, dihapuskan; jadi bangunan ini statis tak tertentu tunggal.



CREMONA -X=1

Gambar IX, 7

Pada susunan statis tertentu ini, terdapat $S_I^o = S_{IV}^o = -P$, dan batang-batang lainnya bebas tegangan

Selanjutnya lihat daftar, sedang $S_1 = X$ dianggap menekan, jadi – X itu menarik.

Oleh karena besaran-besaran $\frac{s}{EF}$ itu sama pada semua batang-batang maka ini boleh dihilangkan di dalam hitungan.

$$X\,\Sigma\,\alpha^2=\Sigma\,\alpha\,S^o$$
$$12X=2P$$
$$X=\tfrac{1}{6}P$$

Nilai positif berarti, bahwa X itu menekan, betul adanya.

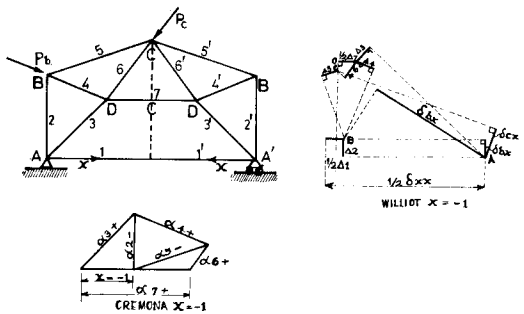
$$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=o-X=-\tfrac{1}{6}P \text{ (menekan),}$$

$$S_I=S_{IV}=-P-\alpha_I X=-P+\tfrac{1}{6}P=-\tfrac{5}{6}P$$
$$S_{II}=S_{III}=S_V=S_{VI}=o-\alpha_{II}X=+\tfrac{1}{6}P$$

Batang	α	S^o	αS^o	α^2
1	1	0	0	1
2	1	0	0	1
3	1	0	0	1
4	1	0	0	1
5	1	0	0	1
6	1	0	0	1
I	– 1	– P	P	1
II	– 1	0	0	1
III	– 1	0	0	1
IV	– 1	– P	P	1
V	– 1	0	0	1
VI	– 1	0	0	1

§ 8. Rangka payon dengan batang tarik.

Bangunan menjadi statis tertentu jika batang tarik AA' dipotong. Berhubung dengan ini, bangunan adalah statis tak tertentu tunggal dan gaya tarik di batang 1 (AA') diambil sebagai gaya statis kelebihan X.

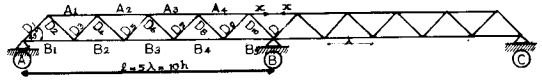


Gambar IX, 8

Dengan menggambar Cremona pada X = –1, kita mendapat faktor-faktor pengaruh α. Sesudah itu, menggambar Wiiliot yang disebutkan oleh X = – 1 tadi, yang didasarkan atas keadaan simetri sehingga titik tengah O pada batang DD' dan titik C tak beralih ke arah mendatar (CO tinggal vertikal). Pada gambar Williot terbaca : OD = ½ $\Delta 7 = \frac{1}{2}\alpha_7 \frac{S_7}{EF_7}$; dari D kita menggambar robahan-robahan panjang pada batang-batang 3, 4 dan 6 sebesar berturut-turut

$$\Delta 3 - \alpha_3 \frac{S_3}{EF_3} ; \Delta 4 = \alpha_4 \frac{S_4}{EF_4} ; \Delta 6 = \alpha_6 \frac{S_6}{EF_6}.$$

Dengan perantaraan $\Delta 6$ ini, kita mendapat titik C yang memenuhi-syarat bahwa OC berdiri vertikal. Sesudah C terdapat, kita melukiskan $\Delta 5 = \alpha_5 \frac{S_5}{EF_5}$. Titik B terdapat dengan perantaraan $\Delta 5$ dan $\Delta 4$. Dari B di gambar $\Delta 2 = \alpha_2 \frac{S_2}{EF_2}$ dan dengan $\Delta 3$ kita mendapat A. Jarak



Gambar IX, 9

mendatar antara A dan O melukiskan besaran $\frac{1}{2}\delta_{xx}$.

Juga di dalam gambar Williot ini kita dapat melukiskan besaran δ_{bx}, δ_{cx} dan $\delta_{b'x}$ jika δ_{bx} berarti peralihan titik pegangan P_b (yaitu titik B) diukur menurut garis kerjanya yang diakibatkan oleh $X = -1$; δ_{cx} idem idem berlaku untuk P_c dan seterusnya.

$$X = \frac{1}{\delta_{xx}} \Sigma P . \delta . _x = \frac{1}{\delta_{xx}} (P_b \delta_{bx} + P_c \delta_{cx} + P_{b'} \delta_{b'x})$$

Atau juga, kita menggambar Cremona pada muatan-muatan P_b, P_c dan P_b' ini untuk mengetahui S^o.

Sesudah itu $X \Sigma \alpha^2 \frac{S}{EF} = \Sigma \alpha S^o \frac{S}{EF}$ dan akhirnya $S = S^o - \alpha X$.

§ 9. Vakwerk di atas tiga perletakan.

Sebagai contoh kita ambil vakwerk parallel tidak dengan batang-batang vertikal sedang diagonal-diagonalnya membentuk sudut 45° dengan batang-

batang tepi, selanjutnya : $h = a = \frac{1}{10}l$; EF pada batang-batang tepi sama besarnya dan $(EF)_{diag.} = uEF$; panjang diagonal = $a\sqrt{2}$.

Batang tepi di atas perletakan tengah dianggap sebagai statis kelebihan di mana bekerja gaya-gaya X. Batang ini kita potong dan kemudian – mengerjakan kekuatan-kekuatan X = – 1 pada tampang-tampang potong-an ini. Ini menimbulkan reaksi perletakan V_a di A ke atas sebesar $\alpha_A = 1 \frac{h}{l} = 0{,}1$, bidang momen yang berbangun segi tiga ($M_x = V_a x = 0{,}1x$) dan garis gaya lintang // garis penutup ($Q_x' = V_a = 0{,}1$).

Berhubung dengan ini, kita mendapat :

$$\alpha_{a1} = -0{,}1 \frac{a}{h} = -0{,}2; \alpha_{a2} = -0{,}1 \frac{2a}{h} = -0{,}4; \alpha_{a3} = -0{,}6$$

$$\alpha_{a4} = -0{,}8; \alpha_x = -1$$

$$\alpha_{b1} = 0{,}1 . \frac{\frac{1}{2}a}{h} = 0{,}1; \alpha_{b2} = 0{,}1 . \frac{1\frac{1}{2}a}{h} - 0{,}3; \alpha_{b3} = 0{,}5$$

$$\alpha_{b4} = 0{,}7, \alpha_{b5} = 0{,}9$$

$$\alpha_{d1} = \alpha_{d3} = \alpha_{d5} = \alpha_{d7} = \alpha_{d9} = -0{,}1\sqrt{2}$$

$$\alpha_{d2} = \alpha_{d4} = \alpha_{d6} = \alpha_{d8} = \alpha_{d10} = +0{,}1\sqrt{2}$$

$$\Sigma \alpha^2 \frac{s}{EF} = \Sigma \alpha_a^2 \frac{a}{EF} + \Sigma \alpha_b^2 \frac{a}{EF} + \Sigma \alpha_d^2 \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}{uEF}$$

$$= \frac{a}{EF}\left[2\{(0{,}2^2 + 0{,}4^2 + 0{,}6^2 + 0{,}8^2) + (0{,}1^2 + 0{,}3^2 + 0{,}5^2 + 0{,}7^2 + 0{,}9^2)\} + 1 + \frac{1}{u} 20\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(0{,}1\sqrt{2})^2\right] = \frac{a}{EF}\left(6{,}70 + \frac{0{,}2}{u}\sqrt{2}\right)$$

$$\delta_{xx}' = \frac{EF}{a} \Sigma \alpha^2 \frac{s}{EF} = \left(6{,}70 + \frac{0{,}2}{u}\sqrt{2}\right)$$

Garis pengaruh X :

Muatan P = 1 berdiri sejauh $a = p\lambda$ dari A dan menimbulkan garis j momen M^o.

M_{ku}^o = momen di titik hubungan atas sejauh $k\lambda$ dari A

M_{kb}^o = momen di titik hubungan bawah sejauh $k\lambda$ dari A

$$A_k^o = \frac{1}{h} M_{kb}^o ; \; B_k^o = \frac{1}{h} M_{ka}^o$$

Banyaknya vak di dalam satu bentang $= n$, jadi $a = \frac{1}{n} l$

$$M_{k<p}^o = \frac{(n-p)}{n} k \, . \, P\lambda ; \; M_{k>p}^o = \frac{p}{n} (n-k) Pa$$

$$Q_{k<p}^o = \frac{n-p}{n} P ; \; Q_{k>p}^o = -\frac{p}{n} P$$

$$P\delta_{xp} - \Sigma \, x S^o \frac{s}{EF} = \Sigma \, \alpha_a A^o \frac{a}{EF} + \Sigma \, \alpha_b B^o \frac{a}{EF} + \Sigma \, \alpha_d D^o \frac{\frac{1}{2} a\sqrt{2}}{uEF}$$

$$P\delta_{xp} - P\delta_{xp} \frac{EF}{a} = \Sigma \, \alpha_a A^o + \Sigma \, \alpha_b B^o + \frac{\sqrt{2}}{2u} \Sigma \, \alpha_d D^o$$

$$X = P \frac{\delta'_{xp}}{\delta'_{xx}}$$

Secara grafis kita menggambar Williot pada X = – 1 yang memperlihatkan turunnya titik-titik hubungan masing-masing. Garis yang melukiskan turunnya titik-titik ini di tempatnya masing-masing berarti garis elastis yang disebabkan oleh –X = 1 ini dan meluksikan pula perjalanan garis pengaruh X

Jika deformasi pada diagonal-diagonal diabaikan $(EF_d = \infty)$,

suku $\Sigma \, x S^o \frac{s}{EF}$ hanya mengandung A^o dan B^o atau $\frac{1}{h} M_k^o$.

Jadi $X \Sigma \, x^2 \frac{s}{EF} = \frac{1}{h} \Sigma \, \alpha M_k^o \frac{s}{EF}$

$$X \Sigma \, x^2 = \frac{1}{h} \Sigma \, x M_k^o$$

$\Sigma \, x M_k^o$ dapat dilukiskan oleh garis momen jika masing-masing titik hubungan dimuati dengan x.

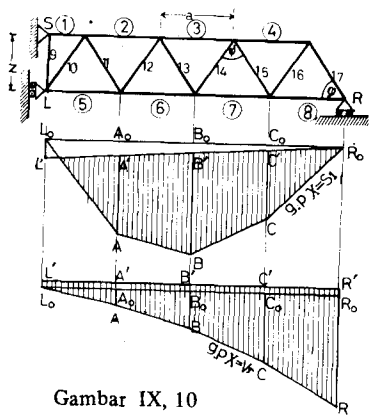
Sebagai statis kelebihan boleh juga diambil reaksi perletakan B. Setelah perletakan B dihilangi, kita mengadakan kekuatan = 1 di titik B yang ke bawah arahnya (–X = 1).

Sesudah itu menggambar Cremona dan Williot.

Kita juga dapat menentukan perjalanan garis lentur tepi bawah secara analisa dengan perantaraan robahan-robahan sudut seperti di dalam § 3. Contoh lainnya ialah rasuk pararel di atas tiga perletakan juga, tetapi dengan hanya satu bentang saja (gb. IX, 10).

S adalah perletakan sendi, L rol vertikal dan R rol mendatar.

Diagonal-diagonal berserong menurut Tg φ = 4/3. Penampang batang-batang mendatar luasnya = F_o dan yang lain-lainnya F = 0,5 F_o



Gambar IX, 10

a) Sebagai gaya kelebihan X = S

Gaya X = – 1 menghasilkan reaksi-reaksi perletakan:

$v = \alpha_{vS} = -1/6$ (ke bawah)

$H_s = \alpha_{hs} = +1$ (ke kanan atau tekan), $H_p = \alpha_{hl} = -1$ (tarik, ke kiri dan $V_r = \alpha_{vr} = +1/6$ (ke atas). Selanjutnya lihat daftar :

Batang	s/a	F_o/F	α	α^2 s/a F_o/F	$\epsilon' = \alpha F_o/F$
1 = X	½	1	– 1	½	–
2	1	1	– 3/4	9/16	–3/4
3	1	1	– ½	1/4	– ½
4	1	1	– 1/4	1/16	– ¼
5	1	1	+ 7/8	49/64	+ 7/8
6	1	1	+ 5/8	25/64	+5/8
7	1	1	+ 3/8	8 / 64	+ 3/8
8	1	1	+ 1/8	1/64	+ 1/8
9	2/3	2	– 1/6	1/27	– 1/3
10,12,14,16	5/6	2	+ 5/24	125/1728	+ 5/12
11,13,15,17	5/6	2	– 5/24	125/1728	– 5/12
			δ'_{xx} = 1427/432		

$\delta'_{xx} = \Sigma \, \alpha^2$ (s/a)(F_o/F) = 1427/432. Kita menghitung $\delta'_{px} = \delta_{px} EF_o/a$ di titik-titik A,B,C, R dengan robahan-robahan sudut.

Oleh karena ½ φ' = 90° – φ, maka tg $\varphi'/2$ = cotg φ = 3/4 dan

$$\text{cotg } \varphi' = \frac{1 - \text{cotg}^2 \varphi}{2 \text{ cotg } \varphi} = 7/24$$

$\Delta A = \epsilon'_{10}(\operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{cotg}\varphi') - \epsilon'_5 \operatorname{cotg}\varphi - \epsilon'_{11}\operatorname{cotg}\varphi' + \epsilon'_2 (\operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{cotg}\varphi) - \epsilon'_{11}\operatorname{cotg}\varphi - \epsilon'_{12}\operatorname{cotg}\varphi + \epsilon'_{13}(\operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{cotg}\varphi') - \epsilon'_6 \operatorname{cotg}\varphi - \epsilon'_{12}\operatorname{cotg}\varphi - \epsilon'_{13}\operatorname{cotg}\varphi' =$

$= -(2\epsilon'_2 + \epsilon'_5 + \epsilon'_6)\operatorname{cotg}\varphi = -(3/2 + 7/8 + 5/8).\ 3/4 =$

$= -9/4;\ K_a = -A = 9/4.$

Terlihat, bahwa ϵ' diagonal- diagonal saling menghapuskan, sehingga meng hasilkan pendapat secara sistematik.

$\Delta B = -(2\epsilon'_3 + \epsilon'_6 + \epsilon'_7)\operatorname{cotg}\varphi = -(1 + 5/8 + 3/8).\ 3/4 = -6/4;$ $K_b = 6/4.$

$\Delta C = -(2\epsilon'_4 + \epsilon'_7 + \epsilon'_8)\operatorname{cotg}\varphi = -(½ + 3/8 + 1/8).\ 3/4 = -3/4;$ $K_c = 3/4.$

Reaksi-reaksi perletakan terdapat : $L = 3/4\ K_a + ½\ K_b + ¼\ K_c = 21/8.$ $R = ¼\ K_a + ½\ K_b + 3/4\ K_c = 15/8.$

Jika titik L tidak bergerak (naik/turun), maka $\delta'_{px} = M/a$. Tetapi batang 9 tertekan dengan gaya $\alpha_9 = 1/6$, sehingga $(\delta'_{px})_1 = \delta_{1x} = \epsilon'_9 s_9/a = \alpha_9 (F_o/F_9)(s_9/a) = -1/3.2/3 = -2/9$, berarti **Ke atas.** Ini mengha - silkan suku koreksi yang tertulis $\Delta\delta'_{px}$

Titik	L	A	B	C	R
M/a	O	21/8	24/8	15/8	0
$\Delta\delta'_{px}$	– 2/9	– 3/4.2/9=–1/6	–½.2/9=–1/9	–¼.2/9=–1/18	0
δ'_{px}	– 2/9	59/24	26/9	131/72	0

$\delta_{xx} = 1427/432.$

Pada kedudukan P di A, terdapat $X = S_1 = 59/24.\ 432/1427\ P = 1062/1427\ P.$

$V_r^\circ = ¼\ P;\ V_r = V_r^\circ - \alpha_{vr} X = (¼ - 1/6.\ 1062/1427)\ P = 719/1427\ P.$

Pada kedudukan P di L, terdapat $X = S_1 = -2/9.\ 432/1427\ P.$ sedang $V_r^\circ = 0;$

$V_r = 0 - 1/6\ (-2/9.\ 423/1427)\ P = 16/1427.$

Ini akan kita cocokkan dengan hasil cara kedua (b), yaitu dengan V_r sebagai gaya kelebihan.

b) $X = V_r$

Susunan statis tertentu menjadi konsol vakwerk menggantung bebas di R. Mengerjakan gaya $X = -1$ (ke bawah).

Batang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10,11,12,16	11,13,15 17
s/a	½	1	1	1	1	1	1	1	2/3	5/6	5/6
F_o/F	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
α	+6	+9/2	+3	+3/2	–21/4	–15/4	–9/4	–3/4	+1	–5/4	+5/4
$\alpha^2(s/a)(F_o/F)$	18	81/4	9	9/4	441/16	226/16	81/16	9/16	4/3	125/48	125/48
$\epsilon' = (F_o/F)$	+6	+9/2	+3	+3/2	–21/4	–15/4	–9/4	–3/4	+2	–5/2	+ 5/2

$\delta'_{xx} = \epsilon\alpha^2 (s/a)(F_o/F) = 1427/12$

$\Delta L = \epsilon'_1 \operatorname{cotg}\varphi - \epsilon'_{10}\operatorname{cotg}\varphi + \epsilon'_{11}(\operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{cotg}\varphi') - \epsilon'_5 \operatorname{cotg}\varphi - \epsilon'_{10}\operatorname{cotg}\varphi' = 6.3/4 + 2.5/2\ (3/4 + 7/24) + 21/8.\ 3/4 = 655/48$

$K_1 = -655/48$ (ke atas).

$\Delta A = 2\epsilon'_2 \operatorname{cotg}\varphi - (\epsilon'_5 + \epsilon'_6)\operatorname{cotg}\varphi = (9+9).3/4 = 27/2$ (lihat cara di atas); $K = -27/2$

$\Delta B = (2\epsilon'_3 - \epsilon'_6 - \epsilon'_7)\operatorname{cotg}\varphi = (6 + 6).\ 3/4 = 9;\ K_b = -9.$

$\Delta C = (2\epsilon'_4 - a\epsilon'_7 - \epsilon'_8)\operatorname{cotg}\varphi = (3+3).\ 3/4 = 9/2;\ K_c = -9/2.$

Gaya-gaya (fiktif) K terdapat negatif, berarti bekerja ke atas. Besaran δ'_{px} didapat sebagai M/a pada balok **terjepit di R** yang dibebani dengan gaya-gaya K **ke atas,** dan dengan demikian **momen-monennya** menjadi **positip,** atau ordinat-ordinat lenturnya juga positif, yang berarti **ke bawah.** Batang 9 menghasilkan

$\delta'_{9x} = \alpha_9 (F_o/F_9)(s_9/a) = \epsilon'_9 (s_9/a) = +2.\ 2/3 = +4/3$

Sebagai suku koreksi $\Delta\delta'_{px}$ pada **semua** titik-titik L,A,B,C dan R.

Di dalam daftar berikut, kita pakai **nilai-nilai mutlaknya:**

Titik	L	A	B	C	R
Beban K	655/48	27/2	9	9/2	–
Gaya lintang Q	655/48	/48	1735/48	1951/48	
M/a	0	655/48	1958/48	3693/48	5644/48
$\Delta\delta'_{px}$	4/3=64/48	64/48	64/48	64/48	64/48
δ'_{px}	64/48	719/48	622/48	3757/48	5708/48

$\delta'_{xx} = 1427/12$

Garis pengaruh $X = V_r$ digambar secara sketsa, tidak menurut skala (menghemat ruang).

Pada kedudukan P di A terdapat,

$$X = V_r = 12/1427.\ 719/48\ P = 719/5708\ P.$$

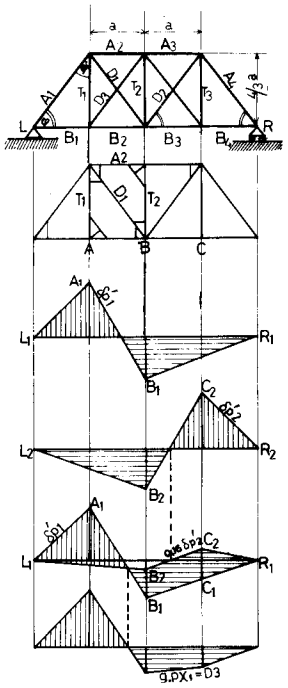
Jika P bekerja di L maka $X = V_r = 12/1427.\ 4/3P = 16/1427\ P.$

Ternyata cocok dengan pendapat-pendapat menurut cara di atas.

§ 10. Dua kotakan dengan diagonal rangkap (gb. IX.11)

Sebagai gaya-gaya kelebihan kita pilih $X_1 = D_3$ dengan faktor-faktor pengaruh α_1. dan $x_2 = D_4$ dengan α_2.

Kita ambil tg $\varphi = 4/3$; luas tampang batang-batang tepi (F_o) ada dua kalinya batang-batang dinding.



Gambar IX, 11

Batang	S/a	F_o	α_1	α_2	$\alpha_1^2\ (s/a)(F_o/F)$	$\alpha_2^2\ (s/a)(F_o/F)$	$\alpha_1\alpha_2\ (s/a)(F_o/F)$	$\epsilon' = \alpha_1\ F_o/F$
A_2	1	1	0,6	–	0,36	–	–	3/5
3	1	1	–	0,6	–	–	–	–
B_2	1	1	0,6	–	0,36	–	–	3/5
3	1	1	–	0,6	–	–	–	–
T_1	4/3	2	0,8	–	$\frac{128}{75}$	–	–	8/5
2	4/3	2	0,8	0,8	$\frac{128}{75}$	$\frac{128}{75}$	$\frac{128}{75}$	8/5
3	4/3	2	–	0,8	–	$\frac{128}{75}$	–	–
D_1	5/3	2	–1	–	$\frac{10}{3}$	–		$\frac{-10}{3}$
2	5/3	2	–	–1	–	$\frac{10}{3}$	–	–
3	5/3	2	–1	–	10/3	–		
4	5/3	2	–	–1	–	10/3		
					54/5	54/5	128/75	

$\delta'_{11} = \delta_{22} = 54/5; \quad \delta'_{12} = \delta'_{21} = 128/75.$

Kita menghitung $\delta'_{p1} = \delta_{p1}\ EF_o/a,$

jika δ_{p1} berarti ordinat lenturnya (tepi bawah) akibat dari $X_1 = -1$.

Untuk ini kita menggunakan besaran-besaran $\epsilon' = \epsilon\ EF_o = \alpha F_o/F$.

Kemudian

$$\text{cotg } \varphi = 3/4,\ \text{cotg } \varphi = 4/3,\ \text{cotg } \varphi + \text{cotg } \varphi' = 25/12$$

$$\Delta A = -\epsilon'_{t1} \text{ cotg } \varphi' + \epsilon'_{d1} (\text{cotg } \varphi + \text{cotg } \varphi) - \epsilon'_{t1} \text{ cotg } \varphi'_{b2} \text{ cotg } \varphi =$$

$$= -8/5.\ 8/3 - 10/3.25/12 - 3/5.\ 3/4 = -533/60;\ K_a = 533/60$$

$$\Delta B = \epsilon'_{b1} \text{ cotg } \varphi - \epsilon'_{d1} \text{ cotg } \varphi + \epsilon'_{a2} \text{ cotg } \varphi' - \epsilon'_{d1} \text{ cotg } \varphi'$$

$$= 8/5.4/3 + 10/3. + 10/3.25/12 + 3/5.3/4 = 27/4;\ K_b = -27/4.$$

$\Delta C = 0; \qquad K_c = 0$

Reaksi-reaksi perletakan:

$$L = 3/4\ Ka + \tfrac{1}{2} K_b = 263/60;\ R = \tfrac{1}{4} K_a + \tfrac{1}{2} K_b = -277/240$$

$(\delta'_{p1})_a = 263/80,\ (\delta'_{p1})_b = 277/120\ ;(\delta'_{p1})\,c = -277/240$

Hitungan δ'_{p2} menghasilkan pendapat-pendapat yang simetris :

$(\delta'_{p2})_a = -277/240;\ (\delta'_{p2})_b = -277/120;\ (\delta'_{p2})_c = 263/80$

$\delta'_{12} = \delta'_{21} = (\alpha_{t2})_1\,(\alpha_{t2})_2\,(t_2/a)(F_o/F_{t2}) = 128/75.$

Di dalam hitungan untuk mendapatkan X_1 dan X_2 kita menjumpai dua persamaan :

$X_1\,\delta'_{11} + X_2\,\delta'_{12} = P\,\delta'_{p1} \qquad D = \delta'_{11}\,\delta'_{22} - \delta'_{12}\,\delta'_{21}$

$X_1\,\delta'_{21} + X_2\,\delta'_{22} = P\,\delta'_{p2} \qquad D_1 = \delta'_{p1}\,\delta'_{22} - \delta'_{p2}\,\delta'_{12}$

$$X_1 = P\,\frac{D_1}{D} = P\,\frac{\delta'_{p1} - \delta'_{p2}\,(\delta'_{12}/\delta'_{22})}{\delta'_{11} - \delta'_{12}\,\delta'_{21}/\delta'_{22}} = P\,\frac{(\delta'_{p1} - 0{,}16\,\delta'_{p2}}{10{,}8 - 0{,}27 = 10{,}53}$$

$$= P.\,\frac{(\delta'_{p1} - \mu_1'\,p_2)}{\mu_2}$$

Ini berarti, bahwa garis pengaruh X_1 dapat dilukiskan oleh selisih antara ordinat garis δ'_{p1} dan ordinat garis $0{,}16\,\delta'_{p2}$ (kemudian dibagi dengan kon - stanta $\mu_2 = 10{,}53$).

Garis pengaruh X_2 berbentuk simetris terhadap garis pengaruh X_1.

Garis pengaruh gaya batang S terdapat menurut rumus :

$S = S^o - \alpha_1 X_1 - \alpha_2 X_2$ dan kemudian menjalankan cara superposisi.

$A_2 = A_2^o - (\alpha_{a2})_1\,X_1 - (\alpha_{a2})_2\,X_2;\ T_2 = T_2^o - (\alpha_{t2})_1 X_1 - (\alpha_{t2})_2 X_2,$ -

dan seterusnya.

Sebagai kontrol, kita menghitung dengan besaran-besaran

$(\delta_1^o)' = \delta_1^o\ EF_o/a = P\ \Sigma\ \alpha_1\ (s/a)(F_o/F)(S^o/P)$ dan $(\delta_2^o)' =$

$= P\Sigma\ \alpha_2\ (s/a)\ (F_o/F)\ (S^o\&/\ P\ ).$

Sebagai contoh, pembebasan sebesar P masing-masing di A dan di B :

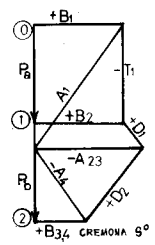
Batang	s/d	F_o / F	α_1	α_2	S^o / F	$\alpha_1\,(s/a)\,(F_o/F)\,(S^o/P)$	$\alpha_2\,(s/a)\,(F_o/F)\,(S^o/P)$
A2	1	1	3/5	–	9/8	27/40	–
3	1	1	–	3/5	9/8	–	–27/40
B2	1	1	3/5	–	15/16	9/16	–
3	1	1	–	3/5	9/16	–	27/80
T1	4/3	2	4/5	–	1	32/15	–
2	4/3	2	4/5	4/5	–	–	–
3	4/3	2	–	4/5	–	–	–
D1	5/3	2	–1	–	5/16	–25/24	–
2	5/3	2	–	–1	15/16	–	–25/8
						47/48	–277/80

$(\delta_1^o)' = P.47/48; \qquad (\delta_2^o)' = -\ P.\ 277/80$

Dengan cara di atas :

$(\delta_1^o) = P\,(\delta'_{p1})_a + P\,(\delta'_{p1})_b = P\,(263/80 - 277/120) = P.47/48.$

$(\delta_2^o)' = P\,(\alpha'_{p2})_a + P\,(\delta'_{p2})_b = -P.3/2.\ 277/120 = -P.277/80.$



Gambar IX, 12

§ 11. Vakwerk dengan sokongan.

Diagonal-diagonal serta kaki-kaki sokongan membentuk sudut 45° dengan dataran. Kekuatan X pada balok sokongan dianggap sebagai gaya kelebihan Pada umumnya X ini bekerja menekan, jadi X = –1 berarti kekuatan – menarik sebesar 1.

Kita menghitung dulu faktor-faktor yang ditimbulkan oleh X = –1. Pada bangunan sokongan terdapat (lihat VIII, § 3) :

$$\alpha_t = \text{tg } 45^\circ = 1 \quad \text{(terhadap tihang penyokong)}$$
$$\alpha_{s'} = \sec 45^\circ = \sqrt{2} \quad \text{(terhadap kaki)}$$
$$\alpha_s = +1$$

Gaya-gaya sebesar $\alpha_t = 1$ ini bekerja ke bawah terhadap bangu – nan vekwerk (jadi membebaninya yang menimbulkan garis-garis momen - M' (positif dan gaya-gaya lintang Q' pada susunan statis tertentu (gambar IX,12b dan c). Dengan perantaraan garis-garis ini, kita dapat menentukan faktor-faktor terhadap vakwerk. Untuk lengkapnya juga digambar Cremona pada X = – 1, di mana nilai-nilai α boleh terlihat pula (gambar IX,12 d).

$$\delta_{xx} = \Sigma \alpha^2 \frac{s}{EF} = 40\frac{\lambda}{EF_a} + 36\frac{\lambda}{EF_b} + 8\frac{\lambda\sqrt{2}}{EF_d} + 2\frac{t}{EF_t} + 4\frac{s'}{EF'} + \frac{s}{EF_s}$$

Untuk menentukan garis pengaruh X kita menggambar Williot sebagai akibat dari X = – 1 tadi. Turunnya titik-titik hubungan di masing-masing tempat melukiskan ordinat δ_{xp} atau ordinat X.

Tentang vakwerk dengan kabel lihat VIII, § 12

§ 12. Rasuk paralel dengan gantungan bawah disertai diagonal rangkap (gb. IX,13)

Diagonal-diagonal berserong menurut sudut

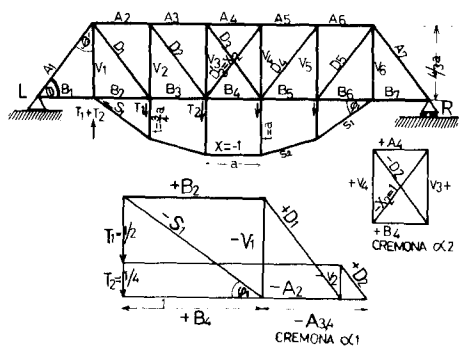
$$\text{Tg } \varphi = 4/3;\ \text{tg } \varphi' = 3/4 = \text{tg } \varphi_1.$$

Sebagai gaya-gaya kelebihan kita pilih :

S_1 = H, yaitu komponenta mendatarnya gaya-gantungan

$X_2 = D3$

Btg.	α_1	α_2
A2,6	–9/16	–
3,5	–3/4	–
4	–3/4	+ 3/5
B 2,6	+ 1	–
3,5	+ 25/16	–
4	+ 7/4	+ 3/5
V 1,6	–3/4	–
2,5	–1/4	
3,4	0	+ 3/5
D 1,5	+ 15/16	–
2,4	+ 5/16	–
3,3'	0	–1
S 1,5	– 5/4	–
2,4	$-\sqrt{17}/16$	–
3	–1	–
T 1,4	+½	–
2,3	+¼	–



Gambar IX. 13

Bagian gantungan : $\text{tg } \varphi_1 = 3/4$; $\text{tg } \varphi_2 = ¼$

$(\alpha_{t1})_1 = \text{tg } \varphi_1 - \text{tg } \varphi_2 = ½$; $(\alpha_{t2})_1 = \text{tg } \varphi_2 = ¼$.

$(\alpha_{s1})_1 = -\sec \varphi_1 = -5/4$; $(\alpha_{s2})_1 = -\sec \varphi_2 = \sqrt{17}/16$; $(\alpha_{s3})_1 = -1$

X_1 = – menimbulkan gaya-gaya T yang membebani vakwerk (bekerja ke bawah).

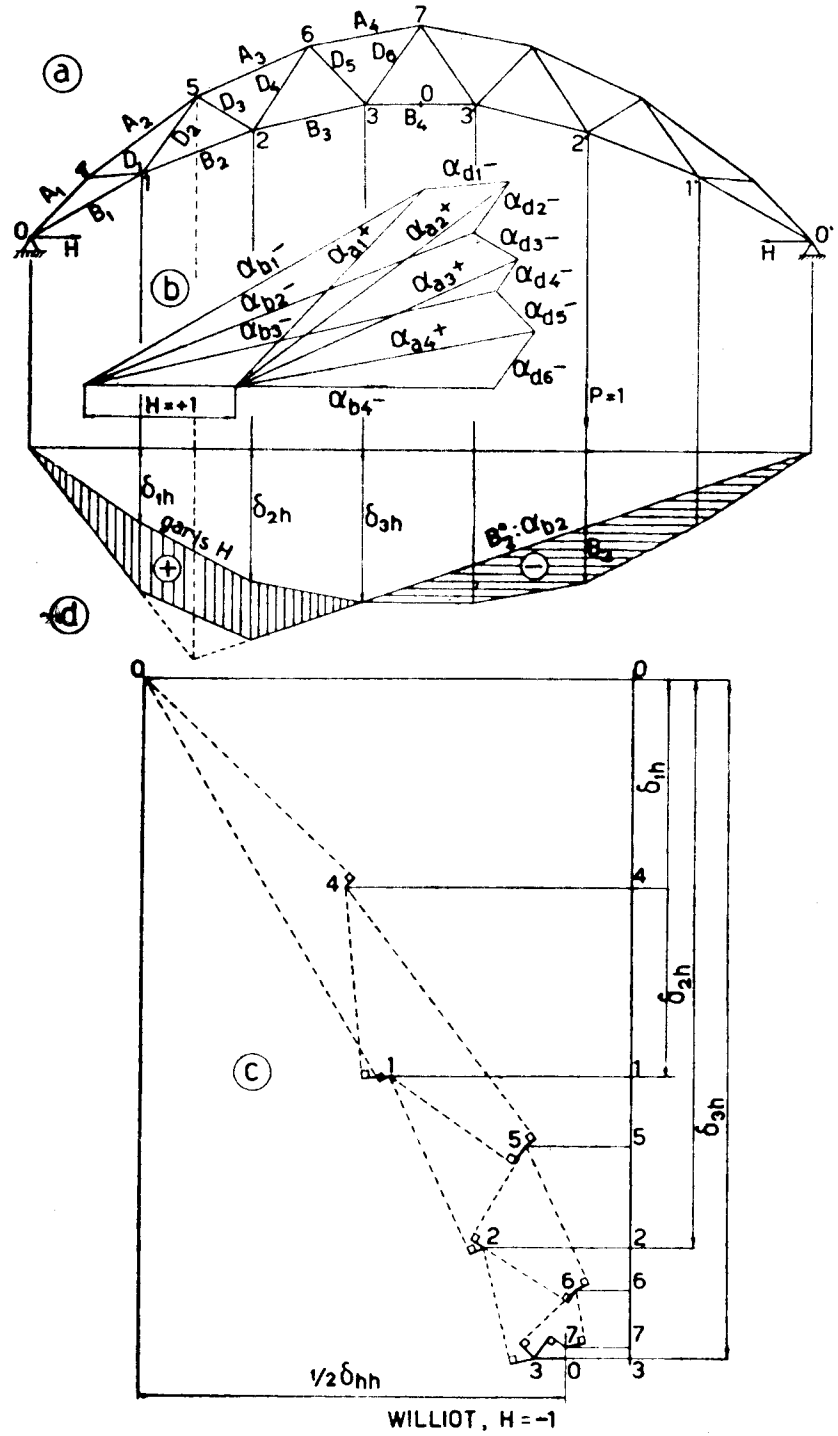
Ini menghasilkan gaya-gaya tarik pada tepi bawah dan tekan pada tepi atas. Di samping itu masih ada komponenta mendatar dari S_1 dan S_5 sebesar + 1 – yang menambah gaya-gaya tarik pada batang-batang B_2 s/d B_6 (VIII, § 12 – akhir).

§ 13. Pelengkung vakwerk dua sendi.

Seperti biasa, komponen reaksi perletakan mendatar H diambil sebagai gaya statis kelebihan. Perletakan kiri diganti dengan rol dan di situ kita mengadakan kekuatan mendatar = 1 ke arah luar (H = – 1). Cremona yang disebabkan oleh ini menghasilkan besaran-besaran α (gambar IX,14) Sesudah ini kita menggambar Williot-nya (gambar IX, 10c); berdasarkan atas alasan simetris garis 07 pada vakwerk tetap tinggal vertikal yang juga terdapat pada gambar Williot, $03 = \frac{1}{2}\Delta b_4 = \frac{1}{2}\alpha b_4 \frac{b_4}{EF_{b4}}$. Dari titik-titik - 3 menarik garis-garis yang melukiskan $\Delta b_3 = \alpha_{b3} \frac{b_3}{EF_{b2}}$, $\Delta d_5 = \alpha_{d5} \frac{d_5}{EF_{d5}}$ dan $\Delta d_6 = \alpha_{d6} \frac{d_6}{EF_{d6}}$ Dari ujung garis terakhir ini kita menarik garis siku terhadapnya yang memotong garis vertikal melalui 0 di titik 7. Kemudian dari titik 7 menarik garis $\Delta a_4 = \alpha_{a4} \frac{a_4}{EF_{a4}}$. Dari ujung garis-inikita menarik garis sikunya yang memotong garis siku dari ujung Δd_5 di titik 6. dan seterusnya. Dengan begitu terdapat titik-titik 2, 5, 1, 4 dan 0 Pada hakekatnya titik 0 tak beralih; letak titik-titik 1 s/d 7 itu menunjukkan peralihan-peralinannya vertikal terhadap titik 0, jadi besaran-besaran δ_{1h}, δ_{2h}, δ_{7h}. Oleh karena muatan dianggap bekerja di titik-titik hubungan bawah (1, 2, 3, 3′, 2′, 1′) maka yang akan kita pakai hanya δ_{1h}, δ_{2h}, δ_{3h} d.s.t.

Jarak mendatar antara titik 0 dan titik o pada gambar Williot, melukiskan besaran $\frac{1}{2}\delta_{hh}$ dan dengan begitu ordinat-ordinat garis pengaruh H di bawah titik-titik hubungan 1, 2, 3 – terketahui, yaitu berturut-turut-

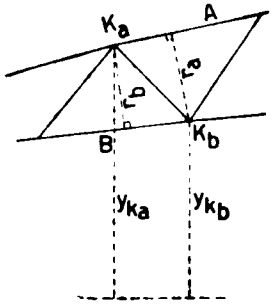
$\frac{\delta_{1h}}{\delta_{hh}}, \frac{\delta_{2h}}{\delta_{hh}}, \frac{\delta_{3h}}{\delta_{hh}}$ ordinat-ordinat H ini digambar pada gambar IX,14 menurut sesuatu skala.



Gambar IX, 14

Setelah itu, kita masih memerlukan garis-garis pengaruh gaya batang vakwerk pada susunan statis-tertentu, yaitu S^o (umpamanya A^o, B^o, dst). Oleh karena $S = S^o - \alpha H = \alpha\left(\frac{S_o}{\alpha} - H\right)$ kita dapat mengadakan kombinasi antara bidang pengaruh H dan bidang-pengaruh $\frac{S^o}{\alpha}$ di mana α itu untuk sesuatu gaya batang S^o bernilai tetap. Pada gambar IX, 14d tergambar sebagai contoh garis-pengaruh $\frac{B^o_2}{\alpha b_2}$, dan ordinat antara garis ini dan garis H (jadi dengan ngan multiplikator α_{b_2}) setelah dilipat dengan α_{b_2} melukiskan ordinat - pengaruh B_2.

Seperti telah diketahui, garis-pengaruh B^o_2 berjalan serupa dengan garis-pengaruh M^o_5 yang berbentuk segi-tiga. Hanya saja di sini bidang segitiga ini harus dipapakkan antara titik-titik 1 dan 2 oleh karena muatan bekerja di titik-titik hubungan bawah (di antara mana titik-titik 1 dan 2).



Gambar IX, 15

Hitungan secara analisis dapat dipermudah jika deformasi pada batang-batang dinding (diagonal dan vertikal) diabaikan (ini analogos dengan mengabaikan geseran pada busur penuh atau massif)

H = – 1 menimbulkan momen-momen +

$+ y_{ka}$ dan $+ y_{kb}$

$\alpha_a = -\frac{y_{kb}}{r_a}$; $\alpha_b = +\frac{y_{ka}}{r_b}$ dan jika s = panjang batang pada umumnya

maka : $\Delta s = \alpha \frac{s}{EF} = y_k \frac{s}{EFr}$

$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r} = y_k \frac{s}{EFr^2} = y_k . k$ jika $k = \frac{s}{EFr^2}$ yang kita sebut *berat titik hubungan*.

$\delta_{hh} = \Sigma y_k . \Delta\varphi = \Sigma y_k^2 . k$ (bandingkan $\delta_{hh} = \int y^2 dw$ pada busur penuh).

Pada susunan statis tertentu kita mendapat : $S_o = \frac{M^o_k}{r}$

$$\Delta s^o = \frac{M^o_k}{r}\frac{s}{EF} ; \Delta\varphi_o \frac{\Delta s_o}{r} = \frac{M^o_k . s}{EFr^2}$$

$$\Sigma P\delta_{hp} = \delta^o_h = \Sigma y_k \Delta\varphi^o = \Sigma M^o_k y_k \frac{s}{EFr^2} = \Sigma M^o_k y_k . k$$

Pada muatan P sejauh a dari perletakan kiri kita mendapat seperti terulang-ulang ditulis :

$$M^o_{x<a} = \frac{l-a}{l} xP \text{ dan } M^o_{x>a} = \frac{a}{l}(l-x)P$$

$$\delta_{hp} = \sum_o^a \frac{x}{l}(l-a)y_k k + \sum_a^l \frac{a}{l}(l-x)y_k . k$$

Jika $y_k . k$ dianggap sebagai muatan yang bekerja di masing-masing titik-hubungan, maka δ_{hp} berarti ordinat garis momen pada muatan ini, di bawah titik pegangan P. Selanjutnya δ_{hh} berarti statis-momen dari muatan-muatan sebesar $y_k . k$ ini yang dianggap bekerja mendatar, terhadap garis kerjanya H yang mendatar pula; jadi $\delta_{hh} = \Sigma y_k^2 . k$.

$H = \frac{\Sigma M^o_k y_k . k}{\Sigma y_k^2 . k}$, yang menunjukkan keadaan analogos dengan busur biasa.

§ 14. Contoh Sederhana.

Rangka payon dua sendi, terdiri dari dua segitiga.

Bentang LR = 2a; $tg\varphi_1 = 3/4$; $tg\varphi_2 = 5/12$

AB = (3/4 – 5/12)a = a/3; LA = 5/4 a ; LB = 13/12 a.

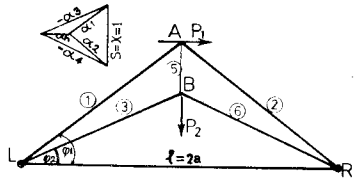
Sebagai gaya kelebihan X = S_5 (batang AB), sebab bangunan simetris terhadap garis AB ini.

Batang atau gaya	s/a	α	S^o/P_1	S^o/P_2
1	5/4	5/6	– 5/8	0
2	5/4	5/6	5/8	0
3	13/12	–13/10	0	–13/10
4	13/12	–13/10	0	–13/10
S=X	1/3	–1	–	–
H_1	–	8/15	– ½	+6/5
H_r	–	8/15	+ ½	+6/5
V_1	–	–	–3/8	+ ½
V_r	–	–	+3/8	+ ½

$\delta'_{xx} = \Sigma \alpha^2 (s/a) (F_o/F)$

$(\delta^\circ_x)' = \Sigma \alpha (s/a) F_o/F) S^\circ$

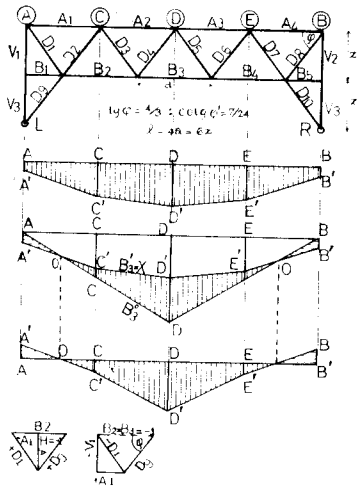
$S = S^\circ \quad \alpha x.$



Gambar IX, 16

§ 15. Portal vakwerk dua sendi (gb. IX, 17)
Jika kita memilih H = X sebagai gaya kelebihan, maka susunan statis tertentu menjadi portal di atas sendi dan nol. Oleh karena keadaan simetris, kita juga boleh ambil B_3 = X sebagai statis kelebihan, dan susunan statis tertentu menjadi portal tiga sendi (L, D dan R). Kita akan mempelajari kedua-dua cara ini dengan ketentuan-ketentuan.

a. $tg\varphi = 4/3$; F_o = luas tampang batang-batang pararel = 2 kali luas tampang batang-batang lainnya.
Daftar hasil dari H = 1 (ke luar).



Gambar IX, 17

Batang	A 1,2	B 2,3	V 1,3	D 1,9
s/a	1	1	2/3	5/6
F_o/F	1	1	2	2
α	– 1	+ 2	– 4/3	+5/3
$\alpha^2 (s/a)(F_o/F)$	1	4	64/27	125/27
$\epsilon' = F_o/F$	1	+ 2	– 8/3	+ 10/3

$\delta' xx = \delta' hh = \Sigma \alpha^2 (s/a) (F_o/F) = 44.$

Gaya H tidak menghasilkan reaksi-reaksi perletakan vertikal (di sini kita mengerjakan H = 1 ke arah luar). Kita mempelajari potongan yang melintasi tiga batang A,D dan B yang gaya-gayanya mengimbangi H//A//B.
Gaya batang D adalah satu-satunya yang menghasilkan komponenta ⊥ H sehingga tak dapat diimbangi oleh gaya/lainnya. Ini berarti, bahwa batang diagonal itu **inaktif** (Ritter, Culmann).

Juga dapat diterangkan demikian; oleh karena simetris $D_4 = D_5$ sehingga menghasilkan resultante vertikal sedang A_2 dan A_3 mendatar; jadi tak ada yang dapat mengimbanginya atau $D_4 = D_5 = 0$; Kemudian terdapat pula bahwa $D_3 = 0$ berdasarkan keseimbangan di titik ujung-bawahnya ($D_4 = 0$, dan B_3 mendatar), dan seterusnya.

Menentukan perjalanannya garis-pengaruh H dengan perantara robahan – robahan sudut pada tepi-atas (beban dianggap bekerja di tepi-atas).

$\gamma_c = \epsilon'_{d1} (\cot g \varphi + \cot g \varphi') - \epsilon'_{a1} \cot g \varphi + \epsilon'_{b2}.2 \cot g \varphi - \epsilon'_{a2} \cot g \varphi$

$= 10/3. 25/12 + 1.3/4 + 2.362 + .3/4 = 278/36 = K_c$

$\frac{1}{2} \gamma_d = - \epsilon'_{a2} \cot g \varphi + \epsilon'_{b3} \cot g \varphi = 3/4 + 3/2 = 9/4 = \frac{1}{2} K_d = 81/36.$

Titik	A	C	D
Beban K	–	287/36	2.81/36
Gaya lintang Q	368/36	81/36	
M / a	–	368/36	449/36
$\Delta \delta'_{ph} = 2\epsilon'_{v1} z/a =$	32/9=128/36	128/36	128/36
δ'_{ph}	128/36	496/36	577/36

Jika titik-titik A dan B itu tidak naik/turun, maka M/a melukiskan besaran δ'_{ph} (berdasarkan $\delta'_{ah} = \delta'_{bh} = 0$). Keadaan tidak demikian oleh karena batang-batang LA dan RB **tertekan** sehingga titik-titik A dan B **turun**, masing-masing sejauh.

$\Delta \delta_{ph} = (\alpha_{v1} + \alpha_{v3}) z/EF_v$ dan $\Delta \delta'_{ph} = \Delta \delta_{ph} EF_o/a = 2 \alpha_{v1} (z/a)(F_o/F_v)$

$= 2 \epsilon'$ V1 z/a. $= 2.4/3. 2. 2/3 = 32/9$. Dan ini harus ditambahkan pada hasil-hasil M/a di dalam daftar.

Pada P berdiri di A umpamanya, terdapat $H = P. \delta'_{ah} / \delta'_{hh} = P.32/9.1/44$

$= 8/99 P = - 16/99 P.$

Jika P berdiri di C, maka $H = P \delta'_{ch} / \delta'_{hh} = P. 496/36. 1/44 = 31/99 P.$

$B_3 = B^\circ_3 - \alpha_{b3} H = P (3/4 - 2.31/99) = 49/393 P.$

b) Gaya batang B_3 sebagai statis kelebihan;

Kita tulis $B_3 = B_3^\circ + X$.

Daftar hasil dari akibat $B_3 = -1$

Gaya	A1,2	B2	B3	V1,3	D1,9	H
s/a	1	1	1	2/3	5/6	–
F_o / F	1	1	1	2	2	
α	+ ½	– 1	– 1	+ 2/3	– 5/6	+ 2
$\alpha^2(s/a)(F_o/F)$	¼	1	1	16/27	125/48	–
$\epsilon' = F_o / F$	+ ½	– 1	– 1	+ 4/3	– 5/3	

$\delta'_{xx} = \Sigma^2 \alpha (s/a)(F_o / F) = 11$

Terlihat bahwa sekarang α dan ϵ' menjadi – ½ nya di atas, dan sebagai konsekwensinya, δ' xx menjadi ¼ nya.

Ini berarti juga, bahwa $\Delta\gamma$ dan δ'_{ph} menjadi – ½ nya, jadi tak perlu meng ngulangi hitungannya. Hanya harus dimengerti, bahwa tepi-atas melentur **ke atas** sedang titik-titik A dan B masing-masing **naik** juga (batang - batang LA dan RB tertarik).

Titik	A	C	D
δ'_{px}	-16/9	–496/72	–577/72

Kita cocokkan dengan pendapat-pendapat menurut cara di atas.

P di A; $X = P\,\delta'_{ax} / \delta'_{xx} / = -P.\ 16/9.\ 1/11 = -16/99$ P.

$B_3 = B_3^\circ + X = 0 - 16/99\ P = -16/99$ P; $H = -\alpha_h X = ½.\ 16/99P$

$= + 8/99$ P.

P di C; $X = P\,\delta'_{cx} / \delta'_{xx} = -P.\ 496/72.\ 1/11 = -62/99$ P.

$B_3 = B_3^\circ + X = P\,(3/4 - 62/99) = 49/396$ P; $H = -\alpha_h X = + ½.\ 62/99$ P

$= + 31/99$ P.

Kita juga boleh menggunakan cara dengan $(\delta_x^\circ) = \Sigma\,\alpha\,(s/a)\,(F_o/F)\,S^\circ$

Untuk mudahnya, kita mengambil dua beban masing-masing sebesar P di C dan di E (simetris) dan kemudian membagi hasil-hasilnya dengan dua.

Pada kedudukan demikian, yang bekerja hanya deret-batang L C E R dengan hasil-hasil :

$A_2^\circ = A_3^\circ = -3/4$ P; $D_9^\circ = D_{10}^\circ = -5/4$ P.

Pada pembebanan P di C saja, kita ambil ½ nya, yaitu hanya mengambil A_2° dan D_9° saja ($\alpha_{d2} = 0$).

$(\delta_x^\circ)' = \alpha_{a2}\,(a_2/a)(F_o/F_{a2})\,A_2^\circ + \alpha_{d9}\,(s_{do}/a)(F_o/F_{d9})\,D_9^\circ =$

$= (-½.1.1.3/4 + 5/6.5/6.\ 2.\ 5/4)\ P = 49/36$ P dan $\delta'_{xx} = 11$

$B_3 = 1/11.\ 49/36$ P $= 49/396$ P.

Ternyata, bahwa besaran-besaran δ'_{px} itu tidak mendapatkan ordinat ordinat pengaruhnya B_3 melainkan gaya X, dan nanti terdapat $B_3 = B_3^\circ + X$.

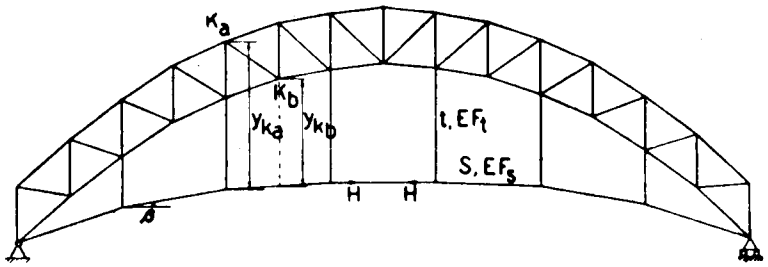
Jadi garis-pengaruh B_3 tercapai sebagai superposisi dari garis-garis pengaruh B_3° dan X.

Ini dapat dijelaskan, bahwa besaran-besaran δ'_{px} itu terdapat negatif (lenturan ke atas) sehingga $P\,\delta'_{px} / \delta'_{xx}$ juga negatif. Akan tetapi ini - tidak sesuai dengan sifat batang B_3 sebagai batang-tepi bawah yang pada umumnya **tertarik** oleh pembebanan biasa (vertikal ke bawah). Jadi yang negatif itu ialah besaran X.

Juga cara hitungan lenturan rasuk vakwerk berdasarkan robahan-robahan batang B_3 dihapus dan diganti dengan gaya-gaya –1, jadi segitiga di bawah titik D itu tidak ada lagi.

§ 16. Batang-tarik menukik tergantung.

Sebagai gaya statis kelebihan kita pilih komponen-mendatarnya gaya batang penarik, yaitu H.



Gambar IX, 18

Faktor-faktor pengaruh dari H = – 1 terhadap gantungan ada :

$\alpha_s = \sec\beta$ dan $\alpha_t = \Delta \operatorname{tg}\beta$ (di mana $\Delta \operatorname{tg}\beta$ bernilai negatif).

Faktor-faktor pengaruh α terhadap vakwerk dapat ditentukan dengan Cremona pada H = – 1 tadi.

$$\delta_{hh} = \sum_{vakwerk} \alpha^2 \frac{s}{EF} + \sum \sec^2\beta \frac{s}{EF_s} + \sum (\Delta \operatorname{tg}\beta)^2 \frac{t}{EF_t}$$

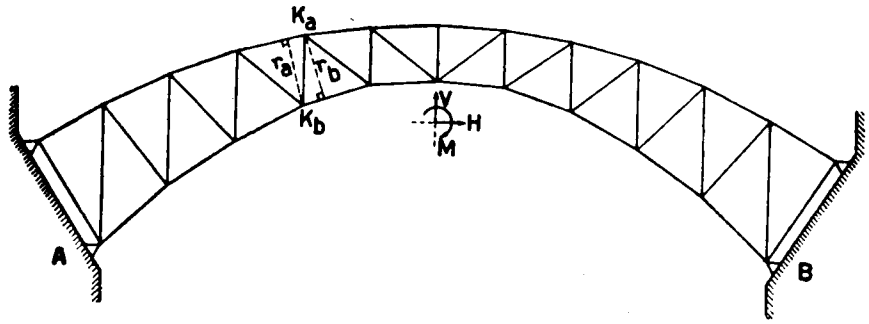
Jika seperti di atas demormasi pada diagonal dan vertikal diabaikan pula, menjadi

$$\delta_{hh} = \sum y_k^2 . k + \sum \sec^2\beta \frac{s}{EF_s} + \sum (\Delta \operatorname{tg}\beta)^2 \frac{t}{EF_t}$$

Di sini kita harus ingat, bahwa ordinat-ordinat y_K harus diukur dari sumbu batang-tarik. Selanjutnya, bandingkan dengan VIII, § 17.

§ 17. Pelengkung vakwerk terjepit.

Seperti pada busur biasa susunan dasar atau susunan statis tertentu tercapai jika salah satu perletakan kita hapuskan dan dengan begitu mendapat busur terjepit sebelah. Faktor-faktor pengaruh terhadap gaya-batang vakwerk berasal dah H, V dan M adalah berturut-turut α_h, α_v dan α_m.



Gambar IX, 19

$$\alpha_h = \frac{1}{r} y_k ; \alpha_v = -\frac{1}{r} x_k ; \alpha_m = -\frac{1}{r}$$

$$S^o = \frac{1}{r} M_k^o$$

$$S = \frac{1}{r}(M_k^o - Hy_k + Vx_k + M)$$

$$\delta_{hh} = \sum \alpha_h^2 \frac{s}{EF} ; \delta_{hv} = \delta_{vh} = \sum \alpha_h . \alpha_v \frac{s}{EF} ; \delta'_{hm} = \varphi'_{mh} = \sum \alpha_h . \alpha_m . \frac{s}{EF}$$

$$\delta_{vv} = \sum \alpha_v^2 \frac{s}{EF} ; \delta'_{vm} = \varphi'_{mv} = \sum \alpha_v . \alpha_m \frac{s}{EF}$$

$$\varphi_{mm} = \sum \alpha_m^2 \frac{s}{EF}$$

$$H\delta_{hh} + V\delta_{hv} + M\delta'_{hm} = \sum \alpha_h S^o \frac{s}{EF} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$H\delta_{vh} + V\delta_{vv} + M\delta'_{vm} = \sum \alpha_v S^o \frac{s}{EF} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$H\varphi'_{mh} + V\varphi'_{mv} + M\varphi_{mm} = \sum \alpha_m S^o \frac{s}{EF} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Seperti pada busur terjepit penuh diusahakan supaya :

$$\delta_{hv} = \delta_{vh} = \sum -\frac{1}{r^2} y_k x_k \frac{s}{EF} = o, \text{ jadi } \sum x_k y_k k = o \text{ jika } \frac{s}{EFr^2} = k$$

$$\delta'_{hm} = \varphi'_{mh} = o ; \sum y_k\, k = o$$
$$\delta'_{vm} = \varphi'_{mv} = o ; \sum x_k . k = o$$

Ini berarti memindah titik-asal susunan koordinat XOY ke titik-beratnya jumlah berat titik-titik hubungan k, jadi sumbu-sumbu X dan Y menjadi sumbu-inersia pokok. Oleh karena bangunan simetris vertikal, titik 0 ini terletak di atas garis simetris vertikal pada bangunan. Tingginya-

terhadap garis AB adalah y_o'. Jika y_k' itu ordinat titik hubungan terhadap AB, maka terdapat :

$$y_o' = \frac{\Sigma\, y_k' k}{\Sigma\, k}$$

Setelah tercapai ini, persamaan-persamaan deformasi di atas menjadi:

$$H\delta_{hh} = \Sigma\, \alpha_h S^o k;\; H = \frac{\Sigma\, y_k M^o k}{\Sigma\, y_k^2 . k} = \frac{\Sigma\, P . \delta_{hp}}{\delta_{hh}}$$

$$V\delta_{vv} = \Sigma\, \alpha_v S^o k;\; V = \frac{\Sigma\, x_k M^o k}{\Sigma\, x_k^2 . k} = \frac{\Sigma\, P . \delta_{vp}}{\delta_{vv}}$$

$$M\varphi_{mm} = \Sigma\, \alpha_m S^o k;\; M = \frac{\Sigma\, M^o . k}{\Sigma\, k} = \frac{\Sigma\, P\varphi_{mp}'}{\Sigma\, \varphi_{mm}}$$

Bandingkanlah dengan rumus-rumus pelengkung biasa yang terjepit.

$$H = \frac{\int M_x^o y dw}{(1+u)\int y^2 dw} \text{ dengan } dw = \frac{ds}{EI}$$

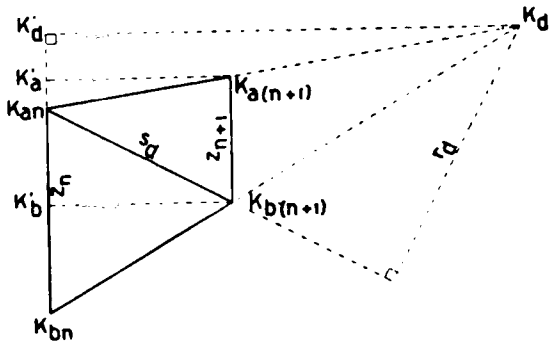
$$V = \frac{-\int M_x^o x dw}{\int x^2 dw}$$

$$M = \frac{-\int M_x^o dw}{\int dw}$$

Untuk batang tepi atas, x_k dan y_k berarti koordinat titik hubungan K_b dan untuk batang tepi bawah, titik-hubungan K_a (lihat § 15)

Koordinat-koordinat ini serta r_a dan r_b mudah didapat di gambar bangunan. Akan tetapi untuk batang-batang dinding (diagonal dan vertikal) besaran besaran ini tak mudah mendapatnya.

a. Menghitung besaran-besaran yang mengenai batang-diagonal K_d adalah titik-hubungan yang bersangkutan dengan batang-diagonal s_d, yaitu titik potong antara batang-atas dan batang bawah.



Gambar IX, 20

K_{an} mempunyai koordinat-koordinat x_{an} dan y_{an}
K_{bn} mempunyai koordinat-koordinat x_{bn} dan y_{bn}
$K_{a(n+1)}$ mempunyai koordinat-koordinat $x_{a(n+1)}$ dan $y_{a(n+1)}$
$K_{b(n+1)}$ mempunyai koordinat-koordinat $x_{b(n+1)}$ dan $y_{b(n+1)}$
K_d mempunyai koordinat-koordinat x_{kd} dan y_{kd}

$$K_{an}K_{bn} = z_n = y_{an} - y_{bn}$$

$$K_{a(n+1)}\, K_{b(n+1)} = z_{n+1} = y_{a(n+1)} - y_{b(n+1)}$$

$$x_{an} = x_{bn} = x_n;\; x_{a(n+1)} = x_{b(n+1)} = x_{n+1}$$

$$z_{n+1} : z_n = (x_{kd} - x_{n+1}) : (x_{kd} - x_n)$$

$$(y_{a(n+1)} - y_{b(n+1)}) : (y_{an} - y_{bn}) = (x_{kd} - x_{n+1}) : (x_{kd} - x_n)$$

$$x_{kd}z_n - x_{n+1}z_n = x_{kd}z_{n+1} - x_n z_{n+1}$$

$$x_{kd}(z_n - z_{n+1}) = x_{n+1}z_n - x_n z_{n+1}$$

$$x_{kd} = \frac{x_{n+1}z_n - x_n z_{n+1}}{z_n - z_{n+1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$K_a'K_{an} : K_b'K_{bn} = K_d'K_{an} : K_d'K_{bn}$$

$$(y_{a(n+1)} - y_{an}) : (y_{b(n+1)} - y_{bn}) = (y_{kd} - y_{an}) : (y_{kd} - y_{bn})$$

$$\Delta y_a : \Delta y_b = (y_{kd} - y_{an}) : (y_{kd} - y_{bn})$$

$$y_{kd}\Delta y_a - y_{bn}\Delta y_a = y_{kd}\Delta y_b - y_{an}\Delta y_b$$

$$y_{kd} = \frac{\Delta y_b - \Delta y_a}{y_{an}\Delta y_b - y_{bn}\Delta y_a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$r_d s_d = z_{n+1}(x_{kd} - x_n) = 2 \text{ luas } \Delta K_d' K_{an} K_{b(n+1)}$$

$$r_d = \frac{s_d}{z_{n+1}(x_{kd} - x_n)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$k_d = \frac{s_d}{EF r_d^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Jadi jika mengenai diagonal, untuk besaran-besaran x_k, y_k, k, s dan EF harus diisi: x_{kd}, y_{kd}, k_d, s_d dan EF_d seperti ditentukan di atas ini.

b. Besaran-besaran tentang batang-tegak atau vertikal. Titik-hubungan untuk batang tegak ini ialah titik potongan antara tepi atas dan tepi bawah yagn mengapitnya, yaitu titik K_v menurut gambar IX, 21 dengan koordinat-koordinat:

x_{kv} dan y_{kv}.

$$x_a = x_b = x_k$$

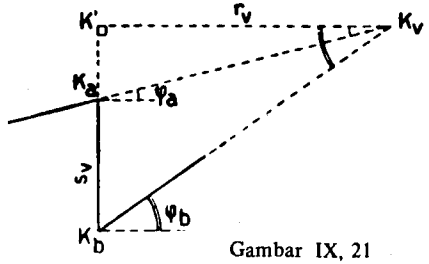
$$K_aK_b = K'K_b - K'K_a =$$

$$= K_vK' \operatorname{tg}\varphi_b - K_vK' \operatorname{tg}\varphi_a$$

$$s_v = (x_{kv} - x_k)(\operatorname{tg}\varphi_b - \operatorname{tg}\varphi_a)$$

$$x_{kv}(\operatorname{tg}\varphi_b - \operatorname{tg}\varphi_a) =$$

$$= s_v + x_k(\operatorname{tg}\varphi_b - \operatorname{tg}\varphi_a)$$



Gambar IX, 21

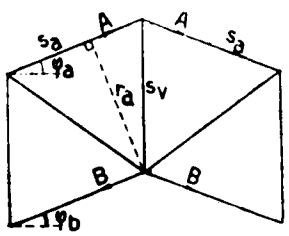
$$x_{kv} = x_k + \frac{s_v}{\operatorname{tg}\varphi_b - \operatorname{tg}\varphi_a} \quad \ldots\ (1)$$

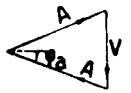
$$K'K_a = y_{kv} - y_a = (x_{kv} - x_k)\operatorname{tg}\varphi_a$$

$$y_{kv} = y_a + (x_{kv} - x_k)\operatorname{tg}\varphi_a \quad \ldots\ (2)$$

$$r_v = x_{kv} - x_k = \frac{s_v}{\operatorname{tg}\varphi_b - \operatorname{tg}\varphi_a} \quad \ldots\ (3)$$

$$k_v = \frac{s_v}{EF_v r^2} \quad \ldots\ (4)$$





Gambar IX, 21a

Untuk batang-tegak tengah kita menghitung demikian: (gambar IX, 21 a)

Gaya-batang vertikal $V = 2A \sin\varphi_a$

$$w_a = \frac{s_a}{EF_a} \; ; \; w_v = \frac{s_v}{EF_v}$$

Pekerjaan robahan-bangun pada batang-batang s_a dan s_v terdapat

$$\Delta U = 2A^2 \frac{s_a}{2EF_a} + V^2 \frac{s_v}{2EF_v}$$

$$\Delta U = A^2 w_a + \tfrac{1}{2} V^2 w_v = A^2 w_a + 2A^2 w_v \sin^2\varphi_a = A^2(w_a + \Delta w_a)$$

$$\Delta w_a = 2w_v \sin^2\varphi_a$$

$$k_a = \frac{s_a}{EF_a r_a^2} = \frac{w_a}{r_a^2} \; ; \Delta k_a = \frac{\Delta w_a}{r_a^2} = 2\frac{w_v}{r_a^2}\sin^2\varphi_a$$

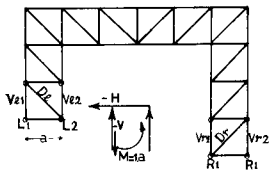
$$k_a' = k_a + \Delta k_a = \frac{1}{r_a^2}(w_a + 2w_v \sin^2\varphi_a) = \mathrm{ka}\,(1+\mu)$$

dengan $\mu = 2\,(\mathrm{sv/sa})\,(\mathrm{Fa/Fy})$

Jadi nanti di dalam hitungan, nilai-nilai k_a untuk batang-batang tepi-atas di tengah-tengah bangunan, diganti dengan k_a' seperti terdapat di atas ini. (yaitu dikalikan dengan $1 + \mu$)

§ 18. Contoh portal-jepit tak simetris.

Perletakan yang terdiri dari tiga pendel non-konkuren itu sudah stabil dan boleh disamakan dengan **perletakan jepit**.



Gambar IX, 22

Bangunan pada gambar ini boleh dianggap seperti diletakkan di atas **enam pendel**, tiga dikiri dan tiga di kanan Dengan demikian ekivalen dengan de-

ngan diletakkan pada **dua jepitan**, jadi bersifat statis tak tertentu berganda tiga. Berdasarkan atas ini, maka kita menganggap gaya batang-batang V11, V_{12} dan D_1 sebagai statis kelebihan, tertulis : $X_1 = V_{11}$; $X_2 = V_{12}$; $X_3 = D_1$

Faktor-faktor pengaruh-dalam adalah:

$(\alpha_o)_1$ berasal dari $X_1 = -1$

$(\alpha_o)_2$ berasal dari $x_2 = -1$

$(\alpha_o)_3$ berasal dari $x_3 = -1$

$\delta'_{11} = \delta_{11}\,EF_o/a = \Sigma\,(\alpha_o)_1^2\,(s/a)\,(F_o/F)$;

$\delta'_{22} = \Sigma\,(\alpha_o)_2^2\,(s/a)\,(F_o/F)$;

$\delta'_{33} = \Sigma\,(\alpha)_3^2\,(s/a)(F_o/F)$;

$\delta'_{12} = \delta'_{21} = (\alpha)_1\,(\alpha)_2\,(s/a)\,(F_o/F)$; $\delta'_{13} = \delta'_{31} = \Sigma\ (\alpha)_1(\alpha)_3\,(s/a)(F_o/F)$;

$\delta'_{23} = \delta'_{32} = \Sigma\,(\alpha)_2(\alpha)_3(s/a)(F_o/F)$.

Sebagai akibat dari pembebanan terdapat :

$(\delta\,{}^{\circ}_{1})' = \delta^{\circ}_1\,EF_0/F = \Sigma\,(\alpha)_1\,(s/a)(F_o/F)S^{\circ}$; $(\delta^{\circ}_2)' = \Sigma\,(\alpha)_2(s/a)(F_o/F)S^{\circ}$;

$(\delta\,{}^{\circ}_{3})' = \Sigma\,(\alpha)3\,(s/a)\,(F_o/F)\,S^{\circ}$

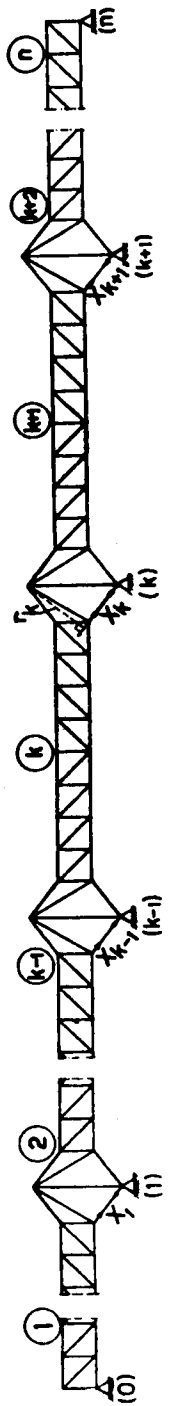
Kemudian memecahkan persamaan-persamaan:

$$\left.\begin{aligned} X_1\delta'_{11} + X_2\delta'_{12} + X_3\delta'_{13} &= (\delta^{\circ}_1)' \ldots (1)\\ X_1\delta'_{21} + X_2\delta'_{22} + X_3\delta'_{23} &= (\delta^{\circ}_2)' \ldots (2)\\ X_1\delta'_{31} + X_3\delta'_{32} + X_3\delta'_{33} &= (\delta^{\circ}_3)' \ldots (3) \end{aligned}\right\| \quad S = S^{\circ} = (\alpha)_1X_1 - (\alpha)_2X_2 - (\alpha)_3X_3$$

V_{11} dan V_{12} sebagai gaya-gaya batang-tepi yang berhadapan, biasanya berlawanan tandanya terhadap satu sama lain. Jadi $X_1 = -1$ dan $X_2 = -1$ itu berlawanan arahnya sehingga membentuk kopel atau momen).

M = a.1 = a (nilai mutlaknya, positif jika $X_1 = -1$ itu menekan).

Kemudian D_1 diuraikan ke dalam komponenta-kompnenta H mendatar dan V vertikal. Biasanya dipilih supaya pada $X_3 = -1$ itu terdapat H bekerja ke dalam dan V ke atas (yang lazimnya dianggap positif).



Gambar IX, 23

Jadi sekarang ketiga-tiga gaya-kelebihan menjadi H, V dan M analog dengan pelengkung masif terjepit. Apabila keadaan simetris, ketiga-tiga gaya ini dapat dipindah ke titik beratnya lengkungan, sehingga :

$$\delta'_{hv} = \delta'_{hm} = \delta'_{vm} = 0.$$

§ 19. Vakwerk dengan n bentang.

Banyaknya lapangan = n, jadi banyaknya titik perletakan = (n + 1), yaitu 0, 1, 2,.... k ..... n.

Sebagai statis-kelebihan diambil batang-batang dekat pada perletakan perletakan antara dengan gaya-gayanya X_1 di kiri perletakan 1, X_2 di kiri perletakan 2, ... X_k di kiri perletakan k .... X_{n-1} di kiri perletakan (n – 1) Jadi bangunan itu statis tak tertentu berlipat (n – 1), seperti balok terusan dengan n bentang atau (n + 1) titik perletakan.

X_1 mempengaruhi bentang 1 dan 2; X_2 bentang 2 dan 3; X_k bentang k dan (k+1).

Susunan statis tertentu menjadi n buah vakwerk yang masing-masing diletakkan di atas dua titik perletakan. Lapangan k dipengaruhi X_{k-1} dan X_k sendiri sedang X_k juga mempengaruhi lapangan (k + 1) di mana X_{k+1} bekerja. Berhubung dengan ini, peralihan titik-titik pegangan X_k dipengaruhi oleh X_{k-1}, X_k sendiri dan X_{k+1}

Jika selanjutnya $\frac{s}{EF} = w$ dan faktor-faktor pengaruh dari $X_1, X_2 \ldots X_k \ldots X_{n-1}$ adalah $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots \alpha_{n-1}$ maka kita mendapat persamaan-persamaan

$$X_1 \Sigma \alpha_1^2 w + X_2 \Sigma \alpha_1\alpha_2 w = \Sigma \alpha_1 S^o w$$
$$X_1 \Sigma \alpha_1\alpha_2 w + X_2 \Sigma \alpha_2^2 w + X_3 \Sigma \alpha_2\alpha_3 w = \Sigma \alpha_2 S^o w$$
$$X_{k-1} \Sigma \alpha_k\alpha_{k-1} w + X_k \Sigma \alpha_k^2 w + X_{k+1} \Sigma \alpha_k\alpha_{k+1} w = \Sigma \alpha_k S^o w$$

$\Sigma \alpha_k\alpha_{k-1} w$ dihitung di lapangan k; $\Sigma \alpha_k^2 w$ di lapangan-lapangan k dan k + 1;

$\Sigma \alpha_k\alpha_{k+1} w$ di lapangan $k + 1$.
$\Sigma \alpha_k S^o w$ **dihitung** di lapangan k **dan** $k + 1$.

Persamaan-persamaan di atas ini menunjukkan analogos dengan persamaan - persamaan tiga momen. sebab $X_k r_k$ = momen-peralihan diperletakan k.

Gaya=gaya batang di lapangan k terdapat:

$$S = S^o - \alpha_{k+1} X_{k+1} - \alpha_k X_k.$$

Sebagai statis kelebihan juga boleh diambil reaksi-reaksi perletakan-antara: $X_1, X_2 \ldots X_k \ldots X_{n-1}$.

Susunan-dasar yang statis tertentu menjadi vakwerk di atas dua titik perletakan 0 – n. Tiap gaya reaksi X mempengaruhi seluruh bangunan, jadi semua bentang. Berhubungan dengan ini kita menjumpai (n–1) besaran tak terketahui di masing-masing persamaan:

$$X_1 \Sigma \alpha_1^2 w + X_2 \Sigma \alpha_1\alpha_2 w + \ldots X_k \Sigma \alpha_1\alpha_k w + \ldots X_{n-1} \Sigma \alpha_1\alpha_{n-1} w = \Sigma \alpha_1 S^o w$$

.....

$$X_1 \Sigma \alpha_k\alpha_1 w + X_2 \Sigma \alpha_k\alpha_2 w + \ldots X_k \Sigma \alpha_k^2 w + \ldots X_{n-1} \Sigma \alpha_k\alpha_{n-1} w = \Sigma \alpha_k S^o w$$

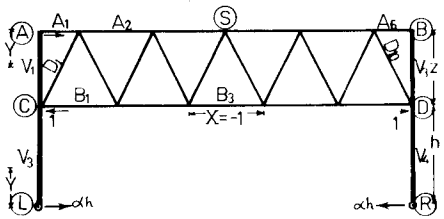
.....

$$X_1 \Sigma_{n-1}\alpha_1 w + X_2 \Sigma \alpha_{n-1}\alpha_2 w + \ldots X_k \Sigma \alpha_{n-1}\alpha_k w + \ldots X_{n-1} \Sigma \alpha^2_{n-1} w = \Sigma \alpha_{n-1} S^o w$$

Tentu saja sekarang nilai-nilai α berlainan dengan di atas. Juga di sini terdapat analogos dengan balok-terusan di atas (n + 1) titik-titik perletakan di mana reaksi-reaksi perletakan antara dianggap sebagai gaya statis kelebihan.

§ 20. Sebagian batang-batang menahan momen-lentur.

Sebagai contoh kita ambil portal simetris duasendi seperti gb. IX,24 Batang-batang LA dan RB dapat menahan momen-lentur, sedang fak tor tekanannya adalah EF_o dan EI_o tetap. Selanjutnya momen itu dianggap positif jika tepi-luarnya batang yang bersangkutan, tertekan.



Gambar IX, 24

Gaya-kelebihan X = B_3 oleh karena simetris letaknya.

X = −1 menghasilkan faktor-faktor pengaruh dalam α dan α_m, yang terakhir ini hanya pada batang-batang LA dan RB. Perlu diingat bahwa :

$\left[\alpha_m\right] = \left[cm\right]$

X = – 1 menghasilkan :

$\alpha h = \alpha hl = \alpha hr = z/(h+z)$; $\alpha_{vl} = \alpha_{vr} = 0$ (sebab garis LR mendatar) dan juga $(\alpha_{v1,3})_n = (\alpha_{v2,4})_n = 0$. Semua $(\alpha_d)_n = 0$ (simetri, lihat § 15)

$(\alpha_a)_n = h/(h+z)$, mengingat bahwa $\Sigma M_L = 0$ pada batang LA.

$(\alpha_{vl})_m = (\alpha_{v2})_m = -(\alpha_a)_n\, y = -yh/(h+z)$, tepi-luar tertarik

$\delta_{xx} = \delta_{xxn} + \delta_{xxm} = \Sigma \alpha_n^2\, s/EF + \int \alpha_m\, ds/EI$.

$\delta^\circ x = \delta^\circ xn + \delta^\circ xm = \Sigma \alpha_n^2 S^\circ s/EF + \Sigma \alpha m . M_x^\circ ds/EI$

Untuk mudahnya, boleh dilipatkan dengan EI_o/a^3 yang mendapatkan :

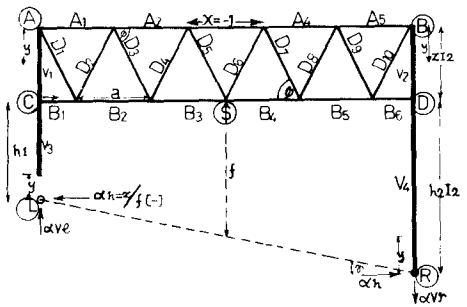
$\delta_{xxn} = (t_o^2/a^2)\, \Sigma \alpha_n^2\, (s/a)\, (F_o/F)$; $\delta'_{xxm} = (1/a^3) \int \alpha_m^2\, ds$,

kedua-duanya tidak berdimensi.

$(\delta^\circ_{xn})' = (t_o^2/a^2)\, \Sigma \alpha_n\, (s/a)\, (F_o/F)\, S^\circ$; $(\delta^\circ_{xm})' = (v/a^3) \int \alpha_m\, M_x^\circ\, ds$, berdimensi (kg). Biasanya $\delta_{xxn} \ll \delta_{xxm}$ dan δ°_{xm} $\delta^\circ_{xn} \ll \delta^\circ_{xm}$

sehingga sementara di dalam hitungan pra-rencana dapat diabaikan sebagai pendekatan, sebab besaran i_o (cm) itu $\ll$ a

Sekarang kita mempelajari bangunan yang **tidak** simetris.



Gambar IX, 25

Terlihat bahwa tepi atas mempunyai lapangan-lapangan yang ganjil banyaknya, sehingga di situ ada batang A yang terletak di tengah-tengah, yaitu A_3, yang sekarang kita anggap sebagai kelebihan, jadi X = A_3 (sendi sekarang ada di tepi bawah).

Gaya X = – 1 menghasilkan :

$\alpha_h = \alpha_{hl} = \alpha_{hr} = -z/f$ (ke arah luar), dengan $f = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$.

$\alpha_{vl} = -\alpha_h \operatorname{tg}\gamma = (z/f) \operatorname{tg}\gamma$, ke atas dan $\alpha_{vr} = -(z/f) \operatorname{tg}\gamma$, ke bawah.

$(\alpha_{v3})_n = (\alpha_{v1})_n = -\alpha_{vl} = -(z/f) \operatorname{tg}\gamma$ (tekan).

$(\alpha_{d1})_n = -(\alpha_{v1})_n / \sin\varphi = (z/f) \operatorname{tg}\gamma / \sin\varphi$ (tarik).

$(\alpha_{v4})_n = (\alpha_{v2})_n = -\alpha_{vr} = (z/f) \operatorname{tg}\gamma$; $(\alpha_{d10})_n = -(z/f) \operatorname{tg}\gamma / \sin\varphi =$

$= -(\alpha_{d1})_n$

Jadi $(\alpha_d)_n$ ganjil $= -(\alpha_d)_n$ genap, sebesar $(z \operatorname{tg}\gamma / f \sin\varphi)$

$(\alpha_{b1})_n = -\alpha_{hl}\,(h_1 + z)/f$ $(\alpha_{a1})_n = \frac{1}{2}(\alpha_{hl} \cdot h_1 - \alpha_{vl} - a/2) =$

$= -(h_1/f + z_t/f \operatorname{tg}\gamma \operatorname{cotg}\varphi$

menggunakan cara Ritter dengan potongan A_1, D_2, B_2. Juga terdapat berdasarkan $M_L = 0$ pada batang LA dari gaya-gaya $-(\alpha_{a1})_n$, $(\alpha_{d1})n \cos\varphi$ dan $(\alpha_{b1})_n$.

$(\alpha_{b6})_n = (h_2 + z)/f$ (analog dengan $(\alpha_{b6})_n$; $(\alpha_{a5})_n = -(h_2/f - z/f.$ $\operatorname{tg}\gamma \operatorname{cotg}\varphi$).

$(\alpha_{a2})_n = (\alpha_{a1})_n + \left[(\alpha_{d2})_n - (\alpha_{d3})_n\right] \cos\varphi$, dan seterusnya

$(\alpha_{b2})_n = (\alpha_{b1})_n + \left[(\alpha_{d1})_n - (\alpha_{d2})_n\right] \cos\varphi$, dan seterusnya

Kontrol : $-(\alpha_{a2})_n - ((\alpha_{d4})_n - (\alpha_{d5})_n) \cos\varphi - 1 = 0$;

$(\alpha_{vl})_m = -(\alpha_{a1})_n . y$; $(\alpha_{v3})_m = -\alpha_h . y$.

$(\alpha_{v2})_m = -(\alpha_{a5})_n . y$; $(\alpha_{v4})_m = -\alpha_h . y$.

$\delta_{xxn} = \Sigma \alpha_n^2\, s/EF$.

$\delta_{xxm} = \int_o^{h_1} (\alpha_{v1})_m^2\, dy/EI_1 + \int_o^{h_1} (\alpha_{v3})_m^2\, dy/EI_1 + \int_o^{2} (\alpha_{v2})^2_m\, dy/EI_2 +$

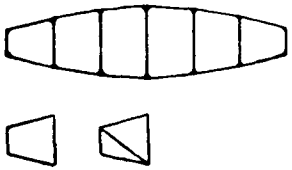
$\int_o^{h_2} (\alpha_{v4})_m\, dy/EI_2$

BAB X

BANGUNAN VIERENDEEL

§ 1. Pengertian

Bangun ini adalah bangunan-rangka dengan sudut-sudut yang teguh sebagai pengganti diagonal-diaognal. Satu sudut-teguh di dalam sesuatu kotakan dapat mengganti sebatang diagonal (gambar X, 1). Jadi saban kotakan yang mempunyai empat sudut-teguh itu, statis tak tertentu berganda 4 – 1 = 3 dan jika pada seluruh bangu - nan ada n kotakan, bangunan menjadi statis tak tertentu berganda 3 n.

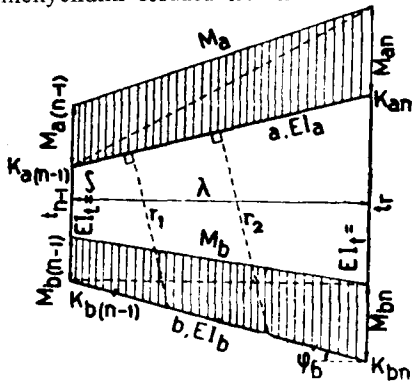


Gambar X, 1

Bangunan semacam ini pertama kali dipelajari oleh prof. Vierendeel di Belgia. Berhubung dengan ini lazim dinamakan bangunan vierendeel dan sering digunakan di Belgia pula.

§ 2. Tihang-tihang dianggap kaku d tak terhingga.

Penanggapan ini diadakan untuk sementara sebagai permulaan di dalam - mempelajari soal bangunan ini. Kita menyelidiki sesuatu kotakan dimana EI_t = ∽ (kanan-kiri). Bidang-momen pada batang tepi-atas mempunyai ordinat $M_{a(n-1)}$ di ujung kiri dan M_{an} di ujung kanan.



Gambar X, 2

Begitu pula ordinat-ordinat momen pada batang tepi bawah ada M $M_{b(n-1)}$ di ujung kiri dan M_{bn} diujung kanan.

Kedua-dua garis-momen itu ber - jalanan lurus di antara titik-titik hubungan, oleh karena muatan- mu

atan bekerja di titik-titik hubung saja.

Jika ujung K_{an} dipotong, batang atas harus tetap melekat pada ti hang kanan. Keadaan demikian tercapai jika dipenuhi kepada syarat - syarat sebagai berikut:

a. Kedua-dua ujung-potong tak berputar sudut terhadap satu sama lain, yang berarti bahwa luas bidang $\left(\frac{M}{EI}\right)_{atas}$ = luas bidang $\left(\frac{M}{EI}\right)_{bawah}$

$$\frac{1}{2EI_a}\,a(M_{a(n-1)} + M_{an}) = \frac{1}{2EI_b}\,b(M_{b(n-1)} + M_{bn}) \ldots\ldots \quad (1)$$

Kita mengabaikan adanya momen M_t di tihang oleh karena

$$\frac{M_t}{EI_t} = \frac{M_t}{\infty} = o$$

b. Komponen peralihan-tempat pada ujung kanan batang-atas terhadap-ujung atas tihang menurut garis t_n harus nol. Ini berarti bahwa statis momennya bidang $\frac{M_a}{EI_a}$ terhadap t_n = idem $\frac{M_b}{EI_b}$ terhadap t_n.

$$\frac{1}{EI_a}\left(\tfrac{1}{2}M_{a(n-1)}a\cdot\tfrac{2}{3}\lambda + \tfrac{1}{2}M_{an}a\tfrac{1}{3}\lambda\right) = \frac{1}{EI_b}\left(\tfrac{1}{2}M_{b(n-1)}b\cdot\tfrac{2}{3}\lambda + \tfrac{1}{2}M_{bn}b\tfrac{1}{3}\lambda\right) \ldots \quad (2)$$

c. Komponen peralihan-tempat tersebut. di atas menurut garis a = 0, atau statis-momen bidang $\frac{M_b}{EI_b}$ terhadap garis a = 0.

$$\frac{1}{EI_b}\left(\tfrac{1}{2}M_{b(n-1)}b\cdot r_1 + \tfrac{1}{2}M_{bn}b\cdot r_2\right) = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

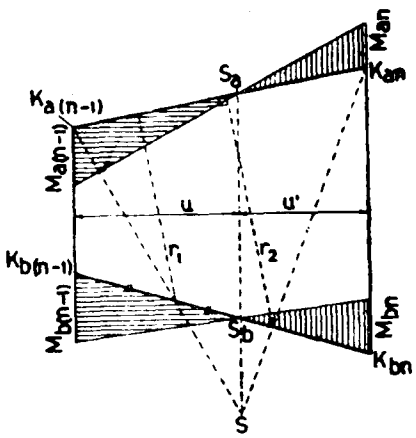
$$r_1 = \{t_{n-1} + \tfrac{1}{3}(t_n - t_{n-1}\} \cos\varphi_a = (\tfrac{2}{3}t_{n-1} + \tfrac{1}{3}t_n)\cos\varphi_a$$
$$r_2 = \{t_{n-1} + \tfrac{2}{3}(t_n - t_{n-1}\} \cos\varphi_a = (\tfrac{1}{3}t_{n-1} + \tfrac{2}{3}t_n)\cos\varphi_a$$

$$\frac{a}{EI_a} = w_a;\ \frac{b}{EI_b} = w_b$$

$$(M_{a(n-1)} + M_{an})w_a = (M_{b(n-1)} + M_{bn})w_b \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$(2M_{a(n-1)} + M_{an})w_a = (2M_{b(n-1)} + M_{bn})w_b \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Selisih antara kedua-dua persamaan ini menghasilkan :

$$M_{a(n-1)}w_a = M_{b(n-1)}w_b \quad (2)-(1)$$
$$M_{an}w_a = M_{bn}w_b \quad 2\times(1)-(2)$$
$$M_{a(n-1)} : M_{b(n-1)} = w_b : w_a$$
$$M_{an} : M_{bn} = w_b : w_a$$
$$M_{a(n-1)} : M_{b(n-1)} = M_{an} : M_{bn} \ldots (+)$$
$$M_{b(n-1)}r_1 = -M_{bn}r_2 \ldots\ldots (3)$$



Gambar X, 3a

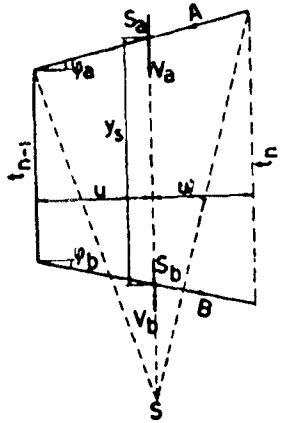
Jadi $M_{b(n-1)}$ dan M_{bn} itu berlawanan tandanya dan menurut (4), tentang $M_{a(n-1)}$ dan M_{an} juga begitu adanya. ini berarti, bahwa perjalanan garis - garis momen menurut gambar X, 2 itu salah dan sebetulnya menurut gambar X, 3a

Garis-garis momen memotong sumbu-sumbu batang di antara kedua-dua ujung-ujungnya, yaitu titik S_a pada batang tepi-atas dan S_b pada batang tepi-bawah.

$$K_{b(n-1)}S_b : S_bK_{bn} = M_{b(n-1)} : M_{bn} = r_2 : r_1 =$$
$$= (\tfrac{1}{3}t_{n-1} + \tfrac{2}{3}t_n) : (\tfrac{2}{3}t_{n-1} + \tfrac{1}{3}t_n)$$

Ini berarti bahwa garis-vertikal yang melalui S_b juga melalui titik-berat trapezium yang membentuk kotakan, $K_{a(n-1)}K_{b(n-1)}K_{bn}K_{an}$.

Sifat terdapat pada titik S_b itu terdapat pula pada titik S_a. Jadi momen-momen di titik-titik S_a dan S_b terdapat: $M_{sa} = M_{sb} = o$. Ini berarti bahwa garis-garis lentur pada batang-batang atas dan bawah mempunyai titik-belok di S_a dan di S_b.



Gambar X, 3b

Kita mengadakan potongan menurut garis S_aS_b; panjang garis $S_aS_b = y_s$ (gambar X,3b).

Gaya yang bekerja pada tampang S_a diuraikan di dalam dua komponen: A menurut sumbu-batang dan V_a vertikal. Begitu pula kekuatan di tampang S_b diuraikan menurut komponen B yang bersatupadu dengan sumbu-batang dan komponen-vertikal V_b. Selanjutnya, $V_a + V_b = V$.

$$V_a = \frac{1}{u}M_{a(n-1)} \text{ dan } V_b = \frac{1}{u}M_{b(n-1)}$$

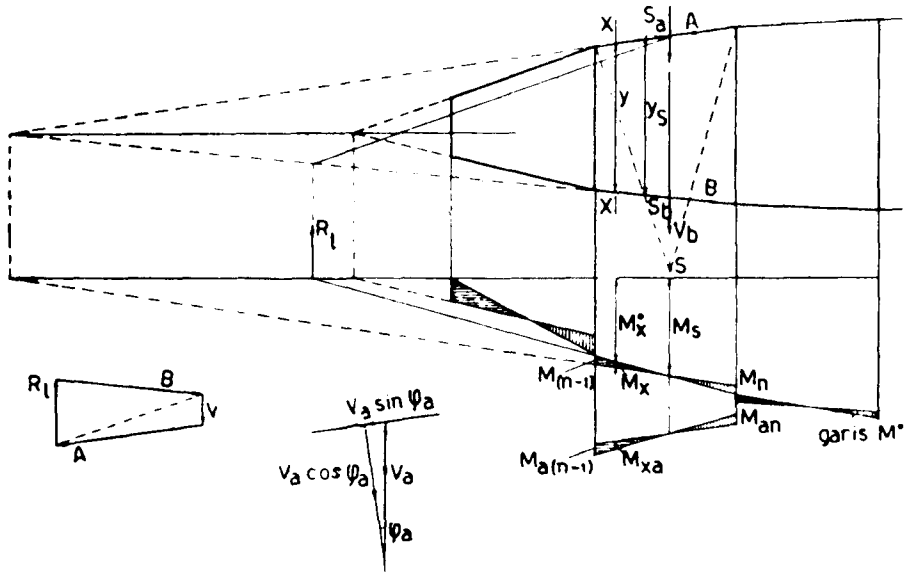
$V_a : V_b = M_{a(n-1)} : M_{b(n-1)} = w_b : w_a$ (bertanding lurus dengan kekakuan batang).

§ 3. Lanjutan.

Ketiga-tiga kekuatan-kekuatan A, B, dan V harus seimbang dengan kekuatan-kekuatan luar yang bekerja di sebelah kiri tampang S_aS_b. Resultanta kekuatan-kekuatan luar ini adalah R_l.

Letak garis-kerja R_l ini mudah terdapat dengan perantara garis M^o sebagai poligon-batang (gambar X, 4). Kemudian R_l ini kita uraikan di dalam tiga komponen menurut garis-bekerjanya A,B dan V (cara Culmann), dan dengan begitu kita mendapat besarnya gayanya A,B dan V ini, Kekuatan V dianggap positif apabila bagian kanan melimpahkan gaya ke bawah terhadap bagian kiri (seperti pada gaya-melintang). Bilamana-V terdapat positif, maka

$$M_{a(n-1)} = -V_a u;\ M_{an} = +V_a u' = +V_a(\lambda - u)$$
$$M_{b(n-1)} = -V_b u;\ M_{bn} = +V_b u' = +V_b(\lambda - u)$$



Gambar X, 4

Kita juga dapat menghitung kekuatan-kekuatan A dan B secara analitis (gambar X, 4). M^o adalah momen pada susunan balok di atas dua perletakan yang ordinatnya di titik S ada M_s^o.

$$A \cos \varphi_a \cdot y_s = M_s^o;\ A = \frac{M_s^o}{y_s \cos \varphi_a} \text{ dan } B = \frac{M_s^o}{y_s \cos \varphi_b}$$

V_a menambahkan gaya-normal pada batang atas sebanyak $V_a \sin \varphi_a$ dan menimbulkan gaya-melintang sebesar $V_a \cos \varphi_a$

$$A \cos \varphi_a = B \cos \varphi_b = H'$$

$$H' y_s = M_s^o \text{ atau } H' = \frac{M_s^o}{y_s}$$

Sekarang kita mengadakan potongan X – X, di mana tinggi bangunan adalah y.

$$M_x = M_{xa} + M_{ab}$$

$$M_x = M_x^o - H'y = M_x^o - \frac{y}{y_s} M_s^o = -\left(\frac{y}{y_s} M_s^o - M_x^o\right) \text{ atau}$$

$$M_x - M_x^o = -\frac{y}{y_s} M_s^o$$

Pada lukisan garis – M^O digambar X, 4 digambarkan perjalanan-perjalanan *jumlah momen* pada batang - atas dan batang-bawah . Di situ hanya terlihat besarnya.

$$M_{n-1} = M_{a(n-1)} + M_{b(n-1)} \text{ dan } M_n = M_{an} + M_{bn}$$

Panjang-garis $(M_x^o + M_x)$: panjang-garis $M_s^o = y : y_s$ (nilai-nilai mutlak).

Panjang-garis $(M_x^o + M_x) = \frac{y}{y_s}$ panjang-garis M_s^o.

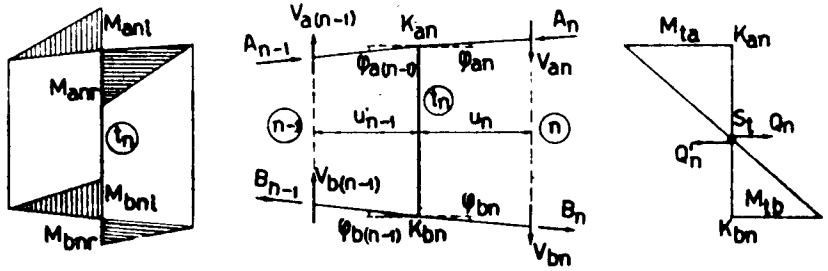
Panjang garis $M_x = \frac{y}{y_s}$ panjang-garis $M_s^o \div$ panjang-garis M_x^o.

$M_x = \frac{y}{y_s} M_s^o - M_x^o$, cocok dengan pendapat di atas, jka kita mengambil nilai-nilai mutlaknya. Gambar X, 4 memperlihatkan bagaiman terdapatnya garis yang panjangnya $\frac{y}{y_s} M_s^o = M_x^o + M_x$.

Jadi dengan perantaraan titik-titik potongan batang-batang atas dan bawah, titik-titik S dan garis M_o kita dapat melukiskan perjalanan jumlah momen-momen batang-batang atas dan bawah (garis-garis berbangun tangga).

§ 4. Gaya-gaya yang bekerja pada tihang.

Besaran-besaran $M_{n(n-1)}$, $M_{b(n-1)}$ dan $M_n = M_{a(n-1)} + M_{b(n-1)}$ di-atas tadi ialah ordinat-ordinat momen di ujung kiri pada kotakan (lapangan) yang kita pelajari, dan M_{an}, M_{bn} itu ordinat-ordinat momen di ujung kanannya. Di dalam mempelajari bangunan seluruhnya, cara menulis demikian itu belum cukup terang oleh karena tihang t_n diapit oleh dua batang-batang atas dan dua batang-batang bawah. Jika kita mempelajari tihang, kita harus menyebutkan ordinat-momen di sebelah kiri atau kanannya. Berhubung dengan ini kita membeda-bedakan antara M_{anl} dan, M_{anr}, M_{bnl} dan M_{bnr} 9 (gambar X, 5).



Gambar X, 5

Kita mempelajari tihang no n, yaitu t_n yang diapit oleh kotakan (n–1) dan kotakan n.

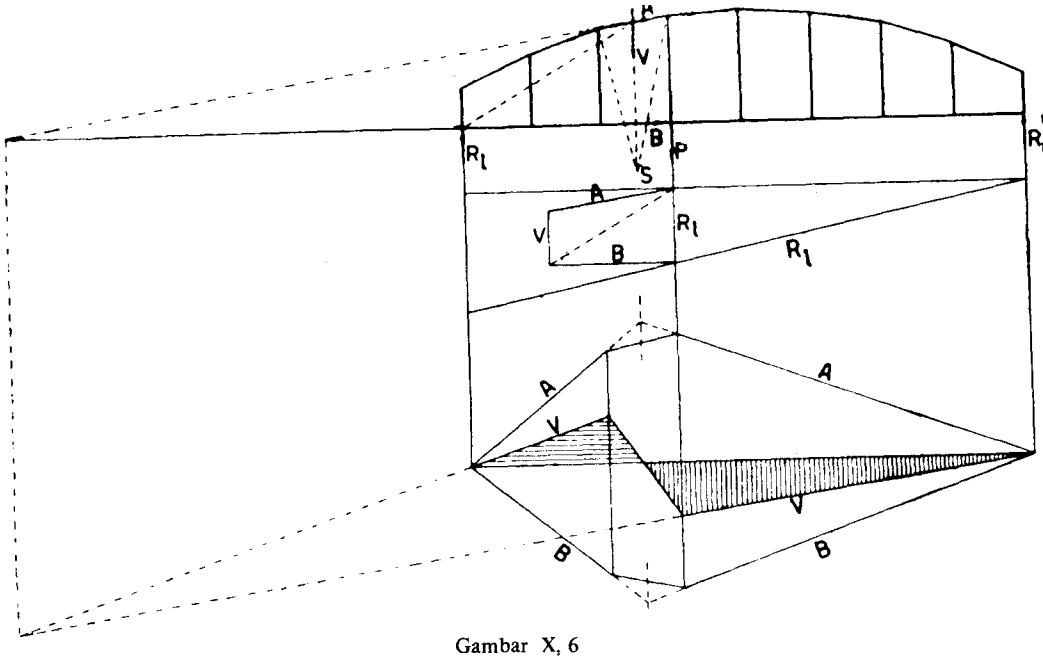
Di titik S_t momen-tihang = 0. Di situ bekerja gaya-lintang

$$Q_n' = A_n \cos \varphi_{an} - A_{n-1} \cos \varphi_{a(n-1)} = H_n' - H_{n-1}' = \Delta H'$$

Momen di ujung atas tihang $M_{ta} = V_{a(n-1)} u_{n-1}' + V_{an} u_n$

Momen di ujung bawah tihang $M_{tb} = V_{b(n-1)} u_{n-1}' + V_{bn} u_n$

Titik S_t mendekati batang tepi yang mempunyai $w = \frac{s}{EI}$ terbesar atau yang paling lembek (§ 2 terakhir). Gaya-gaya A_{n-1}, $V_{a(n-1)}$, A_n dan V_{an} mempunyai komponen vertikal ke atas sebesar: $V_{an} = (A_{n-1} \sin \varphi_{a(n-1)} - A_n \sin \varphi_{an}) + V_{a(n-1)} - V_{an}) = -(\Delta A \sin \varphi_a + \Delta V_a)$



Gambar X, 6

Kekuatan ini berhasrat menimbulkan gaya normal menarik pada tihang, Apabila di titik hubungan K_{an} bekerja muatan P (vertikal kebawah) maka kekuatan normal tihang menjadi $V_{an} = -P$.

§ 5. Garis-pengaruh : A, B dan V.

Selama muatan P ada di sebelah kanan titik S, resultanta kekuatan pada bagi - an kiri terhadap tampang yang melalui S ialah reaksi perletakan kiri R_l, sedang A, B dan V itu terdapat sebagai komponen-komponennya (§ 3, gambar X, 4).

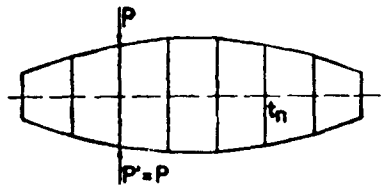
Jadi perjalanan garis-garis pengaruh A, B dan V selama P bekerja di-kanan tihang-kanan, serupa dengan garis-pengaruh R_l. Dan garis-garis penga-ruhnya di bagian kiri tihang-kiri serupa dengan R_r. Di antara kedua-dua ti-hang tersebut ini garis-pengaruh berjalan lurus.

Gambar X, 6 memperlihatkan satu sama lain untuk A, B dan V dikotakan ketiga, dengan cara menentukan besarnya pada kedudukan P di titik hubungan keempat.

§ 6. Bangun simetris terhadap sumbu - sumbu mendatar dan vertikal

Di sesuatu titik-hubungan bekerjalah muatan P. Ini menimbulkan ditengah-tengah sesuatu tihang t_n momen sebesar $\alpha_m P$ Kekuatan P' = P yang-berlawanan arahnya dengan P bekerjalah di titik hubungan yang berhadapan. Oleh karena keadaan simetris, P' akan menimbulkan momen sebesar $\alpha_m P'$ = $\alpha_m P$ pula di tengah-tengah tihang t_n tersebut. Jika P dan P' bekerja bersama-sama, momen di tengah-tengah t_n ini ada $2\alpha_m P$. Pada hakekat nya P dan P' itu menghapuskan satu sama lain dan jika perpandakan = pada tihang di mana P dan P' bekerja itu diabaikan, tihang ini akan menahan kekuatan normal menekan sebesar P dan semua bagian-bagian pada bangunan akan bebas tegangan, jadi momen di tengah-tengah tihang t_n tadi sebesar $2\alpha_m F = 0$ atau $\alpha_m = o$, Ini berarti bahwa sesuatu muatan P tak akan me-nimbulkan momen di tengah-tengah tihang yang kita ambil sesukanya, sedang tihang di mana P bekerja, menahan gaya normal sebesar ½P (menekan bilamana P bekerja di titik hubungan atas, dan menarik apabila bekerja di titik-hubungan bawah).

Oleh karena pendapat di atas ini berlaku untuk sesuatu muatan P yang kita pilih sesukanya dan untuk sesuatu tihang yang juga kita pilih



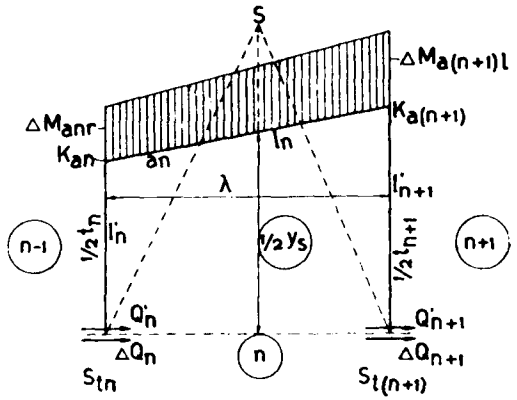
Gambar X, 7

sembarangan maka kita dapat menarik kesimpulan bahwa pada bangunan simetris demikian ini, di tengah-tengah segala tihang tak akan tertimbul momen (asal saja muatan bekerja vertikal dan di titik-hubungan).

Hukum ini memudahkan hitungan jika robahan bentuk tihang juga diperhitungkan nanti (tihang a tak lagi kaku dan tak terhingga).

§ 7. Korreksi tentang kekakuan tihang.

Pendapat-pendapat di atas tentang momen-momen pada batang-tepi dan sebagainya didasarkan atas penganggapan bahwa tihang bersifat kaku tak berhingga atau $EI_t = \infty$. Sekarang anggapan ini kita tinggallkan dan tihang-tihang dianggap ikut melengkung pula menurut kenyataannya. Hitungan yang lebih seksama ini akan kita jalankan hanya pada bangunan-bangunan simetris menurut §6 tadi. Titik S_t, yaitu titik momen nol pada tihang seperti tertulis di dalam §4 dulu, terdapat di tengah-tengah tihang menurut uraian di dalam §6 itu, yang tidak dipengaruhi oleh kaku lembeknya tihang (faktor EI_t). Jadi momen di titik S_t tetap bernilai nol dan kita tak usah mengadakan korreksi terhadap nya.



Gambar X, 8

Yang masih memerlukan korreksi ialah gaya lintang Q' di tengah-tengah tihang (di titik S_t) seperti terdapat di dalam §4 dulu. Pada besaran Q' ini harus ditambahkan suku-korreksi sebesar ΔQ. Oleh karena keadaan simetris, sudah cukup jika mempelajari bagian bangunan diatas sumbu mendatar di mana titik-titik S_t terletak.

Tihang pertama kita sebut t_1, tihang kedua t_2 dan seterusnya. Dengan begitu lapangan no 1 diapit oleh tihang-tihang t_1 dan t_2, lapangan no n oleh tihang-tihang t_n dan t_{n+1} (gambar X,8). Di titik S_{tn} pada tihang t_n bekerja gaya melintang Q'_n yang terdapat menurut §4 dan di $S_{t(n+1)}$ – pada tihang $t_n + 1$ kekuatan melintang Q'_{n+1}. Sebagai akibat dariini titik S_{tn} akan beralih sejauh:

$$\delta_n = \frac{1}{3EI'_n} Q'_n(\tfrac{1}{2}t_n)^3 = \frac{1}{24EI'_n} Q'_n t_n^3$$

dan titik $S_{t(n+1)}$ beralih sejauh :

$$\delta_{n+1} = \frac{1}{3EI'_{n-1}} Q'_{n+1}(\tfrac{1}{2}t'_{n+1})^3 = \frac{1}{24EI'_{n+1}} Q'_{n+1} t'^3_{n+1}$$

Pada umumnya akan terdapat $\delta_n \neq \delta_{n+1}$ yang akan menyebabkan perobahan pada jarak λ antara S_{tn} dan $S_{t(n+1)}$ yang bertentangan dengan kenyataan.

Oleh karena itu kita harus mengadakan korreksi-korreksi ΔQ_n dan ΔQ_n+1 Pada tihang-tihang t_n dan t_{n+1}. Suku-korreksi ΔQ ini diadakan pada semua tihang dan berhubung dengan ini batang-batang tepi akan menerima momen korreksi.

Pada batang tepi-atas kotakan n terdapat :

$$\Delta M_{anr} = \sum_1^n \Delta Q \cdot \tfrac{1}{2}t_n \text{ dan } \Delta M_{a(n+1)l} = \sum_1^n \Delta Q \cdot \tfrac{1}{2}t_{n+1}$$

Petunjuk-petunjuk r dan l (kanan dan kiri) diambil terhadap titik-hubungan atau tihang.

Bidang momen-korreksi ini mengakibatkan robahan jarak sejauh – Δλ antara titik-titik S_{tn} dan $S_{t(n+1)}$. Titik berat bidang ΔM (yang berbangun trapezium) terletak di atas garis vertikal yang melalui titik S pada lapangan ini, jadi jarak antara titik berat ini dan garis yang menghubungkan S_{tn} dan $S_{t(n+1)}$ ada $\tfrac{1}{2}y_s$. Robahan jarak sebesar Δλ ini terdapat sebagai $\frac{1}{EI_n} \times$ statis-momennya bidang momen terhadap garis S_{tn} $S_{t(n+1)}$

$$\Delta\lambda = \frac{1}{EI_n} a_n \{\tfrac{1}{2}\sum_1^n \Delta Q\,(\tfrac{1}{2}t_n + \tfrac{1}{2}t_{n+1})\}\tfrac{1}{2}y_s = \frac{1}{8EI_n} a_n(t_n + t_{n+1})y_s \sum_1^n \Delta Q$$

Supaya λ tetap tak berobah, sesudah mengadakan ΔQ, kita mendapat persamaan:

$$\frac{t'^3_{n+1}}{24EI'_{n+1}}(Q'_{n+1} + \Delta Q_{n+1}) - \frac{t'^3_n}{24EI'_n}(Q'_n + \Delta Q_n) = \frac{1}{8EI_n} \cdot a_n(t_n + t_{n+1})y_s \sum_1^n \Delta Q$$

Untuk memudahkan cara menulis kita namakan :

$$\frac{t_n^3}{3EI_n'} = \alpha_n;\quad \frac{a_n(y_s t_n + t_{n+1})}{EI_n} = \beta_n;\quad \sum_1^n \Delta Q = \Delta H_n$$

Setelah anggauta-anggauta kiri dan kanan di dalam persamaan di atas ini dilipatkan dengan 8 kita mencapai:

$$\alpha_{n+1}(Q_{n+1}' + \Delta Q_{n+1}) - \alpha_n(Q_n' + \Delta Q_n) = \beta_n \cdot \sum_1^n \Delta Q = \beta_n \cdot \Delta H_n$$

$$\Delta(\alpha Q) = \beta \cdot \Delta H$$

Sebagai pendekatan kasaran, pengaruh ΔQ diabaikan:

$$\alpha_{n+1}Q_{n+1}' - \alpha_n Q_n' = \beta_n \cdot \Delta H_n$$

$$\Delta H_n = \frac{1}{\beta_n}(\alpha_{n+1}Q_{n+1}' - \alpha_n Q_n') = \frac{1}{\beta_n} \cdot \Delta(\alpha Q_n') \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

Q_{n+1}' dan Q_n' adalah besaran-besaran yang terdapat menurut § 4 jadi terketahui.

Pendekatan lebih lanjut tercapai, jika kita mengabaikan suku α_{n+1} ΔQ_{n+1} di dalam menghitung ΔH_n setelah mendapat nilai ΔH_{n-1} dengan mengingat bahwa $\Delta Q_n = \Delta H_n - \Delta H_{n-1}$

$$\alpha_{n+1}Q_{n-1}' - \alpha_n Q_n' - \alpha_n(\Delta H_n - \Delta H_{n-1}) = \beta_n \cdot \Delta H_n$$

$$\alpha_n \cdot \Delta H_{n-1} + \alpha_{n+1}Q_{n-1}' - \alpha_n Q_n' = (\alpha_n + \beta_n)\Delta H_n$$

$$(\alpha_n + \beta_n)\Delta H_n = \alpha_n \Delta H_{n-1} + \alpha_{n+1}Q_{n+1}' - \alpha_n Q_n' = \alpha_n \Delta H_{n-1} + \Delta(\alpha Q') \ldots (2)$$

Kita mulai dengan $n = 1$, jadi tihang serta lapangan pertama.

$$\Delta Q_n = \Delta Q_1$$

$$\Delta H_n = \Delta H_1 = \Delta Q_1$$

$$\Delta H_{n-1} = \Delta H_o = \Delta H_1 - \Delta Q_1 = o$$

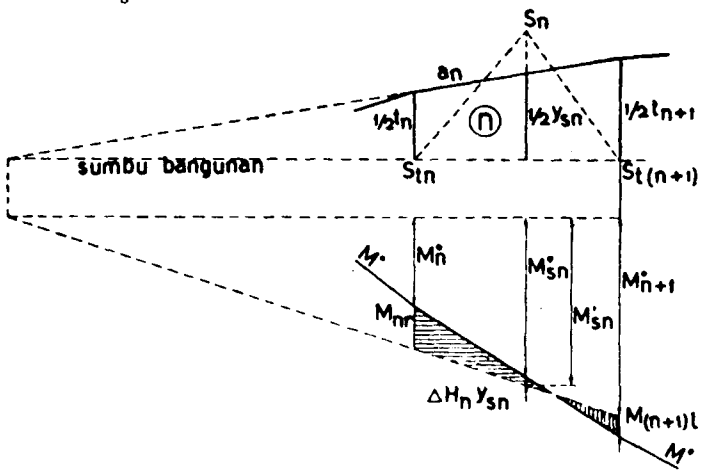
$$(\alpha_1 + \beta_1)\Delta H_1 = \alpha_2 Q_2' - \alpha_1 Q_1'$$

$$\Delta H_1 = \frac{\alpha_2 Q_2' - \alpha_1 Q_1'}{\alpha_1 + \beta_1}$$

$(\alpha_2 + \beta_2)\Delta H_2 = \alpha_2 \Delta H_1 + \alpha_3 Q_3' - \alpha_2 Q_2'$ **sedang** ΔH_1 **telah terketahui, d.s.t.**

§8. Korreksi terhadap garis-momen.

Dulu telah terdapat bahwa $M_S = 0$ yaitu jumlah $(M_a + M_b)$ pada tampang S_aS_b (§3 gambar X, 4). Setelah diadakan korreksi, maka $M_S = \Delta H.\ y$, jadi ordinat M_S° diperpanjang dengan $\Delta H.\ y_S$ untuk melukiskan garis jumlah momen pada batang atas dan bawah, apabila ΔH itu bernilai positif. Dan jika ΔH itu terdapat negatif, ordinat M_S° tadi harus dikurangi dengan $\Delta H.\ y_S$ (gambar X, 9).



Gambar X, 9

Nilai-nilai $\Delta H, y_S$ dan M° itu harus disesuaikan dengan lapangan atau kotakan yang kita pelajari. Jadi menurut gambar X, 9, yang kita pelajari itu kotakan No n dan pada besaran-besaran di atas harus di bubuhi petunjuk (index) n. Oleh karena keadaan simetris, maka $M_a = M_b = \frac{1}{2}M$.

$$M_a = M_b = \tfrac{1}{2}M.$$

$$M_{anr} = M_{bnr} = \tfrac{1}{2}M_{nr};\quad M_{a(n+1)l} = M_{b(n+1)l} = \tfrac{1}{2}M_{(n+1)l}$$

$$M_{nr} = M_n^o - (M_{sn}^o + \Delta H_n \cdot y_{sn})\frac{t_n}{y_{sn}} = M_n^o - M_{sn}'\frac{t_n}{y_{sn}}$$

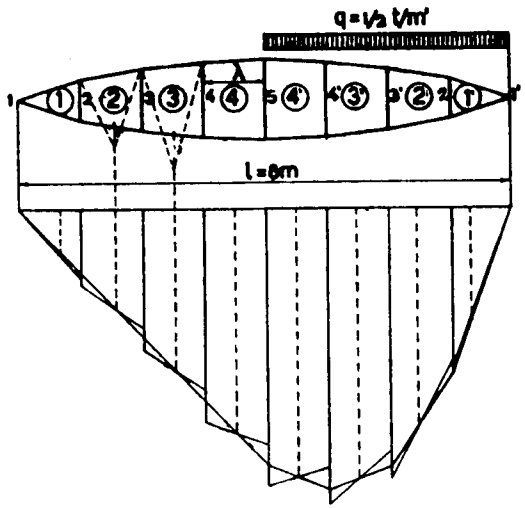
$$M_{(n+1)l} = M_{n+1}^o - (M_{sn}^o + \Delta H_n \cdot y_{sn})\frac{t_{n+1}}{y_{sn}} = M_{n+1}^o - M_{sn}'\frac{t_{n-1}}{y_{sn}}$$

$$M_{nl} = M_n^o - (M_{s(n-1)}^o + \Delta H_{n-1} y_{s(n-1)})\frac{t_n}{y_{s(n-1)}} \text{ (untuk lapangan } n - 1).$$

§9. Contoh, bangunan berupa parabol.

Bentang l = 8λ = 8 x 2 m = 16 m

EI tetap untuk semua batang. Muatan terbagi rata q = ½t/m' di atas ba - gian separoh di sebelah kanan.



Gambar X, 10

$$\alpha = \frac{t^3}{3EI}\,;\ \alpha' = EI\alpha = \tfrac{1}{3}t^3$$

$$\beta = \frac{a}{EI}\cdot y_s(t_l + t_r);\ \beta' = EI\beta = ay_s(t_l + t_r)$$

t = panjang tihang.

a b = panjang batang tepi.

t_l = panjang tihang-kiri pada sesuatu vak

t_r = panjang tihang-kanan pada sesuatu vak

Hitungan di jalankan secara daftar.

Tihang	1	2	3	4	5	4'	3'	2'	1'
t (m')	0	1,05	1,80	2,25	2,40	2,25	1,80	1,05	0
$a = b$ (")	2,06	2,04	2,01	2,00	2,00	2,01	2,04	2,06	
y_s (")	0,70	1,46	2,03	2,33	2,33	2,03	1,46	0,70	
α'	0	0,385	1,94	3,80	4,61	3,80	1,94	0,385	0
β'	1,52	8,43	16,57	21,65	21,65	16,57	8,43	1,52	
M^o (tm)	0	2	4	6	8	9	8	5	0
M_s^o (")	1,33	3,08	5,00	7,01	8,52	8,50	6,65	3,33	
$H' = M_s^o/y_s$ (t)	1,90	2,11	2,47	3,01	3,65	4,19	4,55	4,76	
$Q' = \Delta H'$ (")	1,90	0,21	0,36	0,54	0,64	0,54	0,36	0,21	—4,76
$\alpha' Q'$	0,0	0,08	0,70	2,04	2,94	2,04	0,70	0,08	0,0
$\Delta(\alpha' Q')$		0,08	0,62	1,34	0,90	—0,90	—1,34	—0,62	—0,08

Kita mengadakan pendekatan dengan mengabaikan $\alpha_{n+1} Q_{n+1}$.

$$\Delta H_n = \frac{\alpha_n \Delta H_{n-1} + \alpha_{n+1} Q'_{n+1} - \alpha_n Q'_n}{\alpha_n + \beta_n} = \frac{\alpha_n \Delta H_{n-1} + \Delta(\alpha' Q')_n}{\alpha'_n + \beta'_n}$$

Kita mulai dengan $n = 1;\ \Delta H_{n-1} = o;\ \alpha'_1 = o;\ \beta'_1 = 1{,}52$

$$\Delta H_1 = \frac{\alpha'_2 Q'_2}{\beta'_1} = \frac{0{,}08}{1{,}52} = 0{,}053$$

$$\Delta H_2 = \frac{\alpha'_2 \Delta H_1 + \Delta(\alpha' Q')_2}{\alpha'_2 + \beta'_2} = \frac{0{,}385.0{,}053 + 0{,}62}{0{,}385 + 8{,}43} = \frac{0{,}64}{8{,}835} = 0{,}073$$

$$\Delta H_3 = \frac{\alpha'_3 \Delta H_2 + \Delta(\alpha' Q')_3}{\alpha'_3 + \beta'_3} = \frac{1{,}94.0{,}073 + 1{,}34}{1{,}94 + 16{,}57} = \frac{1{,}48}{18{,}51} = 0{,}080$$

$$\Delta H_4 = \frac{3{,}80.0{,}080 + 0{,}90}{3{,}80 + 21{,}65} = \frac{1{,}204}{25{,}45} = 0{,}047$$

Sekarang kita mulai dengan lapangan 1', jadi dari kanan ke kiri

$$\Delta H_{n'} = \frac{\alpha'_n \Delta H_{n'-1} + \Delta(\alpha' Q')_{n'}}{\alpha'_{n'} + \beta'_{n'}}$$

$$n' = 1;\ \Delta H_{o'} = o;\ \alpha'_{1'} = o;\ \beta'_{1''} = 1{,}52$$

$$\Delta H_{1'} = \frac{-0{,}08}{1{,}52} = -0{,}053 = -\Delta H_1$$

$$\Delta H_{2'} = \frac{-0{,}385.0{,}053 - 0{,}62}{0{,}385 + 8{,}43} = -0{,}073 = -\Delta H_2$$

$$\Delta H_{3'} = \frac{-1{,}94.0{,}073 - 1{,}34}{1{,}94 + 16{,}57} = -0{,}080 = -\Delta H_3$$

$$\Delta H_{4'} = -\Delta H_1 = -0{,}047$$

Setelah besaran-besaran ΔH ini terdapat, kita mengadakan korreksi-korreksi menurut daftar di bawah ini:

Kotakan / Tihang	1	2	3	4	5	4'	3'	2'	1'
ΔH	0,053	0,073	0,080	0,047	—0,047	—0,080	—0,073	—0,053	
$\Delta Q = \Delta(\Delta H)$	0,053	0,020	0,007	—0,033	—0,094	—0,033	0,007	0,020	0,05
Q'	1,90	0,21	0,36	0,54	0,64	0,54	0,36	0,21	—4,76
$Q = Q' + \Delta Q$	1,953	0,230	0,367	0,507	0,546	0,507	0,367	0,230	—4,707
$M_t = +Q \cdot \frac{1}{2}t$	0	0,121	0,330	0,570	0,657	0,570	0,330	0,121	0,0
$\Delta H \cdot y_s$	0,037	0,107	0,163	0,109	—0,109	—0,163	—0,107	—0,037	
$M_s' = M_s^o + \Delta H \cdot y_s$	1,367	3,187	3,163	7,119	8,411	8,337	6,543	3,293	
$M_s' \frac{t}{y_s}$ { l (kiri)		2,05	3,92	5,71	7,51	8,10	7,36	4,70	
$M_s' \frac{t}{y_s}$ { r (kanan)	0	2,30	4,57	6,86	8,84	9,25	8,05	4,95	
M^o	0	2,00	4,00	6,00	8,00	9,00	8,00	5,00	0
$M^o - M_s' \frac{t}{ys}$ { l	—0,05	0,08	0,29	0,49	0,90	0,64	0,30	0	
$M^o - M_s' \frac{t}{ys}$ { r	—0,30	—0,57	—0,86	—0,84	—0,25	—0,05	—0,05	0	
$M_a = M_b = \frac{1}{2} \times$ { l	—0,025	0,04	0,145	0,245	0,45	0,32	0,15		
{ r	—0,15	—0,285	—0,43	—0,42	—0,125	—0,025	0,025		

Penjelasan : Sebagai contoh kita ambil kotakan 2, diapit oleh t_2 dan t_3. $M_s' = 3{,}187\,(tm)$; $y_s = 1{,}46\,(m)$; $M_s' \cdot \frac{t_2}{y_s} = 3{,}187 \cdot \frac{1{,}05}{1{,}46} =$

$$= 2{,}30\,(tm)\,;\; M_s' \frac{t_3}{y_s} = 3{,}187 \cdot \frac{1{,}80}{1{,}46} = 3{,}92\,(tm);$$

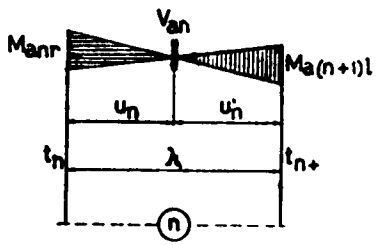
$$M_2^o = 2{,}00\,(tm);\; M_3^o = 4{,}00\,(tm)$$

$$M_{2r} = M_2^o - M_s' \frac{t_2}{y_s} = 2{,}00 - 2{,}30 = -0{,}30\,(tm)$$

$$M_{3l} = M_3^o - M_s' \frac{t_3}{y_s} = 4{,}00 - 3{,}92 = +0{,}08\,(tm)$$

Dua besaran-besaran yang belakangan ini berarti jumlah momen pada ujung-ujung batang atas dan bawah di kanan tihang 2 dan di kiri tihang 3 (jadi $M_{a2r} + M_{b2r}$ + dan $M_{a3l} + M_{b3l}$). Masing-masing batang meneri - ma separoh dari nilai-nilai ini, jadi $M_{a2r} = \frac{1}{2}.(-0{,}30) = -0{,}15\ tm = M_{b2r}$.

$M_{a3l} = M_{b3l} = \frac{1}{2}.0{,}08 = 0{,}04\ tm$



Gambar X, 10a

Sebagai kontrol: $M_t = +(M_{al} - M_{ar}) = \pm \frac{1}{2}(M_l - M_r)$

$M_{t2} = +0{,}121\,(tm)$; $M_{2l} = -0{,}05\,(tm)$

dan $M_{2r} = -0{,}30\,(tm)$

$\pm \frac{1}{2}(M_{2l} - M_{2r}) = \pm \frac{1}{2}.0{,}25 =$

$= \pm 0{,}152\,(tm) \approx M_{t2}$

$\Sigma Q = o$.

$\Sigma Q = 1{,}953 + 0{,}230 \ldots . - 4{,}707 \approx o$

Selanjutnya gaya-gaya normal pada batang tepi terdapat :

$$A = -B = (H' + \Delta H)\sec\varphi$$

Muatan tiap titik hubungan P = λq = 2.½t = 1 t untuk tihang - tihang 2', 3', dan 4' serta ½qλ untuk 1' dan 5'; dan a untuk titik-titik hubungan lainnya.

Gaya-normal tihang:

$$T_n = V_{a(n-1)} - V_{an} + A_{n-1}\sin\varphi_{n-1} - A_n \sin\varphi_n - P$$

atau : $T = -\{\Delta V_a + \Delta(A\sin\varphi) + P\}$, jika P bekerja di titik hubungan atas V_a terdapat menurut gambar X, 10 a:

$M_{anr} = -V_{an}\mu_n$

$M_{a(n+1)l} = V_{an}\mu_n'$

$M_{a(n+1)l} - M_{anr} = V_{an}(\mu_n + \mu_n') = V_{an}\lambda\;;\; V_{an} = \frac{1}{\lambda}(M_{a(n-1)l} - M_{anr})$

§ 10. Rasuk paralel.

Di sini panjang tihang t tetap dan panjang batang tepi a = b = λ

Jika I' = momen inersia tihang dan I = momen inersia batang tepi maka untuk - memudahkan pekerjaan kita ambil :

$$\frac{\lambda}{t}\frac{I'}{I} = k;\ \text{jadi}\ \frac{\lambda}{t}\frac{I_n'}{I_n} = k_n$$

$$\alpha_n = \frac{t^3}{3EI_n}\;;\; \beta_n = \frac{1}{EI_n}\cdot a_n y_s(t_n + t_{n+1}) = \frac{2\lambda t}{EI_n}$$

$\alpha_n' = \alpha_n \frac{EI_o'}{t^3} = \frac{1}{3}\frac{I_o'}{I_n'}$ di mana I_o' itu sesuatu nilai yang tetap

$$\beta_n' = \beta_n \frac{EI_o'}{t^3} = 2\frac{\lambda}{t}\cdot\frac{I_n'}{I_n} = 2k_n\frac{I_n'}{I_n'}$$

$$\alpha_{n+1}' = \alpha_{n+1}\cdot\frac{EI_o'}{t^3} = \frac{1}{3}\frac{I_o'}{I_{n+1}'}$$

$$\beta_{n+1}' = \beta_{n+1}\cdot\frac{EI_o'}{t^3} = 2k_{n+1}\cdot\frac{I_o'}{I_{n+1}'}$$

$$(\alpha_n' + \beta_n')\Delta H_n = \alpha_n'\Delta H_{n-1} + \alpha_n' Q_{n+1}' - \alpha_n' Q_n'$$

$$\left(\tfrac{1}{3}\cdot\frac{I_o'}{I_n'} + 2k_n\frac{I_o'}{I_n'}\right)\Delta H_n = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{I_o'}{I_n'}\Delta H_{n-1} + \tfrac{1}{3}\frac{I_o'}{I_{n+1}'}Q_{n+1}' - \tfrac{1}{3}\frac{I_o'}{I_n'}Q_n$$

$$(\tfrac{1}{3} + 2k_n)\Delta H_n = \tfrac{1}{3}\Delta H_{n-1} + \tfrac{1}{3}\frac{I_n'}{I_{n+1}'}Q_{n+1}' - \tfrac{1}{3}Q_n'$$

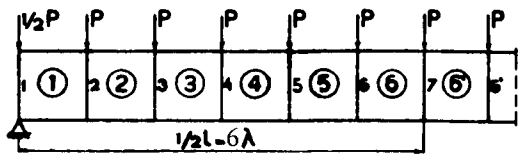
$$\Delta H_n = \frac{\Delta H_{n-1} + (I_n'/I_{n+1}')Q_{n+1}' - Q_n'}{1 + 6k_n}$$

Sebagai teladan kita ambil :

$$\lambda = t = \tfrac{1}{12}\,l;\ I_n = I_n' = I\ (\text{tetap})\ y_s = t = \lambda;\ k_n = k = 1;\ \frac{I_n'}{I_{n+1}'} = 1$$

$$\Delta H_n = \frac{\Delta H_{n-1} + Q_{n+1}' - Q_n'}{1 + 6} = \tfrac{1}{7}(\Delta H_{n-1} + (\Delta Q')_n)$$

Muatan di tian-tiap tihang antara adalah P (tetap) dan di tihang-tihang



Gambar X, 11

ujung ½ P. Jadi garis M° berjalan simetris. Momen-momen di dalam daftar ini terbilang dengan Pλ dan kekuatan-kekuatan dengan P.

Tihang / Lapangan	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	6′	
M^o	0,0		5,50		10,0		13,50		16,0		17,50		18,00	17,50	Pλ
M_s^o		2,75		7,75		11,75		14,75		16,75		17,75	17,75		Pλ
$H' = \frac{M_s^o}{y_s} = \frac{1}{\lambda} M_s^o$		2,75		7,75		11,75		14,75		16,75		17,75	17,75		P
$Q' = \Delta H'$	2,75		5,00		4,00		3,00		2,00		1,00		0,00	—1,00	P
$\Delta Q'$		—2,25		—1,00		—1,00		—1,00		—1,00		—1,00	—1,00		P

$$n = 1; \Delta H_{n-1} = 0; \Delta H_1 = \tfrac{1}{7} . 2{,}25P = 0{,}321P$$
$$n = 2; \Delta H_2 = \tfrac{1}{7}(0{,}321 - 1{,}00)P = - \ 0{,}096P$$
$$n = 3; \Delta H_3 = \tfrac{1}{7}(- 0{,}096 - 1{,}00)P = - 0{,}157P$$
$$n = 4; \Delta H_4 = \tfrac{1}{7}(- 0{,}157 - 1{,}00)P = - 0{,}165P$$
$$n = 5; \Delta H_5 = \tfrac{1}{7}(- 0{,}165 - 1{,}00)P = - 0{,}166P$$
$$n = 6; \Delta H_6 = \tfrac{1}{7}(- 0{,}166 - 1{,}00)P = - 0{,}167P$$

Tihang	1	2	3	4	5	6	7	6′	P
ΔH	0,321	0,321	—0,096	—0,157	—0,165	—0,166	—0,167	—0,167	P
$\Delta Q = \Delta(\Delta H)$		—0,417	—0,061	—0,008	—0,001	—0,001	0,00	0,001	P
$Q = Q' + \Delta Q$	3,071	4,583	3,939	2,992	1,999	0,999	0,00	—0,999	P
$+ M_t = \frac{1}{2} Q . t$	1,536	2,291	1,970	1,496	1,000	0,500	0,0	—0,500	Pλ
$\Delta H . y_s$		0,321	—0,096	—0,157	—0,165	—0,166	—0,167	—0,167	Pλ
$M' = M_s^o + \Delta H . y_s$		3,071	7,654	11,593	14,585	16,584	17,583	17,583	Pλ
$M^o - M' \{ {}^{l}_{r}$		2,429	2,346	1,907	1,415	0,916	0,417	—0,083	Pλ
		—3,071	—2,154	—1,593	—1,085	—0,584	—0,083	0,417	Pλ
$M_a = M_b = \frac{1}{2} \times \{ {}^{l}_{r}$		1,215	1,173	0,954	0,708	0,458	0,209	—0,04	2Pλ
		—1,536	—1,027	—0,797	—0,543	—0,292	—0,042	0,209	Pλ

Gaya-gaya normal pada batang terdapat demikian (lihat § 9 penghabisan).

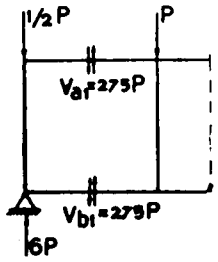
$$A = - B = H = H + \Delta H$$

$T = -(\Delta V_a + P)$, sebab sin $\varphi = o$; tanda – untuk kekuatan menekan.

$V_a = \frac{1}{\lambda}(M_{ar} - M_{al})$, petunjuk-petunjuk l dan r dipakai terhadap lapangan, jadi tidak terhadap tihang.

Tihang		1	2	3	4	5	6	7	
$M_a \{ {}^{r}_{l}$		1,215	1,173	0,954	0,708	0,458	0,209		Pλ
	—1,536	—1,027	—0,797	—0,543	—0,292	—0,042	0,209		Pλ
V_a		2,75	2,25	1,75	1,25	0,75	0,25		P
ΔV_a	2,75	—0,50	—0,50	—0,50	—0,50	—0,50	—0,50		P
T (menskan)	3,25	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50		P

Hasil-hasil untuk T cocok dengan pendapat di dalam §6 bahwa T=½P. Pada titik hubungan atas pertama, beban luar hanya ada ½P. Jadi jumlah kekuatan menekan ada T_1 = ½P + 2,75P = 3,25P (gambar X, 11a). Kita juga mendapat berdasarkan atas titik-hubungan bawah pertama. Di situ bekerja reaksi perletakan sebesar 6P.



Gambar X, 11a

$$T_1 = 6P - 2{,}75P = 3{,}25P$$

Atau juga: Jika pada titik hubungan atas tak ada beban, kekuatan normal di tihang pertama akan terdapat ½ x 6P = 3P. Jika hanya ada mu atan ½P di titik hubungan atas, kekuatan normal ada ½.½P = ¼P. Jadi jumlah kekuatan normal pada tihang ada T_1 = 3P + ¼P = 3,25P

§11. Perancah atau pilar paralel.

Di sini tihang-tihang terletak mendatar dan batang tongkat tepi vertikal Selanjutnya: $\lambda = t = \frac{1}{3}l$; $y_s = \lambda$.

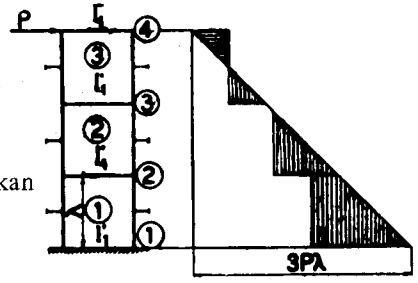
$I_2 = \infty$ dan untuk tihang lain-lainnya $\frac{I}{I} = 4$, jadi $k_1 = \frac{\lambda}{t}\frac{I_1}{I} = \infty$ dan untuk lain-lainnya $k = \frac{1}{4}$.

$$\Delta H_n = \frac{\Delta H_{n-1} + (I_n'/I_{n+1}')Q_{n+1}' - Q_n'}{1 + 6k_n}$$

Muatan mendatar P di titik hubungan teratas.

Sesudah menghitung secara daftar besaran-besaran sementara, kita mengadakan korreksi-korreksi:

$$n = 1; k_1 = \frac{\lambda}{t} \cdot \frac{I_n'}{I}; \Delta H_o = 0$$



Gambar X, 12

$$\Delta H_1 = \frac{o + (I_1'/I')Q_2' - Q_1'}{1 + 6(\lambda/t)(I_1'/I)} = \frac{(I/I')Q_2' - (I/I_1')Q_1'}{I/I_1' + 6(\lambda/t)} = \frac{4 \times 1{,}0P - 0}{0 + 6} = 0{,}667P$$

$$n = 2; \Delta H_2 = \frac{\Delta H_1 + Q_3' - Q_2'}{1 + 6 + \frac{1}{4}} = \frac{0{,}667}{2{,}5} P = 0{,}267P$$

$$n = 3; \Delta H_3 = \frac{0{,}267 + 0{,}5 - 1{,}0}{2{,}5} P = 0{,}093P$$

Tihang	1	2	3	4	
M^o	— 3	— 2	— 1	0	$P\lambda$
M_s^o		— 2,5	— 1,5	— 0,5	$P\lambda$
$H' = \frac{1}{y_s} M_s^o$		— 2,5	— 1,5	— 0,5	P
$Q' = \Delta H'$	— 2,5	+ 1,0	+ 1,0	+ 0,5	P

Tihang	1	2	3	4	
ΔH		0,667	0,267	— 0,093	P
ΔQ	0,667	— 0,400	— 0,360	0,093	P
$Q = Q' + \Delta Q$	÷ 1,833	+ 0,600	+ 0,640	+ 0,593	P
$\pm M_t = \pm \frac{1}{2} Q \cdot t$	—	0,300	0,320	0,297	$P\lambda$
$H \cdot y_s$		0,667	0,267	— 0,093	$P\lambda$
$M_s' = M_s^o + \Delta H \cdot y_s$		— 1,833	— 1,233	— 0,593	$P\lambda$
$M^o - M_s'$ l		— 0,167	0,233	— 0,593	$P\lambda$
$M^o - M_s'$ r	— 0,167	— 0,767	— 0,407		$P\lambda$
$M_a = M_b$ l		— 0,084	0,117	— 0,297	$P\lambda$
$M_a = M_b$ r	— 0,584	— 0,383	— 0,203		$P\lambda$
$V_a = V_b$	0,50	0,50	0,50		$P\lambda$
$\Delta V_a = \Delta V_b$		0,0	0,0	— 0,50	$P\lambda$

$$T_2 = T_3 = o; T_4 = -(\div 0{,}50P + P) = \div 0{,}50P \text{ (menekan)}$$

$$A_1 = -B_1 = H_1' + \Delta H_1 = (-2{,}5 + 0{,}667)P = -1{,}833P \text{ (menarik untuk } A_1)$$

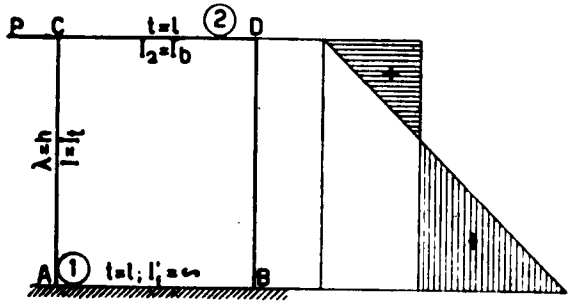
$$A_2 = -B_2 = H_2 + \Delta H_2 = (-1{,}5 + 0{,}267P) = -1{,}233P$$

$$A_3 = -B_3 = H_3' + \Delta H_3 = -0{,}593P$$

§ 12. Portal terjepit.

Muatan mendatar P di ujung C.

Tihang	1	2	
M_o	— 1,0	$0 \times Ph$	
M_s^o	— 0,5	Ph	
$H' = \frac{M_s^o}{y_s} = \frac{M_s^o}{l}$	— 0,5	$P\frac{h}{l}$	
$Q' = \Delta H'$	— 0,5	0,5	$P\frac{h}{l}$



Gambar X, 13

$$k_1 = \frac{\lambda}{t}\frac{I_1'}{I} = \frac{h}{l}\frac{I'}{I} = \infty$$

$$k_2 = \frac{\lambda}{t}\frac{I_2'}{I} = \frac{h}{l}\frac{I_b}{I_t} = k$$

menurut rumus portal.

Kita mempergunakan rumus-korreksi yang seksama (§ 7).

$$\beta_n \Delta H_n = (\alpha_{n+1} Q_{n+1} + \alpha_{n+1} \Delta Q_{n+1}) - (\alpha_n Q_n' + \alpha_n \cdot \Delta Q_n) \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\Sigma Q = \Sigma(Q' + \Delta Q) = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$n = 1; \alpha_n = \alpha_1 = \tfrac{1}{3}\frac{t^3}{EI_1'} = \tfrac{1}{3}\frac{l^3}{EI_1'}; \alpha_1 = \alpha_1 EI_b \times \frac{1}{l^3} = \tfrac{1}{3}\frac{I_b}{I_1'} = o$$

$$n = 2; \alpha_n = \alpha_2 = \tfrac{1}{3}\frac{t^3}{EI_2'} = \tfrac{1}{3}\frac{l^3}{EI_b}; \alpha_2 = \alpha_2 \cdot EI_b \cdot \frac{1}{l^3} = \tfrac{1}{3}$$

$$\beta_n = \beta_1 = 2\frac{\lambda t^2}{EI} = 2h\frac{l^2}{EI_t}; \beta_n' = \beta_n EI_b \frac{1}{l^3} = 2\frac{h}{l}\frac{I_b}{I_t} = 2k$$

$$\Delta H_1 = \Delta Q_1$$

$2k \cdot \Delta Q_1 = \frac{1}{3} Q_2' + \frac{1}{3}\Delta Q_2$ (1) $Q_1' + Q_2' = o$ (lihat daftar di atas)

$Q_1' + \Delta Q_1 + Q_2' + \Delta Q_2 = o$ (2) Jika $\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = o$ **atau** $\Delta Q_1 = -\Delta Q_2$

$$2k \cdot \Delta Q_1 = \tfrac{1}{3} Q_2' - \tfrac{1}{3}\Delta Q_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$(2k + \tfrac{1}{3})\Delta Q_1 = \tfrac{1}{3} Q_2'$$

$$\Delta Q_1 = \frac{Q_2'}{6k+1}$$

$$\Delta Q_2 = -\Delta Q_1 = -\frac{Q_2'}{6k+1}$$

$$Q_2 = Q_2' + \Delta Q_2 = Q_2' - \frac{Q_2'}{6k+1} = \frac{6k}{6k+1} Q_2' = \frac{3k}{6k+1} P \frac{h}{l} \text{ sebab } Q_2' = 0{,}5P \frac{h}{l}$$

Q_2 ini bekerja di tengah tengah CD.

$$M_C = Q_2 \cdot \tfrac{1}{2}CD = Q_2 \cdot \tfrac{1}{2}l = \frac{3k}{2(6k+1)} Ph$$

$$\Delta H_1 = \Delta Q_1 = \frac{1}{6k+1} \cdot \tfrac{1}{2} P \frac{h}{l} = \frac{Ph}{2(6k+1)}$$

$$\Delta H_1 y_{s_1} = \frac{Ph}{2(6k+1)}; \text{ sebab } y_{s_1} = l$$

$$M_1' = M_{s_1}^o + \Delta H_1 \cdot y_{s_1} = \left\{ -\tfrac{1}{2} + \frac{1}{2(6k+1)} \right\} Ph = -\frac{3k}{6k+1} Ph$$

$$M_A = M_{a_1 r} = \tfrac{1}{2}(M_1^o - M_1') = \tfrac{1}{2}\left(-1 + \frac{3k}{6k+1} \right) Ph = -\frac{3k+1}{2(6k+1)} Ph$$

$$V_a = \frac{1}{\lambda}(M_{a_2 l} - M_{a_1 r}) = \frac{1}{h}(M_C - M_A) = \tfrac{1}{2}P \text{ (bekerja di tengah-tengah } AC)$$

$$T_2 = N_{balok} = V_a - P = \div \tfrac{1}{2}P \text{ (menekan)}$$

Di dalam contoh-contoh menurut § 11 dan § 12, perletakan *harus jepitan* supaya boleh dianggap sebagai bangunan Vierendeel, dan mu atan harus bekerja di titik hubungan juga.

§ 13. Garis-garis pengaruh.

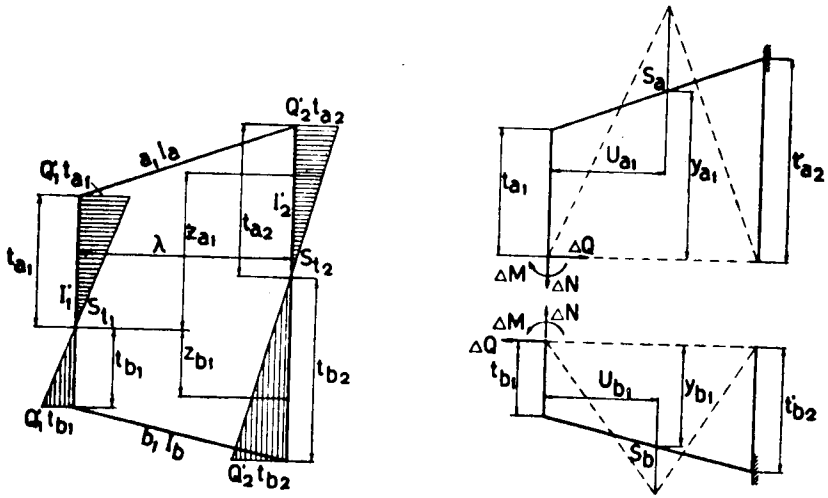
Muatan P = 1 kita kerjakan berturut-turut di titik hubungan 1,2,3, 4..... sampai penghabisan. Pada tiap-tiap kedudukan P ini kita meng - hitung besaran-besaran yang kita cahari.

§ 14. Bangunan tak simetris

Jika tihang-tihang dianggap kaku tak terhingga, kita mendapat titik-titik S_t di mana momen terdapat nol.

Apabila lengkungan tihang juga turut diperhitung, maka keadaan menjadi lain: di titik-titik S_t tersebut harus diadakan gaya korreksi terdiri dari ΔM, ΔN dan ΔQ. Jika banyaknya lapangan ada n maka kita akan mendapat 3n persamaan dengan 3n besaran tak terketahui. Untuk memudahkan pekerjaan, kita mengadakan pendekatan dengan secara mengabaikan akibat gaya-gaya korreksi itu terhadap lengkungan tihang, jadi seperti pendekatan kasaran menurut §7, di mana akibat ΔQ diabaikan.

Kita mulai dengan lapangan pertama. Sebagai akibat dari gaya-gaya N′ dan Q′ yang terdapat menurut penganggapan bahwa tihang kaku tak terhingga maka setelah mengadakan potongan dititik S_{t1} ujung-ujung - potongan ini tak akan bersatu lagi apabila tihang dianggap ikut meleng-



Gambar X, 14

kung. Ujung bagian bawah berputar sudut ke kanan sebesar φ_1 terhadap ujung bagian atas beralih vertikal ke bawah sejauh v_1 dan mendatar-ke kanan sejauh w_1. Kita mempergunakan luas dan statis momennya bidang-bidang momen untuk menghitung φ, v dan w ini.

$$\varphi_1 = \frac{1}{EI_2'} \cdot \tfrac{1}{2}Q_2'(t_{b2}^2 - t_{a2}^2) - \frac{1}{EI_1'} \cdot \tfrac{1}{2}Q_1'(t_{b1}^2 - t_{a1}^2)$$

$$v_1 = \frac{1}{EI_2'} \cdot \tfrac{1}{2}Q_2'(t_{a2}^2 - t_{a2}^2)\lambda$$

$$w_1 = \frac{1}{EI_2'} \cdot \tfrac{1}{2}Q_2'(t_{a2}^2 z_a + t_{b2}^2 z_b) - \frac{1}{EI_1'} \cdot (t_{a1}^2 + t_{b1}^2)$$

z_{a1} dan z_{b1} berarti jarak antara titik-titik berat bidang-bidang momen pada tihang 2 dari titik S_{t1}. Korreksi-korreksi ΔM, ΔN dan ΔQ diperlukan untuk membatalkan putaran sudut serta peralihan-peraliah itu, dan seperti dikemukakan di atas, akibatnya terhadap lengkungan pada tihang diabaikan, jadi hanya lengkungan pada batang-batang tepi yang diperhitung.

$$\Delta M_1\left(\frac{b_1}{EI_b}+\frac{a_1}{EI_a}\right)-\tfrac{1}{2}\Delta N_1\lambda\left(\frac{b_1}{EI_b}+\frac{a_1}{EI_a}\right)+\Delta Q_1\left\{\frac{b_1(t_{b1}+t'_{b2})}{2EI_b}-\frac{a_1(t_{a1}+t'_{a2})}{2EI_a}\right\}=\varphi_1$$

$$-\Delta M_1\left(\frac{b_1}{EI_b}+\frac{a_1}{EI_a}\right)\cdot\tfrac{1}{2}\lambda+\tfrac{1}{3}\Delta N_1\left(\frac{b_1}{EI_b}+\frac{a_1}{EI_a}\right)\lambda^2-\Delta Q_1\left\{\frac{b_1(t_{b1}+t'_{b2})}{2EIb}\mu_b-\frac{a_1(t_{a1}+t'_{a2})}{2EI_a}\cdot\mu_a\right\}=v_1$$

$$\Delta M_1\left\{\frac{b_1}{EI_b}(t_{b1}+t'_{b2})+\frac{a_1}{EI_a}(t_{a1}+t'_{a2})\right\}+\Delta N_1\lambda\left\{\tfrac{1}{2}\frac{b_1}{EI_b}\cdot\tfrac{1}{3}(t_{b1}+\tfrac{2}{3}t'_{b2})+\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{a_1}{EI_a}\cdot\tfrac{1}{3}(t_{a1}+2t'_{a2})\right\}+\Delta Q_1\left\{\frac{b_1(t_{b1}+t'_{b2})}{2EI_b}\cdot y_{b1}+\frac{a_1(t_{a1}+t'_{a2})}{2EI_a}\cdot y_{a1}\right\}=w_1$$

S_{b1} terletak digaris vertikal melalui titik berat trapesium t_{b1} t_{b2}, u_{b1} =jarak . nya dan tihang pertama dan y_{b1} = jaraknya vertikal terhadap S_{t1}, dan seterus nya

Dengan tiga persamaan ini, kita dapat menghitung ΔM, ΔN dan ΔQ.

Sesudah itu, kita meneruskan dengan lapangan kedua, secara memotong tiang kedua di titik S_{t2}. Di sini harus diingat, bahwa ΔM_1, ΔN_1 dan ΔQ_1 yang bekerja pada S_{t1} juga mempengaruhi atas lengkungan pada batang-batang a_2 dan b_2 di lapangan kedua ini.

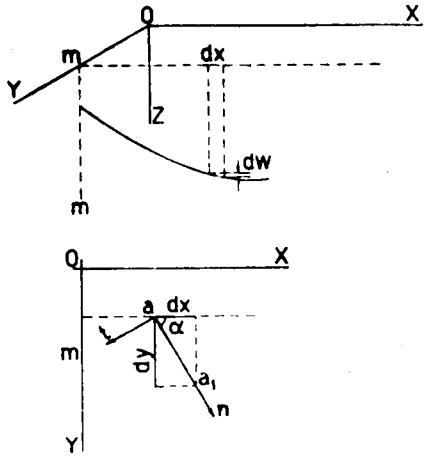
Kita juga dapat mengambil pendekatan secara kasaran, yaitu dengan mengganti bangunan dengan bangunan yang simetris yang tinggi tihangtihangnya sama

BAB XI

LANTAI DIBENGKOK MURNI

§ 1. Sudut serong pada lantai melengkung.

Sebelum lantai melengkung bidang tengahnya dianggap sebagai bidang-XOY. Ketika lantai melengkung titik-titik pada bidang tengah ini beralih ke arah vertikal yang amat kecil jauhnya, yaitu sejauh w, yang dinamakan *ordinat-lengkungan* atau *lengkungan* saja (deflection).



Gambar XI, 1

Bidang tengah pada tampang // ZOX mempunyai serong ke arah OX sebesar $i_x = \frac{\delta w}{\delta x}$ dan bidang tengah pada tampang // YOZ mempunyai serong ke arah OY sebesar $i_y = \frac{\delta w}{\delta y}$. Kedua-dua tampang itu melalui titik a yang terletak di bidang tengah lantai. Atau lebih pendek, kita mengatakan bahwa pada sesuatu titik a di bidang tengah lantai, serongnya ke arah OX = i_x dan ke arah OY = i_y.

Sekarang kita mempelajari serong ke arah an yang membentuk sudut α dengan arah OX. Beda lengkungan pada titik a_1 dan titik a terdapat

$$dw = \frac{\delta w}{\delta x}dx + \frac{\delta w}{\delta y}dy.$$

Serongnya menjadi :

$$i_n = \frac{\delta w}{\delta n} = \frac{\delta w}{\delta x}\cdot\frac{dx}{dn} + \frac{\delta w}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dn} = \frac{\delta w}{\delta x}\cos\alpha + \frac{\delta w}{\delta y}\sin\alpha = i_x\cos\alpha + i_y\sin\alpha \quad (1)$$

Kita akan menentukan sudut $\alpha = \alpha_1$ supaya serong menjadi maximum.

Ini terdapat jika $\frac{di_n}{d\alpha} = o$

$$-i_x\sin\alpha + i_y\cos\alpha = o;\ \alpha = \alpha_1$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{i_y}{i_x}$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha_1)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+i_y^2/i_x^2)}} = \frac{i_x}{\sqrt{(i_x^2+i_y^2)}}$$

$$\sin\alpha_1 = \cos\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{i_y}{\sqrt{(i_x^2+i_y^2)}}$$

$$\text{Max } i_n = i_x\cos\alpha_1 + i_y\sin\alpha_1 = \frac{i_x^2+i_y^2}{\sqrt{(i_x^2+i_y^2)}} = \sqrt{(i_x^2+i_y^2)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\delta w}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta w}{\delta y}\right)^2}$$

Sekarang menentukan $\alpha = \alpha_2$ supaya serong menjadi nol.

$$i_x\cos\alpha_2 + i_y\sin\alpha_2 = o$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = -\frac{i_x}{i_y} = -\operatorname{tg}\alpha_1$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2 = -1$$

Ini berarti bahwa arah serong maximum $\perp$ arah serong nol.

§2. Bengkokan pada lantai melengkung.

Jika radius bengkokan itu disebutkan r, maka derajat bengkokan berarti 1/r (dipendek "bengkokan" saja).

Serupa dengan soal pada garis elastis, akan terdapat di sini :

$$\frac{1}{r_x} = -\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \text{ dan } \frac{1}{r_y} = -\frac{\delta^2 w}{\delta y^2}$$

Bengkokan dianggap *positif*, jika lantai terbengkok *konvex ke bawah* (analoog dengan balok terbengkok), seperti terlihat di gambar XI, 1. Di situ terdapat bahwa $i_x = \frac{\delta w}{\delta x}$ berkurang jika x bertambah. Jadi $\frac{di_x}{dx} = \frac{\delta^2 w}{\delta x^2}$ bernilai negatif, sedang $1/r_x$ bernilai positif menurut anggapan tadi. Berhubung dengan ini harus diadakan tanda – di muka $\frac{\delta^2 w}{dx^2}$ supaya $\frac{1}{r_x}$ bernilai positif.

Hal di atas ini jika berlaku untuk i_y serta $\frac{\delta^2 w}{\delta y^2}$.

Bengkokan ke arah n terdapat : $\frac{1}{r_n} = -\frac{\delta^2 w}{\delta n^2} = -\frac{\delta(\delta w/\delta w)}{\delta n} =$

$= -\left(\frac{\delta(\delta w/\delta n)}{\delta x}\cdot\frac{dx}{dn} + \frac{\delta(\delta w/\delta n)}{\delta y}\frac{dy}{dn}\right)$. Menurut rumus i_n terdapat :

$\frac{\delta}{\delta n} = \frac{\delta}{\delta x}\cos\alpha + \frac{\delta}{\delta y}\sin\alpha.$

Jadi $\frac{\delta(\delta w/\delta n)}{\delta n} = \frac{\delta}{\delta n}\cdot\frac{\delta w}{\delta n} = \frac{\delta}{\delta n}\cdot i_n = \frac{\delta}{\delta n}\left(\frac{\delta w}{\delta x}\cos\alpha + \frac{\delta w}{\delta y}\sin\alpha\right)$

$$\frac{1}{r_n} = -\left(\frac{\delta}{\delta x}\cos\alpha + \frac{\delta}{\delta y}\sin\alpha\right)\left(\frac{\delta w}{\delta x}\cos\alpha + \frac{\delta w}{\delta y}\sin\alpha\right) =$$

$$= -\left(\frac{\delta^2 w}{\delta x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\delta^2 w}{\delta x\delta y}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{\delta^2 w}{\delta y^2}\sin^2\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{r_x}\cos^2\alpha - \frac{1}{r_{xy}}\sin 2\alpha + \frac{1}{r_y}\sin^2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2a)$$

$\frac{1}{r_{xy}} = \frac{\delta^2 w}{\delta x\delta y}$ dinamakan *twist* atau *drill* terhadap sumbu – X dan sumbu – Y

Sekarang mempelajari arah *at* $\perp$ *an*. Di sini α diganti dengan $\alpha + \frac{1}{2}\pi$.

$$\frac{1}{r_t} = \frac{1}{r_x}\sin^2\alpha + \frac{1}{r_{xy}}\sin 2\alpha + \frac{1}{r}\cos^2\alpha \ldots\ldots\ldots \quad (2b)$$

$\frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_t} = \frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y}$, tak tergantung kepada nilai α. ..... (3)

Jumlah ini dinamakan *bengkokan-bengkokan rata-rata* pada sesuatu titik. $\frac{1}{r_{nt}} = \frac{\delta(\delta/w/\delta n)}{\delta t} = \frac{\delta^2 w}{\delta n\,\delta t}$ dinamakan twist atau drill terhadap arah ***an*** **dan arah** ***at***.

Oleh karena *an* $\perp$ *at* maka $\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta x}\cos(\alpha+90°) + \frac{\delta}{\delta y}\sin(\alpha+90°)$

$= -\frac{\delta}{\delta x}\sin\alpha + \frac{\delta}{\delta y}\cos\alpha$ atau juga: $\frac{\delta(\delta w/\delta n)}{\delta t} = \frac{\delta(\delta w/dn)}{\delta x}\frac{dx}{\delta t} + \frac{\delta(\delta w/\delta n)}{\delta y}$

$\frac{dy}{dt}$, sedang $\frac{dx}{dt} = -\sin\alpha$ dan $\frac{dy}{dt} = \cos\alpha$

$$\frac{1}{r_{nt}} = \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta w}{\delta n}\right) = \left(-\frac{\delta}{\delta x}\sin\alpha + \frac{\delta}{\delta y}\cos\alpha\right)\left(\frac{\delta w}{\delta x}\cos\alpha + \frac{\delta w}{\delta y}\sin\alpha\right) =$$

$$= \left(-\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 w}{\delta y^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha + \frac{\delta^2 w}{\delta x\delta y}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y}\right)\sin 2\alpha + \frac{1}{r_{xy}}\cos 2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Kita sekarang akan menentukan α supaya bengkokan menjadi extrem. $\frac{d1/r_n}{d\alpha} = o$. Ini dijalankan pada rumus (2a) menghasilkan

$$-\frac{1}{r_x}\sin 2\alpha - 2\frac{1}{r_{xy}}\cos 2\alpha + \frac{1}{r_y}\sin 2\alpha = o$$

$$-\left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y}\right)\sin 2\alpha - \frac{2}{r_{xy}}\cos 2\alpha = o$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2/r_{xy}}{1/r_x - 1/r_y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Menurut pendapat ini, kita memperoleh 2 nilai α yang berbeda ½π antara satu sama lain, sedang yang satu menunjukkan arah dengan bengkokan maximum dan yang lainnya menunjukkan arah dengan bengkokan minimum.

Bengkokan-bengkokan maximum dan minimum (extrem) ini dinamakan *bengkokan-bengkokan dasar* atau *pokok (atau utama).*

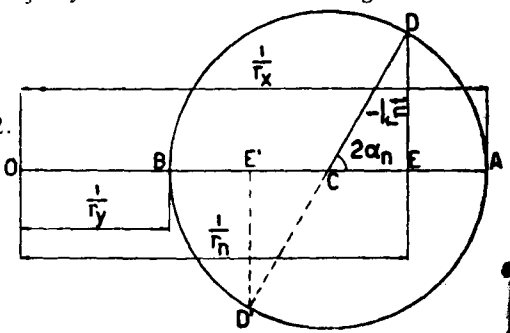
Nilai rumus (5) = – 2 x nilai rumus (4), yang berarti bahwa $\frac{1}{r_{nt}}$ juga nol (sebab nilai (5) = a).

Jadi bilamana an dan at itu terletak di tampang-tampang bengkokan pokok, maka twist terhadapnya sama dengan nol (analoog dengan tegangan-tegangan serong utama).

§3. Menggunakan lingkaran-Mohr.

Tampang-tampang ZOX dan ZOY dipilih sejajar dengan tampang-tampang bengkokan dasar, jadi $\frac{1}{r_{xy}} = o$. Selanjutnya kita boleh memakai lingkaran Mohr untuk melukiskan jalannya perobahan nilai-nilai perbengkokan – dan twist sebagai f(a), gambar XI, 2.

Besaran-besaran $\frac{1}{r_x}$ dan $\frac{1}{r_y}$ kita lukiskan oleh panjang garis-garis OA dan OB sehingga $OA = \frac{1}{r_x}$ dan $OB = \frac{1}{r_y}$.



Gambar XI 2.

Oleh karena arah OX dan arah OY menunjukkan bengkokan-bengkokan extrem, maka $\frac{1}{r_{xy}} = o$.

Kita mempelajari bengkokan bengkokan menurut arah n yang membentuk sudut sebesar α_n dengan sumbu OX dan menurut arah t ⊥ n yang dengan begitu membentuk sudut $\alpha_t = \alpha_n + 90^\circ$ dengan sumbu X.

$$\frac{1}{r_n} = \frac{1}{r_x}\cos^2\alpha_n + \frac{1}{r_{xy}}\sin^2\alpha_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2a)$$

$$\frac{1}{r_{nt}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y}\right)\sin 2\alpha_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Kita menggambar lingkaran yang melalui titik-titik A serta B dan yang berpusat di atas garis OA (titik C). Kemudian menentukan titik D di atas lingkaran sehingga $< \mathrm{BCD} = 2\alpha_n$ (lingkaran Mohr).

$$CD = CB = \tfrac{1}{2}BA = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y}\right)$$

$$OC = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y}\right)$$

$$OE = OC + CD\cos 2\alpha_n =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y}\right)\cos 2\alpha =$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{r_x}(1 + \cos 2\alpha_n) + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{r_y}(1 - \cos 2\alpha_n) =$$

$$= \frac{1}{r_x}\cos^2\alpha_n + \frac{1}{r_y}\sin^2\alpha_n =$$

$$= \frac{1}{r_n}$$

$$DE = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y}\right)\sin 2\alpha_n = \frac{1}{r_{nt}}$$

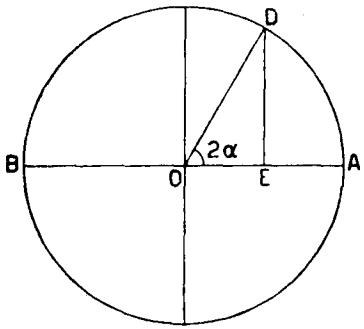
$$OE' = \frac{1}{r_t}$$

Maximum-twist terdapat jika $2\alpha_n = \tfrac{1}{2}\pi =$ atau $\alpha_n = \tfrac{1}{4}\pi$, jadi $\alpha_t = \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\pi$

Ini tercapai jika kita mengambil kedua-dua arah ⊥ satu sama lain, yang membelah sudut antara kedua-dua tampang dasar.

Jika $\frac{1}{r_x}$ dan $\frac{1}{r_y}$ mempunyai tanda yang sama (kedua-duanya + atau –), di dalam menggambar lingkaran-Mohr kita melukiskannya ke arah yang sama (titik-titik A dan B kedua-duanya di sebelah kanan atau kiri titik 0). Di dalam keadaan demikian, bengkokan ke arah manapun, terdapat juga mempunyai tanda yang sama. (selalu positif atau selalu negatif). Pembengkokan lantai secara demikian ini dinamakan *synklastik.*

Bilamana bengkolan-bengkolan dasar berlawanan tandanya, keadaan kita namakan *anti-klastik.* Sebagai contoh ialah bidang "lapak".



Gambar XI, 3

Kejadian khusus terdapat, apabila $\frac{1}{r_x} = -\frac{1}{r_y}$.

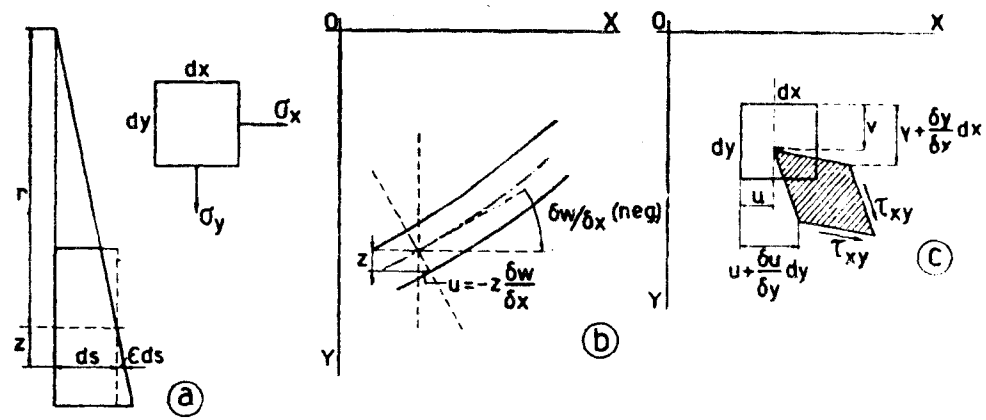
Pada lingkaran Mohr terlihat :

$$OA = \frac{1}{r_x} \text{ dan } OB = -OA = \frac{1}{r_y}$$

Bengkokan bernilai nol untuk $2\alpha = \frac{1}{2}\pi$ dan $\frac{3}{2}\pi$ atau $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ dan $\frac{3}{4}\pi$.

Twisnya menjadi $\pm\frac{1}{r_x}$ atau $\mp\frac{1}{r_y}$.

§4. Hubungan antara bengkokan dan tegangan.



Gambar XI, 4

Robahan-panjang pada serat yang letaknya sejauh z dari garis netral ada - lah εds (gambar XI, 4a). $\varepsilon ds : ds = z : r$

$$\varepsilon = \frac{z}{r}$$

Robahan panjang ke arah X menjadi $\varepsilon_x = \frac{z}{r_x}$ dan ke arah Y, $\varepsilon_y = \frac{z}{r_y}$. Jika m berarti kontraksi modulus dan $\nu = \frac{1}{m}$ akan terdapat :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu . \sigma_y) \text{ dan } \varepsilon_y = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\left.\begin{array}{l|l|l} \sigma_x - \nu . \sigma_y = E . \varepsilon_x & \sigma_x - \nu . \sigma_y = E . \varepsilon_x & (1-\nu^2)\sigma_x = E(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ -\nu\sigma_x + \sigma_y = E . \varepsilon_y & -\nu^2\sigma_x + \nu\sigma_y = \nu E\varepsilon_y & (-\nu^2)\sigma_y = E(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = \frac{E}{1-\nu^2} . z\left(\frac{1}{r_x} + \nu . \frac{1}{r_y}\right) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{E}{1-\nu^2} . z\left(\nu . \frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y}\right) \end{array}\right\} \ldots\ldots (6)$$

Robahan sudut: $\gamma_{xy} = \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x}$ **(gambar XI, 4c)**

$u = -z\frac{\delta w}{\delta x}$ (gambar XI, 4b); $v = -z\frac{\delta w}{\delta y}$ (analoog dengan u)

$$\frac{\delta u}{\delta y} = -z\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \; ; \; \frac{\delta v}{\delta x} = -z\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} = -2z\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y}$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = -2Gz\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

Jika u diukur ke arah n dan v ke arah t, rumus (7) menjadi:

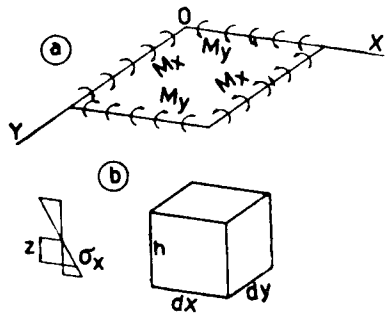
$$\tau_{nt} = -2Gz\frac{\delta^2 w}{\delta n \delta t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7a)$$

§ 5. Hubungan dengan momen.

Bidang XOY bersatu padu dengan bidang tengah lantai sebelum dibengkok Sumbu – X dan sumbu – Y masing masing membentuk sisi lantai.

M_X dan M_Y diambil momen saban satuan ukuran panjang. jadi ber dimensi (kg m/m) = (kg).

Selanjutnya momen dianggap *positif* jika menimbulkan tegangan-menekan di bagian atas dan pada akhirnya tebal lantai h dianggap amat kecil terhadap ukuran-ukuran panjang dan lainlain Menurut gambar XI,–5b, kita mendapat :

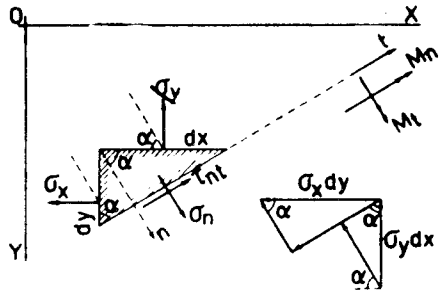


Gambar XI, 5

$$M_x \cdot dy = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \sigma_x dz \cdot z \cdot dy = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{r_x} + \nu\frac{1}{r_y}\right) dy \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} z^2 dz$$

$$M_y \cdot dx = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \sigma_y dz \cdot z \cdot dx = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y}\right) dx \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} x^2 dz$$

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \frac{E \cdot \frac{1}{12}h^3}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{r_x} + \nu\frac{1}{r_y}\right) = D\left(\frac{1}{r_x} + \nu\frac{1}{r_y}\right) = -D\left(\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \nu\frac{\delta^2 w}{\delta y^2}\right) \\ M_y &= \frac{E \cdot \frac{1}{12}h^3}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y}\right) = D\left(\nu\frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y}\right) = -D\left(\nu\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 w}{\delta y^2}\right) \end{aligned}\right\} (8)$$



Gambar XI, 6

$D = \frac{E \cdot \frac{1}{12}h^3}{1-\nu^2}$ dan berdimensi (kg cm).

Sekarang kita mempelajari tampang//sumbu Z (vertikal) yang serong terhadap sumbu-sumbu – X dan Y (gambar XI, 6).

Syarat seimbang : $\frac{dx}{\sin\alpha} \cdot \sigma_n = \sigma_x dy \cdot \cos\alpha + \sigma_y dx \cdot \sin\alpha$

$$\frac{dx}{\sin\alpha} \cdot \tau_{nt} = \sigma_x dy \cdot \sin\alpha - \sigma_y dx \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sigma_n = \sigma_x \frac{dy}{dx}\sin\alpha\cos\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha$$

$$\tau_{nt} = \sigma_x \frac{dy}{dx}\sin^2\alpha - \sigma_y \sin\alpha\cos\alpha = \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} M_n &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \sigma_n z dz = M_x \cos^2\alpha + M_y \sin^2\alpha \\ M_{nt} &= \tfrac{1}{2}(M_x - M_y)\sin 2\alpha \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (9)$$

Tanda + untuk M_n dan M_{nt} dipakai jika vektornya berarah menurut arah n dan t yang dianggap positif.

Untuk $\alpha = 0$ terdapat $M_n = M_x$ dan untuk $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $M_n = M_y$. Di dalam kedua-dua kejadian ini, $M_{nt} = o$

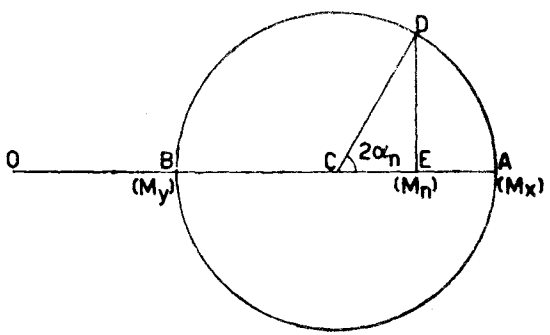
Oleh karena $M_{xy} = o$ kita dapat melukiskan nilia-nilai M_n dan M_{nt} dengan perantaraan lingkaran Mohr pula :

$OA = M_x$; $OB = M_y$

Jika α terketahui, kita dapat mengetahui :

$M_n = OE$ dan $M_{nt} = DE$

Kita juga dapat menghitung M_n dan M_{nt} tidak terbilang dengan M_x serta My, yaitu dengan rumus-rumus (9), (8) dan (2a) serta berdasarkan atas pengetahuan bahwa $\frac{1}{r_{xy}} = 0$



Gambar XI, 7

$$M_n = D\left(\frac{1}{r_x} + \nu\frac{1}{r_y}\right)\cos^2\alpha + D\left(\nu\frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y}\right)\sin^2\alpha =$$

$$= D\left(\frac{1}{r_x}\cos^2\alpha + \frac{1}{r_y}\sin^2\alpha\right) + \nu D\left(\frac{1}{r_x}\sin^2\alpha + \frac{1}{r_y}\cos^2\alpha\right) =$$

$$= D\frac{1}{r_n} + \nu D\frac{1}{r_t}$$

$$M_n = D\left(\frac{1}{r_n} + \nu\frac{1}{r_t}\right) = -D\left(\frac{\delta^2 w}{\delta n^2} + \nu\frac{\delta^2 w}{\delta t^2}\right) \quad \cdots\cdots (10)$$

Dengan mempergunakan (7a):

$$M_{nt} = -\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \tau_{nt} z\,dz = 2G\frac{\delta^2 w}{\delta n\,\delta t}\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} z^2\,dz = \tfrac{1}{6}Gh^3\cdot\frac{\delta^2 w}{\delta n\,\delta t}$$

$$\frac{E}{(1-\nu^2)}\cdot\tfrac{1}{12}h^3 = D \text{ dan } G = \frac{E}{2(1+\nu)} = D\frac{1-\nu^2}{\frac{1}{12}h^3\cdot 2(1+\nu)} = D\frac{(1-\nu)}{\frac{1}{6}h^3}$$

$$M_{nt} = (1-\nu)D\frac{\delta^2 w}{\delta n\,\delta t} \quad \cdots\cdots (11)$$

§ 6. **Kejadian-kejadian khusus.**

a. $M_x = M_y = M$. Kita menggunakan rumus (8)

$$\frac{1}{r_x} + \nu\frac{1}{r_y} = \frac{M}{D} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\nu\cdot\frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y} = \frac{M}{D} \quad \cdots\cdots (2)$$

$$(1-\nu^2)\frac{1}{r_x} = (1-\nu)\frac{M}{D} \quad \cdots\cdots (1)-(2)$$

$$\frac{1}{r_x} = \frac{1}{r_y} = \frac{M}{(1+\nu)D}$$

b. Pada umumnya, jika $M_x \neq M_y$ kita dapat menulis: $M_x = M_1$ dan $M_y = M_2$.

Menurut (8) kita mendapat :

$$\left(\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \nu\frac{\delta^2 w}{\delta y^2}\right) = -\frac{M_1}{D}$$

$$\left(\nu\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 w}{\delta y^2}\right) = -\frac{M_2}{D}$$

$$(1-\nu^2)\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} = -\frac{M_1 - \nu M_2}{D}\,;\ \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} = -\frac{M_1 - \nu M_2}{(1-\nu^2)D} \text{ dan begitu pula}$$

$$\frac{\delta^2 w}{\delta y^2} = -\frac{M_2 - \nu M_1}{(1-\nu^2)D} \text{ sedang } \frac{\delta^2 w}{\delta x\,\delta y} = o$$

$$w = -\frac{(M_1 - \nu M_2)}{2(1-\nu^2)D}\cdot x^2 = \frac{(M_2 - \nu M_1)}{2(1-\nu^2)D}\cdot y^2 + C_1 x + C_2 y + C_3$$

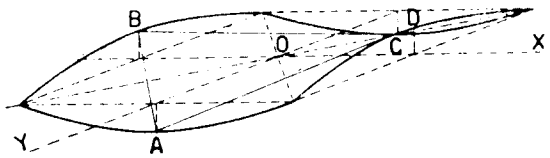
Bidang XY dipilih demikian, sehingga $w = o$; $\frac{\delta w}{\delta x} = o$ dan $\frac{\delta w}{\delta y} = o$ untuk $x = o$ serta $y = o$. Jadi dengan begitu terdapat : $C_1 = C_2 = C_3 = o$

$$w = -\frac{(M_1 - \nu M_2)}{2(1-\nu^2)D}\cdot x^2 - \frac{(M_2 - \nu M_2)}{2(1-\nu^2)D}\cdot y^2$$

c. $M_2 = -M_1$; $\frac{1}{r_x} = -\frac{1}{r_y} = -\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} = +\frac{\delta^2 w}{\delta y^2} = \frac{M_1}{(1-\nu)D}$, bandingkan kejadian a.

Kita mendapat bidang antiklastik dengan $w = -\frac{M_1}{2(1-\nu)D}(x^2 - y^2)$

Garis-garis lurus yang asalnya // X terbengkok semacam parabol keba-



Gambar XI, 8

wah dan garis-garis// Y idem ke atas. Pada titik-titik yang terletak di atas garis-garis bisektris pada sudut-sudut antara X dan Y terdapat:

$$x = y \text{ dan } x = -y, \text{ sehingga } w = o.$$

Semua garis-garis lurus yang semula // garis-garis bisektirs ini, tidak akan terbengkok melainkan tinggal tetap lurus dan hanya berputar sudut saja (lihat garis-garis AB dan AD). Sebab garis-garis lurus tersebut ini mempunyai persamaan: $x = \pm y + c$ atau $y = \pm x - c$ di mana c itu bilangan tetap (positif atau negatif).

$$x^2 = y^2 \pm 2cy + c^2 \text{ atau } y^2 = x^2 \mp 2cx + c^2$$

$$x^2 - y^2 = \pm 2cy + c^2 \text{ atau } x^2 - y^2 = \pm 2cx - c^2$$

$$w = \frac{-M_1}{2(1-\nu)D}(\pm 2cx - c^2) \text{ atau } w = -\frac{M_1}{2(1-\nu)D}(\pm 2cy - c^2)$$

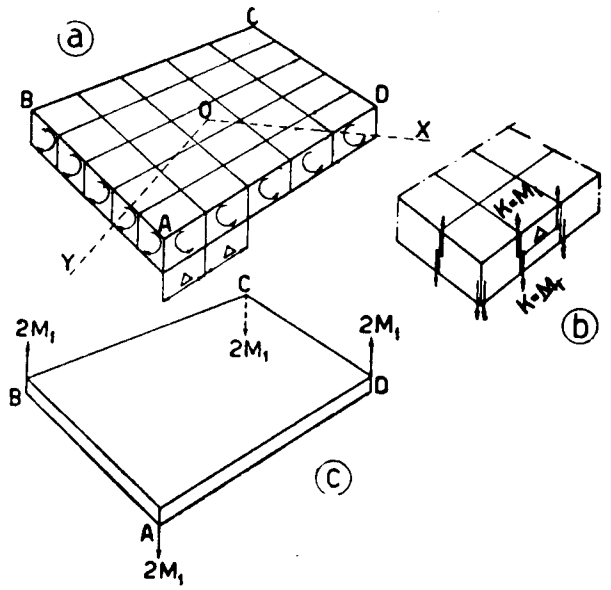
berarti garis lurus.

$$\frac{\delta w}{\delta x} = \pm \frac{M_1}{(1-\nu)D} \cdot c \text{ (serongnya ke arah X tetap)}$$

$$\frac{1}{r_x} = -\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} = o \text{ (perbengkokan ke arah X tak ada atau lurus).}$$

Begitu juga keadaan ke arah Y. Bidang ABCD akan terbengkok seperti di gambar XI.9.

Menurut (9) dengan $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ dan $\frac{3}{4}\pi$ atau $\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$, maka terdapat bahwa sepanjang tampang-tampang AB, BC, CD dan DA tak ada momen membengkok, melainkan hanya ada twist momen melulu. Sepanjang AB serta CD nilai twist momen ini ada M_1 dan sepanjang BC serta DA ada $M_1 = M_2$



Gambar XI, 9

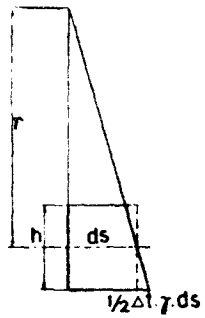
Twist-momen ini ditimbulkan oleh tegangan-tegangan geser mendatar yang terbagi pada tampang-tepi. Akibat tegangan-tegangan ini boleh diganti dengan akibat dari kekuatan geser vertikal K. Tampang tepi dibagi-bagi di dalam bagian-bagian kecil sepanjang Δ Twis-momen saban bagian men jadi ada $M_1 . \Delta = K.\Delta$ (M_1 itu momen saban cm atau satuan ukuran-panjang, – jadi berdimensi kekuatan). Di perbatasan pada bagian-bagian ini, kekuatan-kekuatan K menghapuskan satu sama lain, *kecuali di ujung,* di mana mereka *bersamaan arahnya.* Di sinilah terdapat kekuatan vertikal sebesar $2K = 2M_1$ (Lord Kelvin and P-G Tait "Treatise on Natural Philosphy"; dan Dr. A. Nadai. "Forchungsarbeiten").

d. Pembengkokan bidang menurut bidang silinder yang garis-garis pelukisnya // sumbu Y. ini berarti bahwa $\frac{\delta^2 w}{\delta y^2} = o$ dan menurut (8) terdapat :

$$M_x = -D\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \text{ dan } M_y = -\nu D\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \neq o$$

§7. Akibat derajat-panas

Lantai dianggap terjepit di tepinya. Bidang bawah dan bidang atas berbedaan derajat-panas, perbedaan mana dianggap berjalan lurus dan bernilai Δt, yang dipandang positif jika tepi bawah lebih panas daripada tepi atas.



Gambar XI, 10

Beda antara derajat panas tepi bawah dan bidang tengah menjadi ½ Δt.

$$\tfrac{1}{2}\Delta t \,.\, \gamma \,.\, ds : ds = \tfrac{1}{2} h : r$$

$$\frac{h}{r} = \gamma \,.\, \Delta t$$

$\frac{1}{r} = \frac{\gamma \,.\, \Delta t}{h}$. Ini menimbulkan momen lengkung sebesar M di sisi lantai.

Menurut Δ § 6 (kejadian a), maka terdapat :

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{(1+\nu)D}$$

$$M = (1+\nu)D \cdot \frac{1}{r} = \frac{(1+\nu)D\gamma \,.\, \Delta t}{h} = \frac{\frac{1}{12}\gamma E h^2 \,.\, \Delta t}{1-\nu}$$

$\sigma_{max} = \frac{M}{\frac{1}{6}h^2} = \frac{1}{2}\frac{\gamma E}{(1-\nu)} \cdot \Delta t$, tak tergantung kepada tebal lantai h kelihatannya. Akan tetapi Δt itu besarnya kira-kira berbanding lurus dengan tebal lantai, yang berarti bahwa pada hakekatnya σ_{max} juga boleh dikatakan bertanding lurus dengan tebal lantai h itu.

§ 8. Pekerjaan tertimbun di dalam lantai terbengkok.

$$ds = r d\varphi \text{ atau } d\varphi = \frac{1}{r}\, ds = -\frac{\delta^2 w}{\delta s^2}\, ds$$

$$dU = \tfrac{1}{2} M d\varphi = -\tfrac{1}{2} M ds \frac{\delta^2 w}{\delta s^2}$$

Tampang lantai selebar dy menahan momen sebesar $M_x dy$ dan tampang selebar dx menahan momen $M_y dx$.

Selanjutnya dianggap bahwa bidang-bidang ZOX dan YOZ menjadi bidang bengkokan dasar.

$dU = -\frac{1}{2}\left(M_x \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + M_y \frac{\delta^2 w}{\delta y^2}\right) dx.dy$ **atau dengan (8):**

$$dU = \tfrac{1}{2} D \left\{ \left(\frac{\delta^2 w}{\delta x^2}\right)^2 + 2\nu \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} + \left(\frac{\delta^2 w}{\delta y^2}\right)^2 \right\} dx.dy \quad \ldots (12)$$

Jika lantai di bengkok murni (melulu), maka $\frac{1}{r_x}$ dan $\frac{1}{r_y}$ bernilai tetap. Dan apabila A = luas lantai, menjadi :

$$U = \tfrac{1}{2} DA \left\{ \left(\frac{\delta^2 w}{\delta y^2}\right) + 2\nu \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} + \left(\frac{\delta^2 w}{\delta y^2}\right)^2 \right\} \quad \ldots . (12a)$$

Bilamana arah X dan Y tidak menurut arah bengkokan pokok, maka elemen dx.dy akan menahan twist momen juga, yaitu $M_{xy}dy$ dan $M_{yx}dx$.

Pekerjaan yang dijalankan oleh $M_{xy}dy$ terdapat:

$dU'_x = \frac{1}{2} M_{xy} dy dx \,.\, \frac{1}{r_{xy}} = \frac{1}{2} M_{xy} dy \,.\, dx \,.\, \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y}$, dan oleh $M_{xy}.dx$:

$$dU'_y = \tfrac{1}{2} M_{yx} dx.dy \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \cdot \text{ Menurut (11) :}$$

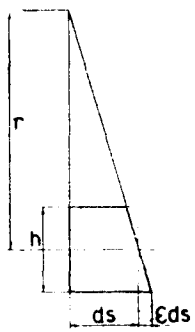
$$dU' = dU'_x + dU'_y = M_{xy} dx \,.\, dy \,.\, \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} = (1-\nu) D \left(\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y}\right)^2 dx \,.\, dy \ldots (13)$$

Jumlah pekerjaan menjadi (12) + (13).

$$dU = \tfrac{1}{2} D \left\{ \left(\frac{\delta^2 w}{\delta x^2}\right)^2 + 2\frac{\nu \delta^2 w}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} + \left(\frac{\delta^2 w}{\delta y^2}\right)^2 + 2(1-\nu) D \left(\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y}\right)^2 \right\} dx.dy =$$

$$= \tfrac{1}{2} D \left\{ \left(\frac{\delta^2 w}{dx^2} + \frac{\delta^2 w}{\delta y^2}\right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} - \left(\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y}\right)^2 \right] \right\} dx.dy \ldots (14)$$

§ 9. Pembatasan berlakunya rumus-rumus.



$$\varepsilon ds : \tfrac{1}{2}h = ds : r$$

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\frac{h}{r} = \frac{\sigma}{E}$$

Gambar XI, 11

Di dalam menghitung rumus-rumus kita beranggapan bahwa bidang-tengah lantai adalah bidang netral. Penganggapan ini memuaskan jikalau bidang tengah tersebut. membentuk bidang yang dapat dibeber (setelah lantai dibengkok). Apabila betul demikian adanya sarat yang masih harus-dipenuhi ialah bahwa tebal lantai h amat kecil terhadap radius bengkokan r ($h \ll r$)

Jika lantai tadi dibengkok sehingga bidang tengahnya menjadi bidang yang tak dapat dibeber, maka bidang tengah ini akan menderita tegangan-tegangan juga, jadi tidak lagi membentuk bidang netral.

Rumus-rumus yang terdapat di atas cukup saksama jika tegangan ini kecil dibandingkan dengan tegangan-tegangan tepi, atau jika ϵ di bidang tengah kecil terhadap ½ $\frac{h}{r}$.

Sebagai contoh, kita ambil lantai berbangun lingkaran yang dibengkok menjadi bagian bidang bola oleh momen membengkok M, yang bekerja terbagi rata pada tepinya. Radius lantai sebelum dibengkok adalah a dan anggaplah bahwa bidang tengahnya tidak berkembang radial (tak tertarik atau tak tertegang.)

Jadi arc. OB = a

Radius lantai setelah dibengkok menjadi

$$b = r\sin\varphi, \text{ sedang } a = r\varphi \text{ atau } r = \frac{a}{\varphi}.$$

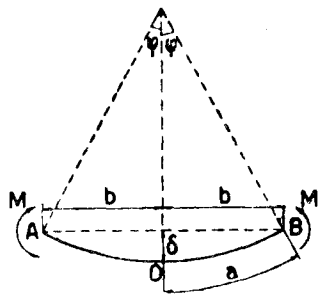
$$\varepsilon = \frac{a-b}{a} = \frac{r\varphi - r\sin\varphi}{r\varphi} = 1 - \frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

Ini berarti bahwa ada tekanan di sepanjang keliling lantai.

Pada lengkungan yang amat kecil, atau juga φ yang amat kecil, maka $\sin\varphi \infty \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3$, jadi $\varepsilon \infty \frac{1}{6}\varphi^2$

$$\delta = r(1-\cos\varphi) \infty \tfrac{1}{2}r\varphi^2$$

$$\varphi^2 \infty 2\frac{\delta}{r}\ ;\ \varepsilon \infty \tfrac{1}{3}\frac{\delta}{r}$$



Gambar XI, 12

Jika bidang tengah ini netral (bebas tegangan), telah terdapat di atas bahwa $\varepsilon_{tepi} = \frac{1}{2}\frac{h}{r}$. Dan apabila $\delta \ll h$, pula $\epsilon \ll \epsilon_{tepi}$ dan dengan begitu bidang-tengah boleh dianggap sebagai bidang netral, jadi rumus-rumus yang diperoleh di atas ada cukup saksama.

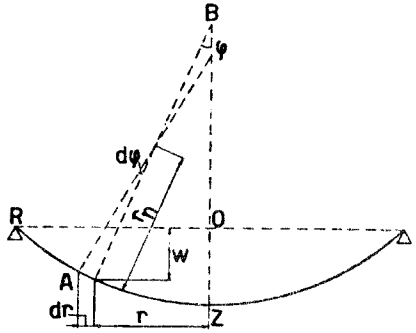
BAB XII

LANTAI-LINGKARAN DIBENGKOK SIMETRIS

§ 1. Persamaan differensi.

Muatan terbagi simetris terhadap titik tengah, dan bidang lengkungan juga simetris. Pada semua titik yang berjarak sama sejauh r dari titik 0 lengkungannya terdapat sama pula.

$\varphi = -\frac{dw}{dr}$ (negatif, sebab jika r bertambah, w berkurang); $\frac{1}{r_n} = \frac{d\varphi}{dr}$



Gambar XII, 1

Berdasarkan atas keadaan simetri, maka $\frac{1}{r_n}$ itu adalah sesuatu bengkokan pokok.

Bengkokan-pokok yang lainnya terdapat di dalam bidang yang mengandung garis normal AB serta berdiri ⊥ bidang RZ. Untuk segala titik dengan r yang sama, maka AB juga sama panjangnya. Jadi AB itu radius bengkokan pokok yang kaku :

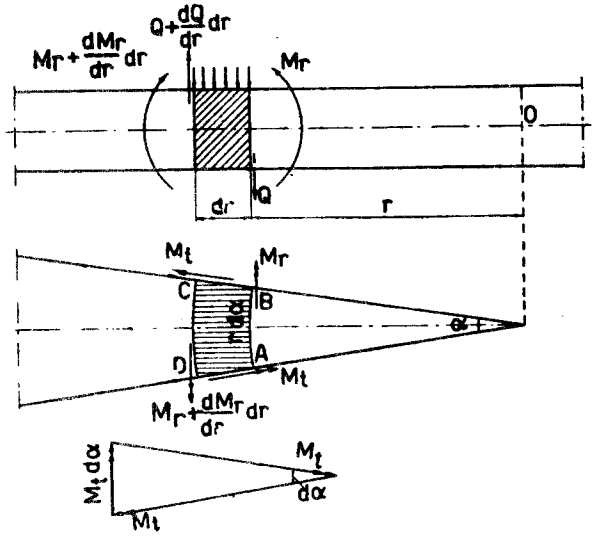
$$r_t = AB = \frac{r}{\varphi} = -\frac{r}{dw/dr}$$

$$\frac{1}{r_t} = \frac{\varphi}{r} = -\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}$$

Selanjutnya dianggap boleh diabaikan adanya tegangan geser ditampang AB yang letaknya ⊥ RZ, oleh karena h ≪ diameter lantai. Juga tegangan-tegangan yang berarah ⊥ muka lantai (jadi vertikal) kita abaikan (diperbolehkan apabila muatan luar tak begitu berat serta berpusat). Menurut (8) terdapat :

$$\left.\begin{aligned} M_r &= D\left(\frac{1}{r_n} + \nu\frac{1}{r_t}\right) = D\left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu\frac{\varphi}{r}\right) = -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \nu\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) \\ M_t &= D\left(\nu\frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_t}\right) = D\left(\nu\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r}\right) = -D\left(\nu\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

M_r dan M_t dihitung saban satuan ukuran panjang (kg cm/cm). Jadi tampang AB menahan momen sebesar $M_r.rd\alpha$, tampang AD menahan momen $M_t.dr$ (gambar XII.2)



Gambar XII, 2

Kekuatan-melintang di tampang AB ada Q. rdx dan seterusnya. Dengan mengabaikan suku suku yang ∽ kecil bertingkat tinggi, maka kekuatan melintang membentuk koppel sebesar $Q\,rd\alpha.dr$.

Sarat seimbang untuk bagian elemen ABCD:

$$\left(M_r + \frac{dM_r}{dr} \cdot dr\right)(r+dr)d\alpha + Qrd\alpha.dr - M_r rd\alpha - M_t dr.d\alpha = o$$

Suku-suku yang mengandung $(dr)^2$ diabaikan dan kemudian membagi dengan $d\alpha.dr$:

$$M_r + \frac{dM_r}{dr} \cdot r + Qr - M_t = o$$

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{1}{r} M_r - \frac{1}{r} M_t = -Q, \text{ dan dengan (15): } \ldots\ldots (16)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{v}{r^2}\left(r\frac{d\varphi}{dr} - \varphi\right) + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{v}{r^2}\varphi - \frac{v}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} = -\frac{Q}{D}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} = -\frac{Q}{D} \text{ atau dengan } \varphi = -\frac{dw}{dr} \quad \ldots\ldots (17)$$

$$\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{\varphi}{r^2}\frac{dw}{dr} = \frac{Q}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d(r\varphi)}{dr}\right\} = -\frac{Q}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17a)$$

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d\left(r\frac{dw}{dr}\right)}{dr}\right\} = \frac{Q}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18a)$$

$$Q \cdot 2\pi r = \int_o^r q \cdot 2\pi r \cdot dr;\ Q = \frac{1}{r}\int_o^r qrdr$$

Menurut (18a):

$$r\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d\left(r\frac{dw}{dr}\right)}{dr}\right\} = \frac{1}{D}\int_o^r qrdr$$

Kemudian di differensi ke-r dan sesudah itu dibagi dengan r

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d\left(r\frac{dw}{dr}\right)}{dr}\right\}\right] = \frac{q}{D} \quad \ldots\ldots\ldots (19)$$

Pendapat ini mudah di integrasi jika q = f(r) diketahui.

§ 2. **Lantai dimuati rata dengan $q(t/m^2)$**

Radius lantai adalah a. Di sini q bernilai tetap, jadi tak tergantung kepada r; $Q \cdot 2\pi r = q \cdot \pi r^2$; $Q = \frac{1}{2}qr$. Dengan (18a) kita mendapat:

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d\left(r\frac{dw}{dr}\right)}{dr}\right\} = \frac{qr}{2D}$$

$$\frac{1}{r}\,\frac{d(r\ dw/dr)}{dr} = -\frac{9}{2D}(\tfrac{1}{2}\,r^3 + C_1).$$

$$d(r\ dw/dr)/dr = q/2D\ (\tfrac{1}{2}r^3 + C_1 r)$$

$$r\ dw/dr = q/2D\ (1/8\ r^4 + \tfrac{1}{2}\ C_1\ r^2 + C_2\ )$$

$$dw/dr = q/2D\ (1/8\ r^3 + \tfrac{1}{2}\ C_1 r + C_2/r) \quad \ldots\ldots\ldots (20)$$

$$w = q/2D\ (1/32\ r^4 + \tfrac{1}{4}\ C_1 r^2 + C_2\ \lg\ r/a + C_3) \ldots (21)$$

$$d^2\,W/dr^2 = q/2D\ (3/8\ r^2 + \tfrac{1}{2}\ C_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20a).$$

Sekarang mempelajari sarat-sarat tepi:

a. Tepi lantai tercepit.

Ini berarti bawa $\frac{dw}{dr} = o$ untuk $r = o$ dan $r = a$.

Rumus (20) kita lipatkan dengan r

Pada $r = o$, maka $\frac{rdw}{dr} = o$; jadi $C_2 = o$.

Anggauta kanan persamaan (20) juga bernilai nol, untuk r = a.

$1/8\ a^3 + \tfrac{1}{2}\ C_1 a = 0$

$C_1 = -\tfrac{1}{4}\ a^2$

Setelah itu, rumus (20) menjadi :

$$\varphi = -\frac{dw}{dr} = \frac{1}{16\ D}\ qr\ (a^2 - r^2) \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Untuk r = a terdapat w = 0 dan dengan (21) kita dapat menghitung C_3

$\frac{1}{32}\ a^4 - \frac{1}{16}\ a^4 + C_3 = 0$

$C_3 = \frac{1}{32}\ a^4$

Jadi persamaan lengkungan terdapat

$$\frac{q}{2D}\left(\frac{1}{32}r^4 - \frac{1}{16}a^2r^2 + \frac{1}{32}a^4\right) = \frac{1}{64D}q(a^2-r^2)^2 =$$

$$= \frac{1}{64D}qa^4\left\{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

$$w_{max} = w_{r=o} = \tfrac{1}{64}qa^4$$

Lantai persegi terjepit di kedua belah ujungnya dengan bentang $l = 2a$ serta yang sama tebalnya menunjukkan lengkungan maximum:

$$w_{max} = \frac{1}{384D}q(2a)^4 = \frac{1}{24D}qa^4$$

Sekarang kita menghitung M_r dan M_t dengan (22) dan (15)

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{16D}q(a^2-3r^2)$$

$$\left.\begin{aligned} M_r &= \frac{q}{16}(a^2-3r^2)+\nu\cdot\frac{q}{16}(a^2-r^2) = \tfrac{1}{16}qa^2\left\{(1+\nu)-(3+\nu)\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\} \\ M_t &= \nu\cdot\frac{q}{16}(a^2-3r^2)+\frac{q}{16}(a^2-r^2) = \tfrac{1}{16}qa^2\left\{(1+\nu)-(1+3\nu)\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\} \end{aligned}\right\} \ldots (24)$$

$$r = a;\ M_r = -\tfrac{1}{8}qa^2;\ M_t = -\tfrac{1}{8}\nu\cdot qa^2 = \nu\cdot M_r$$

$$r = o;\ M_r = M_t = \frac{(1+\nu)}{16}qa^2$$

b. Tepi lantai diletakkan bebas.

Jepitan di tepi menimbulkan momen $M_r = -1/8\ qa^2$ di samping jepitan. Jika di sepanjang tepi diadakan momen $M = +1/8\ qa^2$, maka ini berarti bahwa lantai menjadi terletak bebas.

Kita mempergunakan hasil di dalam § 6 bab XI, kejadian a.

$$-\frac{d^2w}{dr^2} = \frac{M}{(1+\nu)D} = \frac{\tfrac{1}{8}qa^2}{(1+\nu)D} = A$$

$$\frac{dw}{dr} = -Ar + C_1$$

Untuk $r = o, \frac{dw}{dr} = o$; jadi $C_1 = o$

$$w = -\tfrac{1}{2}Ar^2 + C_2$$

Untuk $r = a, w = o$; jadi $C_2 = \tfrac{1}{2}Aa^2$

$$w = \tfrac{1}{2}A(a^2-r^2) = \frac{qa^2}{16(1+\nu)D}(a^2-r^2)$$

Hasil ini ditambahkan kepada (23), mendapatkan :

$$w = \frac{q}{64D}(a^2-r^2)+\frac{q}{16(1+\nu D)}a^2(a^2-r^2) = \frac{q(a^2-r^2)}{64D}\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}\cdot a^2 - r^2\right) =$$

$$= \frac{1}{64D}qa^4\left\{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}\left\{\frac{5+\nu}{1+\nu}-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}$$

$$w_{max} = w_{r=o} = \frac{(5+\nu)}{(1+\nu)}\tfrac{1}{64}qa^4$$

Kemudian suku $M = \frac{1}{8}qa^2$ ditambahkan dengan (24) :

$$\left.\begin{aligned} M_r &= \tfrac{1}{16}qa^2(3+\nu)\left\{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\} \\ M_t &= \tfrac{1}{16}qa^2\left\{(3+\nu)-(1+3\nu)\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (26)$$

$$r = o;\ M_r = M_t = \frac{3+\nu}{16}\cdot qa^2$$

$$r = a;\ M_r = o;\ M_t = \frac{2-\nu}{61}\cdot qa^2$$

Cara lain ialah menentukan, bahwa $M_{r=a} = 0$, sedang sarat $(r\ dw/dr)_{r=0} = 0$ juga berlaku yang menghasilkan pula $C_2 = 0$

$M_r = -D(d^2w/dr^2 + \nu/r\ dw/dr) = D(d\varphi/dr + \nu\varphi/r)$ ..... *(15)*

dw/dr dan d^2w/dr^2 diambil dari (20) dan (20a) sambil mengisi $r = a$

$3/8\ a^2 + \tfrac{1}{2}C_1 + \nu/a\ (1/8\ a^3 + \tfrac{1}{2}C_1 a) = 0$

$\tfrac{1}{2}C_1(1+\nu) = -1/8\ (3+\nu)a^2$; $C_1 = -(3+\nu)a^2/4(1+\nu)$

$d\varphi/dr = -d^2w/dr^2 = q/2D\ [\ (3+\nu)/8(1+\nu)\ a^2 - 3\ r^2 + \nu\{(3+\nu)a^2/1+\nu + r^2\}\ ]$

$= q/16D\ [\ (3+\nu)/1+\nu\ a^2 r - r^3\ ]$; $\varphi = -dw/dr = q/16D\ [\ (3+\nu)/1+\nu\ a^2 r - r^3\ ]$

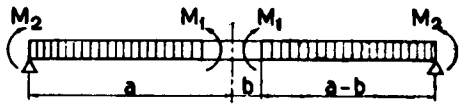
$M_r = D(d\varphi/dr + \nu/r\ \varphi) = q/16\ [\ (3+\nu)\ a^2/1+\nu - 3\ r^2 + \nu\{(3+\nu)a^2/1+\nu + r^2\}\ ] = q/16\ (3+\nu)(a^2 - r^2)$.

$M_t = D(\nu\ d\varphi/dr + \varphi/r) = q/16\ [\ \nu(\{(3+\nu)\ a^2/1+\nu - 3\ r^2\} + (3+\nu)a^2/1+\nu - r^2\ ] = q/16\ [\ (3+\nu)\ a^2 - (1+3\nu)\ r^2\ ]$

§ 3. Lantai lingkaran dengan lobang sentris (di tengah-tengah).

a. Tepi dalam dan tepi luar masing-masing menahan momen lengkung terbagi rata; M_1 dan M_2.

Kekuatan melintang Q tak ada



Gambar XII, 3a

Rumus (17a)

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d(r\varphi)}{dr}\right\} = o$$

$$\frac{1}{r}\frac{d(r\varphi)}{dr} = C_1$$

$$\frac{d(r\varphi)}{dr} = C_1 r$$

$$r\varphi = \tfrac{1}{2}C_1 r^2 + C_2$$

$$\varphi = -\frac{dw}{dr} = \tfrac{1}{2}C_1 r + \frac{1}{r}C_2$$

$$\frac{dw}{dr} = -\tfrac{1}{2}C_1 r - \frac{1}{r}C_2$$

$$w = -\tfrac{1}{4}C_1 r^2 - C_2 \lg\frac{r}{a} + C_3$$

Menggunakan rumus (15) yang pertama :

$$M_r = D\left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu\cdot\frac{\varphi}{r}\right) = D\left\{\tfrac{1}{2}C_1 - \frac{1}{r^2}C_2 + \nu\left(\tfrac{1}{2}C_1 + \frac{1}{r^2}C_2\right)\right\}$$

Untuk $r = b$ terdapat : $M_r = M_1$ dan untuk $r = a$, $M_r = M_2$.

$$\tfrac{1}{2}(1+\nu)C_1 - (1-\nu)\frac{C_2}{b^2} = \frac{M_1}{D}$$

$$\tfrac{1}{2}(1+\nu)C_1 - (1-\nu)\frac{C_2}{a^2} = \frac{M_2}{D}$$

$$C_2(1-\nu)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right) = \frac{(M_2 - M_1)}{D}$$

$$C_2 = \frac{a^2b^2(M_2 - M_1)}{D(1-\nu)(a^2-b^2)}\,;\; C_1 = \frac{2(a^2M_2 - b^2M_1)}{D(1+\nu)(a^2-b^2)}$$

Apabila lantai diletakkan secara bebas pada tepi luarnya maka untuk r = a terdapat w = 0 sedang lg r/a = lg 1 = 0; dan dengan begitu

$$C_3 = \tfrac{1}{4}C_1 a^2 = \frac{a^2(a^2M_2 - b^2M_1)}{2D(1+\nu)(a^2-b^2)}$$

Pada kejadian khusus dengan $M_2 = o$ terdapat :

$$C_1 = -\frac{2b^2M_1}{D(1+\nu)(a^2-b^2)}\,;\; C_2 = -\frac{a^2b^2M_1}{D(1-\nu)(a^2-b^2)}\,;$$

$$C_3 = -\frac{a^2b^2M_1}{2D(1+\nu)(a^2-b^2)}$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{a^2b^2M_1}{D(1-\nu)(a^2-b^2)}\left(\frac{1}{r} + \frac{1-\nu}{1+\nu}\cdot\frac{r}{a^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (27)$$

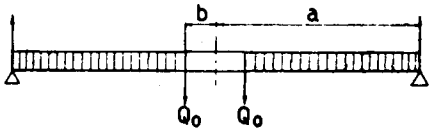
$$w = -\frac{b^2M_1}{2D(1+\nu)(a^2-b^2)}(a^2-r^2) + \frac{a^2b^2M_1}{D(1-\nu)(a^2-b^2)}\lg\frac{r}{a} =$$

$$= \frac{M_1a^2b^2}{D(a^2-b^2)}\left\{\frac{\lg r/a}{1-\nu} - \frac{1-(r/a)^2}{2(1+\nu)}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

b Tepi dalam menahan kekuatan melintang Q_o terbagi rata.

Pada titik sejauh r dari titik pusat, kekuatan melintang saban satuan ukuran panjang terdapat :

$$Q = Q_o\frac{b}{r} = \frac{P}{2\pi r} \quad \text{jika } P = 2\pi b.Q_o$$



Gambar XII, 3b

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d(r\varphi)}{dr}\right\} = -\frac{P}{2\pi rD} \quad (17a)$$

1/r. d(rφ)/dr = – P/2πD (lg r/a + c_1).

Kita tulis lg r/a supaya besaran r/a ini bilangan tidak berdimensi, sedang a atau –lg a itu bilangan konstanta yang bersama-sama C_1 membentuk konstanta lagi.

d (rφ)/ dr = P/2 π D (r lg r/a + C_1r)

∫ r lg r/a.dr = ∫ lg r/a.d ½ r^2 = ½(r^2 lg r/a – r^2/r dr) = ½ r^2 lg r/a – ¼r^2.

r = – P/2π D (½ r^2lg r/a – ¼ r^2 + ½ C_1r^2 + C_2).

= – P/2πD (½ r lg r/a – ¼ r + ½ C_1r + C_2/r) = – dw/dr.

w = P/2πD (¼ r^2lg r/a – ¼ r^2 + ¼ C_1r^2 + C_2 lg r/a + C_3).

d^2w/dr^2 = –d φ/dr = P/2πD (½ lg r/a + ¼ + ½ C_1r – C_2/r^2)

$(dw/dr)_{r=a}$ = P/ 2πD (– ¼ a + ½ C_1 a + C_2/a).

$(dw/dr)_{r=b}$ = P/2πD (½ b lg b/a – ¼ b + ½ C_1b + C_2/b).

$(M_r)_{r=a} = 0;\ (d^2w/dr^2 + \nu/r\ dw/dr)_{r=a} = 0$

$(M_r)_{r=b} = 0;(d^2w/dr^2 + \nu/r\ dw/dr)_{r=b} = 0$

$¼ + ½\ C_1 - C_2/a^2 + (-¼ + ½\ C_1 + C_2/a^2) = 0$ ..... (1)

$¼ + ½ \lg b/a + ½\ C_1 - C_2/b^2 + (½\ b \lg b/a - ¼ + ½\ C_1 + C_2/b^2) = 0$ (2)

$½\ C_1\ (1 + \nu) - 1/a^2\ C_2\ (1 - \nu) = -¼\ (1 - \nu)$ ..... (1)

$½\ C_1\ (1 + \nu) - 1/b^2\ C_2\ (1 - \nu) = -¼\ [(1 - \nu) + 2(1 + \nu) \lg b/a]$ (2)

$C_2\ (-1/a^2 + 1/b^2\ )(1 - \nu) = -½\ (1 + \nu) \lg b/a$

$C_2 = a^2b^2\ (1 + \nu) / (a^2 + b^2)(1 - \nu) \quad \lg b/a$

$C_1 = -½\ (1 - \nu / 1 + \nu - 2b^2 / a^2 - b^2 \lg b/a\ ).$

$W_{r=a} = 0;\ [-¼ - 1/8\ 1 - \nu / 8(1 + \nu) + b^2/4(a^2 - b^2) \lg b/a]\ a^2 + C_3 = 0$

$C_3 = [\ ¼ + 1 - \nu / 8(1+\nu) - b^2 / 4\ (a^2 - b^2) \lg b/a]\ a^2$

C_1, C_2 dan C_3 dapat dihitung menurut sarat-sarat tepi. Anggap lah bahwa tepi lantai terletak bebas pada tepi luar

$(w)_{r=a} = o$

$$(M_r)_{r=a} = o; -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right)_{r=a} = o \quad \ldots\ldots\ (1)$$

$$(M_r)_{r=b} = o; -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right)_{r=b} = o \quad \ldots\ldots\ (2)$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} = \frac{P}{8\pi D}\left(1 + 2\lg\frac{r}{a}\right) - \tfrac{1}{2}C_1 + \frac{1}{r^2}C_2$$

$$\left(\frac{d^2w}{dr^2}\right)_{r=a} = \frac{P}{8\pi D} - \tfrac{1}{2}C_1 + \frac{1}{a^2}C_2$$

$$\left(\frac{d^2w}{dr^2}\right)_{r=b} = \frac{P}{8\pi D}\left(1 + 2\lg\frac{b}{a}\right) - \tfrac{1}{2}C_1 + \frac{1}{b^2}C_2$$

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=a} = -\frac{Pa}{8\pi D} - \tfrac{1}{2}C_1 a - \frac{1}{a}C_2$$

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=b} = \frac{Pb}{8\pi D}\left(2\lg\frac{b}{a} - 1\right) - \tfrac{1}{2}C_1 b - \frac{1}{b}C_2$$

$$\frac{P}{8\pi D} - \tfrac{1}{2}C_1 + \frac{1}{a^2}C_2 - \frac{\nu}{a}\left(\frac{Pa}{8\pi D} + \tfrac{1}{2}C_1 a + \frac{1}{a}C_2\right) = o \quad \ldots (1)$$

$$\frac{P}{8\pi D}\left(1 + 2\lg\frac{b}{a}\right) - \tfrac{1}{2}C_1 + \frac{1}{b^2}C_2 - \frac{\nu}{b}\left\{\frac{Pb}{8\pi D}\left(1 - 2\lg\frac{b}{a}\right) + \tfrac{1}{2}C_1 b - \frac{1}{b}C_2\right\} = o \quad (2)$$

$$\tfrac{1}{2}C_1(1 + \nu) - \frac{1}{a^2}C_2(1 - \nu) = (1 - \nu)\frac{P}{8\pi D} \quad \ldots\ldots\ (1)$$

$$\tfrac{1}{2}C_1(1 + \nu) - \frac{1}{b^2}C_2(1 - \nu) = \left\{(1 + \nu)2\lg\frac{b}{a} + (1 - \nu)\right\}\frac{P}{8\pi D} \quad \ldots\ldots\ (2)$$

$$\left(-\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)(1 - \nu)C_2 = -(1 + \nu)2\lg\frac{b}{a}\cdot\frac{P}{8\pi D}$$

$$C_2 = -\frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)}\cdot\frac{a^2b^2}{(a^2 - b^2)}\frac{P}{4\pi D}\lg\frac{b}{a}$$

$$\tfrac{1}{2}C_1(1 + \nu) + \frac{1}{a^2}\cdot(1 + \nu)\frac{a^2b^2(1 - \nu)}{b^2(a^2 - b^2)}\frac{P}{4\pi D}\lg\frac{b}{a} = (1 - \nu)\frac{P}{8\pi D} \quad \ldots\ (1)$$

$$C_1 = \left\{\frac{1 - \nu}{1 + \nu} - 2\frac{b^2}{(a^2 - b^2)}\lg\frac{b}{a}\right\}\frac{P}{4\pi D}$$

Nilai-nilai C_1 dan C_2 yang terdapat ini kita isi di dalam rumus w dengan $r = a$ sedang $(w)_{r=a} = o$, serta $\lg\frac{r}{a} = o$.

$$o = -\frac{Pa^2}{8\pi D} - \tfrac{1}{4}\left\{\frac{1 - \nu}{1 + \nu} - 2\frac{b^2}{(a^2 - b^2)}\lg\frac{b}{a}\right\}a^2\cdot\frac{P}{4\pi D} + C_3$$

$$C_3 = \frac{Pa^2}{8\pi D}\left\{1 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(1 - \nu)}{(1 + \nu)} - \frac{b^2}{(a^2 - b^2)}\lg\frac{b}{a}\right\}$$

Di dalam kejadian limit, di mana $b = o$, terdapat $b^2\lg\frac{b}{a}$ mendekati nol.

$$C_1 = \frac{(1 - \nu)}{2(1 + \nu)}\cdot;\ C_2 = o;\ C_3 = \frac{1}{4}\left\{1 + \tfrac{1}{2}\frac{(1 - \nu)}{(1 + \nu)}\right\}$$

$$w = \frac{P}{8\pi D}\left\{\frac{(3 + \nu)}{2(1 + \nu)}(a^2 - r^2) + r^2\lg\frac{r}{a}\right\} \quad \ldots\ldots\ (30)$$

Kejadian demikian ini ialah lantai tak berlobang dengan muatan di titik tengahnya.

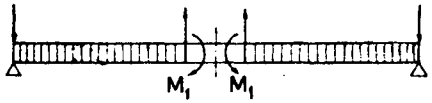
c. Tepi dalam terjepit, muatan terbagi rata menurut tepi luar.

Kejadian ini sebetulnya ada kombinasi dari ***a.*** dan ***b.*** dengan $M_2 = o$.

Nilai $\frac{dw}{dr}$ terdapat sebagai jumlah dari rumus (27) dan (29). Rumus (29) untuk $r = b$ menjadi (dengan nilai-nilai C_1 dan C_2 yang telah terdapat).

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=b} = \frac{Pb}{8\pi D}\left\{2\lg\frac{b}{a} - 1 - \frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{2b^2}{a^2-b^2}\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\lg\frac{b}{a}\right)\right\} \quad (29a)$$

Dan menurut rumus (27) dengan $r = b$:



Gambar XII, 3c

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=b} = \frac{a^2b^2M_1}{D(1-\nu)(a^2-b^2)}\left\{\frac{1}{b} + \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)}\frac{b}{a^2}\right\} \quad \ldots . \quad (27a)$$

Oleh karana ada jepitan, maka serongnya lantai di tepi dalam harus-nol. (27a) + (29a) = 0

$$\frac{a^2b^2M_1}{D(1-\nu)(a^2-b^2)}\left\{\frac{1}{b} + \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)}\frac{b}{a^2}\right\} + \frac{Pb}{8\pi D}\left\{2\lg\frac{b}{a} - 1 - \frac{1-\nu}{1+\nu} + \right.$$

$$\left. + \frac{2b^2}{a^2-b^2}\left(1 + \frac{a^2(1+\nu)}{b^2(1-\nu)}\lg\frac{b}{a}\right)\right\} = o$$

$$M_1 = \frac{P}{8\pi\{1+\nu)\,a^2/b^2 + 1 - \nu\}}\left\{2(1-\nu)\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) + 4(1+\nu)\frac{a^2}{b^2}\lg\frac{a}{b}\right\} \quad (31)$$

w terdapat sebagai jumlah dari kejadian-kejadian ***a*** dan ***b***. Setelah persamaan ***w*** ini terdapat, kita dapat menghitung M_r dan M_t dengan (15).

d. Lantai berlobang terletak bebas pada tepi luar, dimuati penuh terbagi rata.

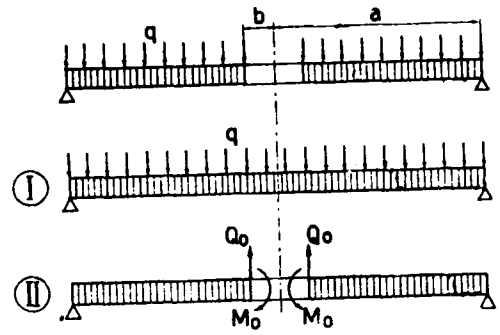
Ini dianggap sebagai kombinasi dari :

I. Lantai penuh (utuh) dimuati penuh dengan q.

II Lantai berlobang dengan kekuatan melintang Q_o dan momen M_o — terbagi rata pada tepi dalam (kombinasi ***a*** dan ***b*** dengan $M_2 = o$).

$$Q_o = q\pi\frac{b^2}{2\pi b} = \tfrac{1}{2}qb$$

$$M_o = \tfrac{1}{16}qa^2(3+\nu)\left\{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right\} \quad (26)$$



Gambar XII, 4

Cara lain.

$Q = q\pi\,(a^2 - r^2)\,/\,2\pi\,r = q/2\,(a^2/r - r)$

$d/dr\,[\,1\,d(r\varphi)\,/\,r\,dr\,] = -Q/D = -q/2D\,(a^2/r - r)$

$1/r\,d\,(r\varphi)/dr = -q/2\,D\,(a^2\lg r/a - \tfrac{1}{2}r^2 + C_1)$.

$d(r\varphi)/dr = -q/2D\,(a^2r\lg r/a - \tfrac{1}{2}r^3 + C_1r)$

$r\varphi = -q/2\,D\,(\tfrac{1}{2}a^2r^2\lg r/a - \tfrac{1}{4}a^2r^2 - 1/8\,r^4 + \tfrac{1}{2}C_1r^2 + C_2)$.

$\varphi = -q/2D\,(\tfrac{1}{2}a^2r\lg r/a - \tfrac{1}{4}a^2r - 1/8\,r^3 + \tfrac{1}{2}C_1r + C_2/r)$.

$d\varphi/dr = -q/2\,D\,(\tfrac{1}{2}a^2\lg r/a + \tfrac{1}{4}a^2 - 3/8\,r^2 + \tfrac{1}{2}C_1 - C_2/r^2)$.

$\varphi/r = -q/2\,D\,(\tfrac{1}{2}a^2\lg r/a - \tfrac{1}{4}a^2 - 1/8\,r^2 + \tfrac{1}{2}C_1 + C_2/r^2)$.

$M_r = D\,(d\varphi/dr + \nu\varphi/r)$; $M_t = D\,(\nu\,d\varphi/dr + \varphi/r)$ . . . . . (15)

Secara menentukan $M_r = 0$ pada $r = a$ dan $r = b$ kita mendapatkan C_1 dan C_2; kemudian M_r dan M_t.

Jika akan meneruskan hitungan sampai mendapatkan w kita menghitung

$w = \int (dw/dr)\,dr = -\int dr$ yang menghasilkan konstanta C_3.

Ini dihitung berdasarkan sarat $w = 0$ pada $r = a$.

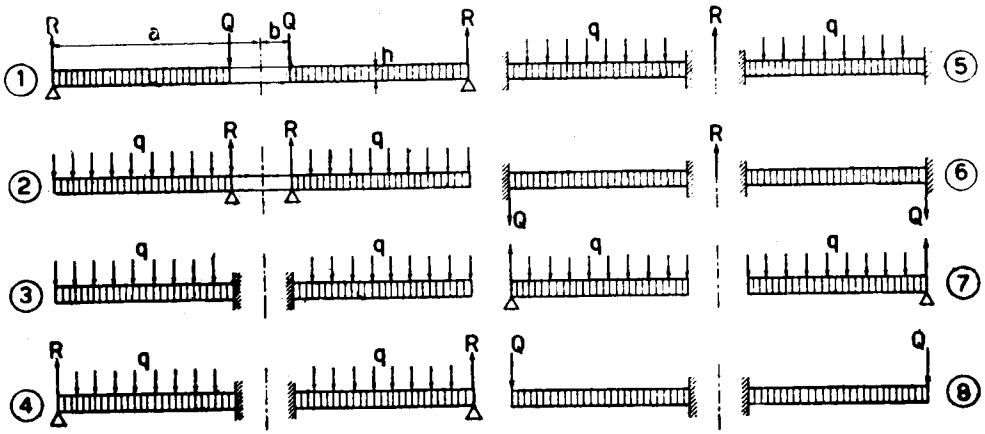
e. Gambar - gambar di bawah ini menunjukan berapa kejadian yang sering terdapat di dalam praksis.

Tegangan maximum selalu dapat terhitung menurut rumus-rumus

$$\sigma_{max} = k \cdot q\frac{a^2}{h^2} \text{ atau } \sigma_{max} = k\frac{P}{h^2} \text{ jika } P = 2\pi aQ \text{ atau } 2\pi bQ$$

$$M_{max} = \tfrac{1}{6}k \cdot qa^2 \text{ atau } M_{max} = \tfrac{1}{6}kP \text{ (rumus: } M = \sigma W = \sigma \cdot \tfrac{1}{6}h^2)$$

M_{max} ini boleh jadi M_n atau M_t.



Gambar XII, 5

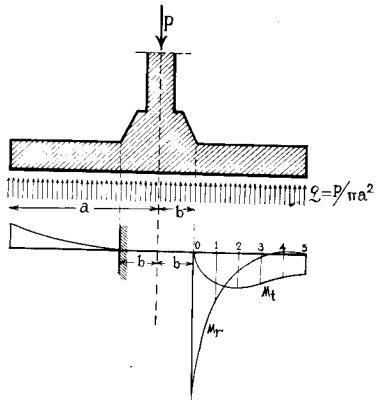
$$w_{max} = k_1\frac{qa^4}{Eh^3} \text{ atau } w_{max} = k_1\frac{Pa^2}{Eh^3}$$

Di bawah ini ada daftar untuk nilai-nilai k dan k_1 dengan $\nu = 0{,}3$ (S. Timoshenko, "Theory of plates and shells"). Seringkali dianggap bahwa $\nu = o$.

a/b = Kejadian	1,25		1,5		2		3		4		5	
	k	k_1	k	k_1	k	k_1	k	k_1	k	k_1	k	k_1
1	1,10	0,341	1,26	0,519	1,48	0,672	1,88	0,734	2,17	0,724	2,34	0,704
2	0,66	0,202	1,19	0,491	2,04	0,902	3,34	1,220	4,30	1,300	5,10	1,510
3	0,135	0,00231	0,410	0,0183	1,04	0,0938	2,15	0,293	2,99	0,448	3,69	0,564
4	0,122	0,00342	0,336	0,0313	0,74	0,1250	1,21	0,291	1,45	0,417	1,59	0,492
5	0,090	0,00077	0,273	0,0062	0,71	0,0329	1,54	0,110	2,23	0,179	2,80	0,234
6	0,115	0,00129	0,220	0,0064	0,405	0,0237	0,703	0,062	0,933	0,092	1,13	0,114
7	0,592	0,184	0,976	0,414	1,440	0,664	1,880	0,824	2,08	0,830	2,19	0,813
8	0,227	0,00510	0,428	0,0249	0,753	0,0877	1,205	0,209	1,514	0,293	1,745	0,350

f. **Pelat — alas lingkaran** (gb. XII.6). Dapat dihitung seperti kejadian 3 pada gambar XII,5.

Tekanan P dianggap sebagai terbagi rata pada tanah sehingga menghasilkan $q = P/\pi a^2$ dan kemudian juga dianggap bahwa $\nu = 0$



Gambar XII, 6

Jadi $M_r = D\, d\varphi/dr$ dan $M_t = D\varphi/r$.

$Q = q.\ \pi(a^2 - r^2) / 2\pi r = \tfrac{1}{2} qa^2 (1/r - r/a^2) = P/2\pi (1/r - r/a^2)$.

$d/dr\ [\ 1/r.\ d(r\varphi)\ /\ dr\ ] = -Q/D = -P/2\pi (1/r - r/a^2)$

$1/r\ d\ (r\varphi)\ /dr = -P/2\pi (\lg r/b - r^2/2a^2 + C_1)$

$d(r\varphi)/dr = -P/2\pi (r \lg r/b - r^3/2a^2 + C_1 r)$.

$r\varphi = -P/2\pi\ (\tfrac{1}{2} r^2 \lg r/b - \tfrac{1}{4} r^2 - 1/8\ r^4/a^2 + \tfrac{1}{2} C_1 r^2 + C_2)$

$\varphi = P/\ 2\pi\ (\tfrac{1}{4} r + 1/8\ r^3/a^2 - \tfrac{1}{2} r \lg r/b - \tfrac{1}{2} C_1 r - C_2/r\ )$

$d\varphi/dr = P/\ 2\pi\ (-\tfrac{1}{4} + 3/8\ r^2/a^2 - \tfrac{1}{2} \lg r/b - \tfrac{1}{2} C_1 + C_2/r^2)$

$\varphi/r = P/2\pi\ (\tfrac{1}{4} + 3/8\ r^2/a^2 - \tfrac{1}{2} \lg r/b - \tfrac{1}{2} C_1 - C_2/r^2\ )$.

$(M_r)_{r=a} = 0$ atau $(d\varphi/dr)_{r=a} = 0$; $\quad 1/8 - \tfrac{1}{2} \lg a/b - \tfrac{1}{2} C_1 + C_2/a^2 = 0$ (1)

$\varphi_{r=b} = 0$; $\quad \tfrac{1}{4} + 1/8\ b^2/a^2 - \tfrac{1}{2} C_1 - C_2/\ b^2 = 0$ (2)

$C_2\ (1/a^2 + 1/b^2) = 1/8\ \ (1 + b^2/a^2) + \tfrac{1}{2} \lg a/b.$

$C_2 = a^2b^2 / 8(a^2 + b^2)$ $(a^2 + b^2 / a^2 + 4 \lg a/b) = 1/8\ b^2$

$(1 + 4.\ a^2/ a^2+b^2 \lg a/b)$

$= 1/8\ b^2 (1 + 4.\ \beta^2 / 1 + \beta^2 \lg \beta$ jika $\beta = a/b$

$\frac{1}{2} C_1 = \frac{1}{4} + 1/8\ b^2/a^2 - C_2/b^2 = 1/8\ (1 + 1/\beta^2 - 4.\ \beta^2 / 1 + \beta^2 \lg \beta)$.

Kemudian menulis $r/b = \rho$, jadi $r^2/a^2 = \rho^2 / \beta^2$.

$M_r = Dd\varphi/dr = P/16\ \pi\ [-2 + 3\ \rho^2 / \beta^2 - 4 \lg \rho - 1 - 1/\beta^2 +$

$+ 4.\ \beta^2 / 1 + \beta^2 \lg \beta + 1 / \rho^2 (1 + 4.\ \beta^2/ 1 + \beta^2 \lg \beta)]$

$= P/ 16\ \pi\ [- (1 - \rho^2 / \beta^2) (3 - 1/\rho^2) + \frac{4\beta^2 \lg \beta}{1 + \beta^2} \cdot (1 - 1/\rho^2) - 4 \lg \rho]$

$= P/ 16\pi.\ k_r$.

$M_t = D/r = P/16\pi\ [(\rho^2/\beta^2 - 1/\beta^2)(1+\beta^2/\rho^2) + 4\ \beta^2 \lg \beta / 1 + \beta^2.\ (1-1/\rho^2)$

$- 4 \lg \rho] = P/16\ \pi$

Sebagai contoh bilangan, kita ambil $a = 4b$, jadi $\beta = a/b = 4$. Jarak $s = a - b = 3b$ kita bagi-bagi dalam 5 interval, berarti $\Delta r = 3b/5 = 0{,}6$;

$\Delta\rho = 0{,}60$; $r_1 = b$; $\rho_1 = 1$; $r_2 = r_1 + \Delta r$; $\rho_3 = 2{,}2$ dst.

$\lg \beta = \lg 4 = 1{,}386$.

Titik	0	1	2	3	4	4,5	5
ρ	1,0	1,6	2,2	2,8	3,4	3,7	4.0
$\lg \rho$	0,000	0,470	0,789	1,030	1,284	1,308	1,386
$1/\rho^2$	1.000	0,390	0,206	0,127	0,087	0,074	0,0625
ρ^2/β^2	0,0625	0,160	0,303	0,490	0,223	0,925	1.000
β^2 / 2	16,000	6,260	3,310	2,032	1,392	1,175	1.000
k_r	8,625	3,110	0,784	0,330	–0,050	–0,080	0,000
k_t	0,000	1,975	2,114	1,882	1,464	1,360	1,221

Terdapat bahwa M_r itu cepat sekali berkurangnya makin jauh dari titik-tengah lingkaran, dapat menjadi negatif di dekat tepi; sedang variasi pada nilai M_t relatif kecil.

Ternyata M max = M_r max = 8,625. $P/16\ \pi \backsimeq 0{,}54\ P/\pi$

Menurut daftar di atas dengan v = 0,3 pada kejadian 3 dan a/b = 4 terdapat k = 2,99, yang berarti $M_{max} = 1/6.\ 2{,}99\ qa^2 = 2.99/6\ P/\pi \backsimeq 0{,}50\ P/\pi$

Jadi secara mengabaikan v itu menghasilkan pendapat yang aman, sedang hitungannya menjadi lebih mudah, lagi pula nilai ν itu masih problematik.

Nilai momen extrem tidak dipengaruhi oleh besar – kecilnya radius pelat a, melainkan oleh $\beta = a/b$; bertambah jika a/b bertambah.

Soket, yaitu bagian perlebaran pada kaki tihang dibuat cukup tinggi supaya menghasilkan jepit sempurna sepanjang keliling lingkaran dengan radius=b (anggapan $\varphi_{r=b} = C$).

Pada hakekatnya, tekanan tanah q_r itu tidak tetap, makin menengah makin besar; sehingga q_r max. $> q = P/\pi a^2$, sedang q_r – max $\leqslant$ yang diperbolehkan, yaitu q.

Berhubung dengan ini diambil $q = \alpha q$, dengan $\alpha < 1$; misalnya $\alpha = 2/3$. Ini menentukan besarnya radius pelat a berhubung dengan kemampuan tanahnya, dan kemudian $b = a/\beta$.

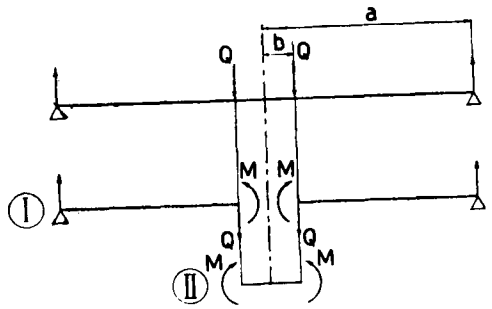
Pelat alas biasanya dibuat dari beton tulang, dengan tulangan-tulangan radial untuk M_r dan lingkaran-lingkaran konsentirs untuk M_t yang boleh diselenggarakan berbentuk spiral.

M_r negatif relatif kecil sekali terhadap M max (menurut contoh $\backsimeq 0{,}01$ nya), sehingga tidak memerlukan tulangan.

§ 4. Muatan berpusat konsentris.

Tepi diletakkan secara bebas, dan muatan adalah terbagi rata menurut lingkaran konsentris dengan radius = b; jadi ordinat-muatan berdimensi kg/m Lantai dibagi di dalam dua bagian, I dan II (gambar XII, 7)

Bagian II (dalam) adalah lantai menahan momen terbagi rata sebesar M pada tepinya.



Gambar XII, 7

sedang bagian I (luar) adalah lantai berlobang yang dibengkok oleh momen M dan kekuatan melintang Q.

Jumlah muatan adalah $P = 2\pi b \,.\, Q$, jadi $Q = \dfrac{P}{2\pi b}$.

Serong tepi luar bagian II = serong tepi dalam bagian I.

Serong tepi dalam pada bagian I terdapat sebagai jumlah dari (27a) dan (29a).

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=b} = \frac{a^2b^2M}{D(1-\nu)(a^2-b^2)}\left(\frac{1}{b}+\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)}\cdot\frac{b}{a^2}\right)+\frac{Pb}{8\pi D}\left\{2\lg\frac{6}{a}-1-\frac{1-\nu}{1+\nu}+\right.$$
$$\left.+\frac{2b^2}{a^2-b^2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\lg\frac{a}{b}\right)\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Bagian II melengkung menurut bidang bola (bab XI' φ § 7a)

$$\frac{1}{r} = -\frac{d^2w}{dr^2} = \frac{M}{(1+\nu)D}$$

$$-\frac{dw}{dr} = \frac{M}{(1+\nu)D}r + C_1 \text{ dengan } \frac{dw}{dr} = o \text{ untuk } r = o, \text{ jadi } C_1 = o$$

$$-w = \frac{Mr^2}{2(1+\nu)D} + C_2 \text{ dengan } w = o \text{ untuk } r = b, \text{ jadi } C_2 = -\frac{Mb^2}{2(1+\nu)D}$$

$$w = \frac{M(b^2-r^2)}{2(1+\nu)D} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

Serong tepi bagian II untuk r = b menjadi:

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=b} = -\frac{Mb}{(1+\nu)D} \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

(I) = (II)

$$M = \left\{\frac{(1-\nu)(a^2-b^2)}{8\pi a^2} - \frac{(1+\nu)\lg b/a}{4\pi}\right\}P =$$

$$= \frac{P}{8\pi}\left\{(1-\nu)\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right) - 2(1+\nu)\lg\frac{b}{a}\right\} = \frac{P}{8\pi}\cdot k \ldots . (33)$$

Bagian luar I.

Lengkungan sebagai akibat dari M: w_m menurut (28)

Lengkungan sebagai akibat dari Q : w_q menurut kejadian b)

$$w_I = w_m + w_q = \frac{P}{8\pi D}\left\{(a^2-r^2)\left(1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)}\cdot\frac{(a^2-b^2)}{a^2}\right)+\right.$$
$$\left.+(b^2+r^2)\lg\frac{r}{a}\right\} = \frac{P}{8\pi D}\cdot k_I$$

Pada $r = b$ menjadi:

$$w_{Ib} = \frac{P}{8\pi D}\left\{(a^2-b^2)\left(1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)}\cdot\frac{(a^2-b^2)}{a^2}\right)+2b^2\lg\frac{b}{a}\right\}$$

Lengkungan bagian dalam (II) terdapat sebagai jumlah dari w_{Ib} dan (32)

$$w_{II} = \frac{P}{8\pi D}\left\{(a^2-b^2)\left(1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1-\nu}{1+\nu}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)+2b^2\lg\frac{b}{a}\right\}+$$
$$+\frac{P(b^2-r^2)}{2(1+\nu)D}\left\{\frac{(1-\nu)(a^2-b^2)}{8\pi a^2} - \frac{(1+\nu)\lg b/a}{4\pi}\right\} =$$
$$= \frac{P}{8\pi D}\left[\left\{(a^2-b^2)\left(1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)}\cdot\frac{(a^2-b^2)}{a^2}\right)+2b^2\lg\frac{b}{a}\right\}+\right.$$
$$\left.+\frac{(b^2-r^2)}{(1+\nu)}\left\{\frac{(1-\nu)(a^2-b^2)}{2a^2} - (1+\nu)\lg b/a\right\}\right] =$$
$$= \frac{P}{8\pi D}\left[(b^2+r^2)\lg\frac{b}{a}+\frac{(a^2-b^2)}{2(1+\nu)a^2}\{2(1+\nu)a^2+(1-\nu)(a^2-r^2)\}\right] =$$
$$= \frac{P}{8\pi D}\left\{(b^2+r^2)\lg\frac{b}{a}+(a^2-b^2)\frac{(3+\nu)a^2-(1-\nu)r^2}{2(1+\nu)a^2}\right\} = \frac{P}{8\pi D}\cdot k_{II}$$

Untuk menghitung M_r dan M_t kita menggunakan (15) dengan mengingat bahwa untuk bagian 1 kita harus memakai rumus w_1 dan untuk bagian II, rumus w_{11}. Yang terakhir ini menghasilkan $M_r = M_t = M$

Pada bagian luar menjadi :

$\varphi = -dw/dr = P / 8\pi D \; [\; 2r \{ 1 + (1-\nu)(a^2-b^2) / 2(1+\nu) a^2 \} - b^2/r - r(1 + 2 \lg r/a) \;]$

$d\varphi/dr = P/8\pi D \; [\; (1-\nu)(a^2-b^2) / (1+\nu) a^2 - 1 + b^2/r^2 - 2 \lg r/a \;];$

$\varphi/r = P/8\pi D \; [\; (1-\nu)(a^2-b^2) / (1+\nu) a^2 + 1 - b^2/r^2 - 2 \lg r/a \;]$

$M_r = D(d\varphi/dr + \nu\varphi/r) = P/8\pi \; [\; (1-\nu)(1-b^2/a^2) - (1-\nu)(1-b^2/r^2) - 2(1+\nu) \lg r/a \;]$

$M_t = D(\nu\, d\varphi/dr + \varphi/r) = P/8\pi \; [\; (1-\nu)(1-b^2/a^2) + (1-\nu)(1-b^2/r^2) - 2(1+\nu) \lg r/a \;]$

Pada r = b terdapat; $M_r = M_t = M = P/8\pi \; [\; (1-\nu)(1-b^2/a^2) - 2(1+\nu) \lg b/a \;]$

Ringkasan :

Bagian I atau luar dengan r = b serta gaya lintang $Q = P / 2\pi r$

$d/dr \; [\; 1/r \; d(r\varphi)/dr \;] = -P/2\pi D; \; 1/r \; d(r\varphi)/dr = -P/2\pi D (\lg r/a + C_1);$

$d(r\varphi)/dr = -P/2\pi D \; (r \lg r/a + C_1 r).$

$r\varphi = -P/2\pi D \; (\tfrac{1}{2} r^2 \lg r/a - \tfrac{1}{4} r^2 + \tfrac{1}{2} C_1 r^2 + C_2);$

$\varphi = -P/2\pi D \; (\tfrac{1}{2} r \lg r/a - \tfrac{1}{4} r + \tfrac{1}{2} r + \tfrac{1}{2} C_1 r + C_1/r).$

$d\varphi/dr = -P/2\pi D \; (\tfrac{1}{2} \lg r/a + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} C_1 - C_2/r^2);$

$\varphi/r = -P/2\pi D \; (\tfrac{1}{2} \lg r/a - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} C_1 + C_2/r).$

$M_r = D(d\varphi/dr + \nu\varphi/r).$

$(M_r)_{r=a} = 0; \; (d\varphi/dr + \nu\varphi/r)_{r=a} = 0 \; \ldots\ldots\ldots \quad (1)$

$(M_r)_{r=b} = M \quad \ldots\ldots \quad (I); \quad \varphi_{r=b} = (\varphi_b)_1 \quad (II)$

Bagian dalam dengan r = b dan gaya lintang Q = 0

$d/dr \; [\; 1/r \; d(r\varphi)/dr \;] = 0; \; 1/r \; d(r\varphi)/dr = C_3/D; \; d(r\varphi)/dr = C_3 r/D;$

$r\varphi = \tfrac{1}{2} C_3 r^2/D + C_4.$

$(r\varphi)_{r=0} = 0; \; C_4 = 0$

$\varphi = \tfrac{1}{2} C_3 \, r/D; \; d\varphi/dr = \varphi r = \tfrac{1}{2} C_3/D$ (tetap).

$M_r = D(d\varphi/dr + \nu\varphi/r) = \tfrac{1}{2} C_3 = M \quad (III)$

$\varphi_{r=b} \; (\varphi_b)_2 = \tfrac{1}{2} C_3 \, b/D \quad (IV)$

Terdapat 3 persamaan untuk menghitung C_1, C_2 dan C_3.

$(M_r)_{r=a} = 0 \quad (1) \; ; \; I = III \quad (2) \quad II = IV \quad (3).$

Jika tepi pelat terjepit, persamaan (1) diganti dengan $\varphi_{r=a} = 0$.

§ 5. Seperti di atas, tetapi tepi dijepit.

Di dalam kejadian di atas, serong tepi pada perletakan terdapat dengan secara mendifferensi w_1 dan sesudah itu mengisi r = a.

$$\left(\frac{dw_I}{dr}\right)_{r=a} = -\frac{P}{4\pi D} \cdot \frac{1}{(1+\nu)} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2} = -\varphi_{Ia}$$

Jepitan di tepi menimbulkan momen M dan sebagai akibat dari pada nya; tepi berserong sebanyak:

$\left(\frac{dw_m}{dr}\right)_{r=a} = -\frac{M_a}{(1+\nu)D} = -\varphi_{ma}$ (lihat rumus $\frac{dw}{dr}$ untuk bagian II di atas).

Oleh karena adanya jepitan serong tepi lantai = 0

$\varphi_{ma} = \varphi_{Ia}$

$$M = \frac{P}{4\pi} \frac{(a^2-b^2)}{a^2}$$

Lengkungan yang ditimbulkan oleh M terdapat menurut (32) setelah diganti dengan a;

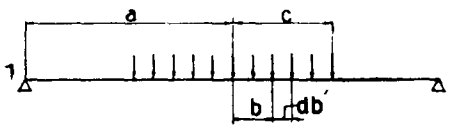
$$w_m = -\frac{M(a^2-b^2)}{2(1+\nu)D} = \frac{P}{8\pi(1+\nu)D}\cdot\frac{(a^2-b^2)}{a^2}(r^2-a^2)$$

Kemudian pendapat ini ditambahkan kepada pendapat-pendapat w_1 dan w_{11} di atas

§ 6. Muatan terbagi rata di dalam bidang konsentris.

Radius bidang muatan ini adalah c. Besaran P menurut pendapat-pendapat di atas. diganti dengan $2\pi bq$, db dan kemudian kita mengintegrasi mulai – dari b = 0 sampai b = c

Untuk bagian di luar bidang muatan, jadi $a > r > c$ terdapat :



Gambar XII, 8

$$w_1 = \frac{q}{4D}\int_o^c k_1 . bdb = \frac{qc^4}{16D}\left\{\lg\frac{r}{a} - \frac{(1-\nu)(a^2-b^2)}{2(1+\nu)a^2}\right\} +$$

$$+\frac{qc^2}{8D}\left\{\frac{(3+\nu)}{2(1+\nu)}(a^2-r^2) + r^2\lg\frac{r}{a}\right\}$$

Untuk titik tengah dengan r = o terdapat

$$(w_{11})_{r=o} = \frac{q}{4D}\int_o^c k_{11}\, bdb = \frac{qc^2}{16D}\left\{\frac{(3+\nu)}{1+\nu}\cdot a^2 + c^2\lg\frac{c}{a} - \frac{(7+3\nu)}{4(1+\nu)}c^2\right\}$$

Momen di titik tengah terdapat maximum dan boleh dihitung secara mengintegrasi (33)

$$(M)_{r=o} = \int_o^c k\cdot\frac{P}{8\pi} = \tfrac{1}{4}q\int_o^c kbdb = \tfrac{1}{4}qc^2\left\{(1+\nu)\lg\frac{a}{c} + 1 - \frac{(1-\nu)c^2}{4a^2}\right\}$$

Untuk menghitung M_r dan M_t kita menggunakan pula rumus (15). Di bagian luar bidang muatan kita terdapat :

$$M_r = \tfrac{1}{4}(1+\nu)qc^2\lg\frac{a}{r} + \tfrac{1}{16}(1-\nu)qc^4\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{a^2}\right) =$$

$$= qc^2\left\{\tfrac{1}{4}(1+\nu)\lg\frac{a}{r} + \tfrac{1}{16}(1-\nu)\left(\frac{c^2}{r^2}-\frac{c^2}{a^2}\right)\right\}$$

$$M_t = qc^2\left[\tfrac{1}{4}\left\{(1+\nu)\lg\frac{a}{r} + (1-\nu)\right\} - \tfrac{1}{16}(1-\nu)\left(\frac{c^2}{r^2}-\frac{c^2}{a^2}\right)\right]$$

§ 7. Muatan terpusat.

Sesuatu muatan terpusat P yang berdiri sejauh b dari titik tengah lantai menimbulkan lengkungan w_o di titik tengah lantai, yang tak akan berobah jika P dipindah-pindah menurut lingkaran dengan radius b. Jadi untuk menghitung w_o ini, muatan P boleh dianggap sebagai terbagi rata menurut lingkaran dengan radius b tadi. Dengan begitu kita boleh menggunakan rumus w_{11} di dalam § 4 untuk menghitung w_o dengan menentukan r = o.

$$w_o = \frac{P}{8\pi D}\left\{b^2\lg\frac{b}{a} + (a^2-b^2)\frac{(3+\nu)a^2}{2(1+\nu)a^2}\right\} =$$

$$= \frac{Pb^2}{8\pi D}\lg\frac{b}{a} + \left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)\frac{3+\nu}{2(1+\nu)} = \frac{P}{8\pi D}\cdot k_o$$

Sebagai akibat dari beberapa muatan-muatan terpusat, kita dapat menghitung w_o dengan secara superposisi:

$$w_o = \frac{1}{8\pi D}\Sigma Pk_o$$

§ 8. Muatan terpusat di titik tengah lantai.

Hitungan di dalam § 6 dapat diselenggarakan dengan menganggap c = o sedang $q\pi c^2 = P$, jadi bernilai tertentu dan tidak nol, meskipun c = o

Di dalam rumus w_{11} maka qc^2 diganti dengan $\frac{P}{\pi}$ untuk menghitung w_o

$$w_o = \frac{P}{16\pi D}\frac{(3+\nu)}{1+\nu}\cdot a^2 = \frac{(3+\nu)}{(1+\nu)16\pi D}\cdot Pa^2$$

Lengkungan pada titik lain terdapat menurut rumus w_1

$$w = \frac{P}{16\pi D}\left\{\frac{3+\nu}{1+\nu}(a^2-r^2) + 2r^2\lg\frac{r}{a}\right\} =$$

$$= \frac{Pa^2}{16\pi D}\left\{\frac{3+\nu}{1+\nu}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right) + 2\frac{r^2}{a^2}\lg\frac{r}{a}\right\}$$

Momen-momen di titik di luar P terdapat menurut rumus-rumus untuk M dan M_t dengan $qc^2 = \frac{P}{\pi}$ serta $c = o$.

$$M_r = \frac{P}{4\pi}(1 + \nu) \lg \frac{a}{r}$$

$$M_t = \frac{P}{4\pi}\left\{(1 + \nu) \lg \frac{a}{r} + (1 - \nu)\right\}$$

Apabila tepi lantai dijepit, maka di sini ada momen jepit sebesar M yang menimbulkan serong $\varphi_m = -\frac{M}{(1 + \nu)D} \cdot r$.

$$(\varphi_m)_{r=a} = -\frac{M}{(1 + \nu)D} \cdot a \text{ (lihat § 5)}$$

$$(\varphi_p)_{r=a} = \left(-\frac{dw}{dr}\right)_{r=a} = \frac{P}{4(1 + \nu)\pi D}$$

$$(\varphi_m)_{r=a} = (\varphi_p)_{r=a}$$

$$M = -\frac{P}{4\pi}$$

$$M_r = \frac{P}{4\pi}(1 + \nu) \lg \frac{a}{r} - M = \frac{P}{4\pi}\left\{(1 + \nu) \lg \frac{a}{r} - 1\right\}$$

$$M_t = \frac{P}{4\pi}\left\{(1 + \nu) \lg \frac{a}{r} - \nu\right\}$$

$$w_m = -\frac{M(a^2 - r^2)}{2(1 + \nu)D} = \frac{P(r^2 - a^2)}{8\pi D(1 + \nu)} = \frac{Pa^2}{8\pi D(1 + \nu)}\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right) =$$

$$= -\frac{Pa^2}{16\pi D(1 + \nu)} 2\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

Setelah digabungkan dengan pendapat di atas, kita mencapai:

$$w = \frac{Pa^2}{16\pi D}\left\{\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) + 2\frac{r^2}{a^2} \lg \frac{r}{a}\right\}$$

Untuk $r = o$, nilai $\frac{a}{r} = \infty$. Jadi rumus-rumus di atas ini tak berguna untuk titik tengah lantai.

Muatan P dianggap terbagi rata di dalam bidang lingkaran dengan radius c. Jika c berkurang maka tekanan di atas muka lantai $\frac{P}{\pi c^2}$ bertambah sehingga tak boleh diabaikan terhadap tegangan-tegangan lengkung. Lagi pula tegangan geser sebesar $\frac{P}{2\pi ch}$ bertambah juga dan tak boleh diabaikan. Di dalam keadaan limit, jika c - kedua-dua besaran yang dulu diabaikan itu, meningkat menjadi ∞.

§9. Korreksi pada theori elementer.

Rumus (9) yang menunjukkan hubungan antara momen lengkung dan lengkungan serta radius perbengkokan terdapat dengan mengabaikan akibat dari tegangan geser dan tekanan $\perp$ bidang muka lantai. Rumus ini menghasilkan pendapat yang saksama di dalam hitungan pada lantai bulat yang dibengkok menurut bidang bola dan yang hanya menahan momen murni terbagi rata pada tepi luar dan atau tepi dalam. Untuk peristiwa lain-lainnya, pendapat-pendapat adalah hanya nilai pendekatan, dan saksamanya tergantung kepada perbandingan antara tebal lantai dan radiusnya (jadi nilai $\frac{h}{a}$).

Kesaksamaan bertambah jika kita memperhitung akibat dari tegangan geser dan tekanan $\perp$ muka lantai. Di sini kita akan mengambil beberapa contoh.

a. Lantai lingkaran terletak bebas dengan muatan penuh terbagi rata (lihat § 2b).

Kekuatan geser $Q = \frac{qr^2}{2\pi r} = \frac{1}{2}\pi qr$. Seperti terketahui, pada tampang persegi, tegangan geser terbagi menurut parabol dengan puncak di garis - netral (atau di tengah-tengah). Jadi $\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{h} = \frac{3}{4} q \frac{r}{h}$ (lebar tampang b = 1).

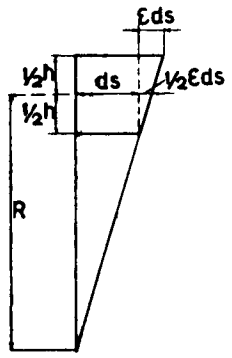
Keserongan pada bidang tengah lantai yang disebabkan oleh geseran :

$$\frac{dw_1}{dr} = -\frac{1}{G} \cdot \tau_{max} = -\frac{3}{4}\frac{qr}{Gh}$$

$$w_1 = -\frac{3}{8Gh} \cdot qr^2 + C \text{ sedang } (w_1)_{r=a} = o; \text{ jadi } C = \frac{3}{8Gh} qa^2$$

$$w_1 = \frac{3}{8Gh} q(a^2 - r^2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2(1 + \nu)}{Eh} q(a^2 - r^2) = \frac{3(1 + \nu)}{48(1 - \nu)D} qh^2(a^2 - r^2)$$

Tekanan ⊥ muka lantai sebesar q(kg/cm^2) menimbulkan perkembangan pada muka atas, yang pada bidang tengahnya boleh dianggap bernilai separohnya dan lenyap pada bidang bawah. Jadi peristiwa ini menimbulkan *lengkungan negatif.* Perpanjangan radial pada muka atas lantai terdapat $\varepsilon ds = \frac{\nu}{E} qds$, dan di tengah-tengah menjadi $\frac{1}{2}\varepsilon ds$.



Gambar XII, 9

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon ds : \tfrac{1}{2}h = (ds + \tfrac{1}{2} . \varepsilon ds) : R$$

$$\varepsilon : h = (1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon) : R \infty 1 : R$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\varepsilon}{h} = \frac{\nu q}{Eh} = -\frac{d^2w}{dr^2}$$

$$w_2 = -\frac{1}{2R}(a^2 - r^2) = -\frac{\nu q}{2Eh}((a^2 - r^2) =$$

$$= -\frac{\nu q h^2(a^2 - r^2)}{24(1 - \nu^2)D}$$

Lengkung yang terdapat menurut (25) ditambah dengan w_1 dan w_2.

$$w = \frac{q(a^2 - r^2)}{64D}\left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} \cdot a^2 - r^2\right) + \frac{3(1 + \nu)qh^2(a^2 - r^2)}{48(1 - \nu^2)D} - \frac{\nu q h^2(a^2 - r^2)}{24(1 - \nu^2)D} =$$

$$= \frac{q(a^2 - r^2)}{D}\left\{\tfrac{1}{64}\left(\frac{(5 + \nu)}{(1 + \nu)}a^2 - r^2\right) + \tfrac{1}{48}\frac{(3 + \nu)}{(1 - \nu)} \cdot h^2\right\} =$$

$$= \frac{qa^4}{D}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)\left\{\tfrac{1}{64}\left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} - \frac{r^2}{a^2}\right) + \tfrac{1}{48}\frac{3 + \nu}{(1 - \nu)} \cdot \frac{h^2}{a^2}\right\}$$

Suku yang kedua di antara tanda { } ini mengandung akibat dari tegangan geser serta tekanan muka lantai, sedang nilanya berbanding lurus dengan $\left(\frac{h}{a}\right)^2$

b. Seperti a, tetapi tepi dijepit.

Di sini muka lantai tak dapat berkembang dan oleh karena itu suku w_2 lenyap, sedang w_1 tetap.

c. Lantai berlobang yang menahan kekuatan melintang terbagi rata sepanjang tepi dalam.

Kekuatan melintang adalah Q, jadi $P = 2\pi r Q$ atau $Q = \frac{P}{2\pi r}$;

$$\tau_{max} = \tfrac{3}{2}\frac{Q}{h} = \tfrac{3}{4}\frac{P}{\pi r h}$$

$$\frac{dw_1}{dr} = -\tfrac{3}{4}\frac{P}{\pi r h G}$$

$$w_1 = \tfrac{3}{4}\frac{P}{\pi G h}\lg\frac{a}{r} = \frac{Ph^2}{8\pi(1 - \nu)D}\lg\frac{a}{r}$$

Ini ditambahkan kepada (30) di dalam § 3:

$$w = \frac{Pa^2}{8\pi D}\left\{\frac{3 + \nu}{2(1 + \nu)}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) + \frac{r^2}{a^2}\lg\frac{r}{a} + \frac{h^2/a^2}{1 - \nu}\lg\frac{r}{a}\right\}$$

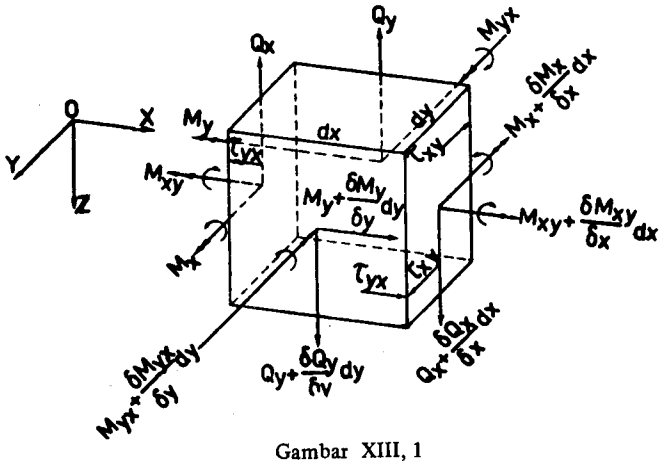
BAB XIII

LANTAI DIMUATI

§1. Persamaan differensi lengkungan.

Muatan dianggap bekerja ⊥ bidang atas, dan lengkungan dianggap kecil dibandingkan dengan tebal lantai. Selanjutnya dianggap pula bahwa tepi lantai bebas untuk bergerak di dalam bidangnya, jadi reaksi perletakan di situ bekerja ⊥ lantai. Dengan begitu kita boleh mengabaikan adanya tegangan di dalam bidang tengah lantai.

Kita mengambil bagian elemen seperti digambar XIII, 1. Di samping momen-momen lengkung dan twist sekarang terdapat juga kekuatan-kekuatan melintang vertikal:



Gambar XIII, 1

$$Q_x = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \tau_{xz} dz \quad \text{dan} \quad Q_y = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \tau_{yz} dz$$

Muatan di atas bidang muka lantai adalah q (kg/cm²) Sarat-sarat seimbang

a. Jumlah kekuatan-kekuatan vertikal = 0

$$\frac{\delta Q_x}{\delta x} dxdy + \frac{\delta Q_y}{\delta y} dydx + qdxdy = o$$

$$\frac{\delta Q_x}{\delta x} + \frac{\delta Q_y}{\delta y} + q = o$$

b. Jumlah momen terhadap sumbu – X = 0 dengan mengabaikan momen berasal dari q dan dQ_y

$$\frac{\delta M_{xy}}{dx} dxdy + \frac{\delta M_y}{dy} dydx - Q_y dx \,.\, dy = o$$

$$\frac{\delta M_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta M_y}{\delta y} - Q_y = o; Q_y = \frac{\delta M_y}{\delta y} + \frac{\delta M_{xy}}{\delta x}$$

c. Jumlah momen terhadap sumbu – Y = 0.

$$-\frac{\delta M_{yx}}{\delta y} dy \,.\, dx - \frac{\delta M_x}{\delta x} dx \,.\, dy + Q\, dy \,.\, dx = o.$$

$$\frac{\delta M_{yx}}{\delta y} + \frac{\delta M_x}{\delta x} - Q_x = o; Q_x = \frac{\delta M_x}{\delta x} + \frac{\delta M_{yx}}{\delta y}$$

Sarat-sarat di atas ini sudah mencukupi oleh karena tidak ada; kekuatan-kekuatan menurut arah X dan Y, serta momen-momen terhadap sumbu Z.

Nilai-nilai Q_y dan Q_x menurut sarat-sarat b dan c dipakai di dalam rumus seimbang di sarat a

$$\frac{\delta^2 M_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 M_{yx}}{\delta y \delta x} + \frac{\delta^2 M_y}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 M_{xy}}{\delta x \delta y} + q = o$$

Oleh karena $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ maka $M_{xy} = M_{xy}$.

$$\frac{\delta^2 M_x}{\delta y^2} + 2\frac{\delta^2 M_{xy}}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 M_y}{\delta y^2} + q = o \quad \cdots\cdots\cdots \quad (34)$$

Selanjutnya kita menggunakan rumus-rumus (8) dan (11) di dalam bab XI § 5, setelah mengganti M_{nt} dengan M_{xy} di dalam rumus (11).

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -D\left(\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \nu \frac{\delta^2 w}{\delta y^2}\right) \\ M_y &= -D\left(\nu \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 y}{\delta y^2}\right) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (8)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = D(1-\nu)\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (11)$$

Nilai-nilai ini kita pakai di dalam rumus (34) di atas itu :

$$\frac{\delta w^4}{\delta x^4} + 2\frac{\delta^4 w}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 w}{\delta y^4} = \frac{q}{D}$$

Setelah mendapat persamaan untuk w kita dapat menghitung: M_x, M_y dan M_{xy} menurut rumus-rumus (8) dan (11) tadi itu, dan kemudian :

$$Q_x = \frac{\delta M_x}{\delta x} + \frac{\delta M_{yx}}{\delta y} \text{ dan } Q_y = \frac{\delta M_y}{\delta y} + \frac{\delta M_{xy}}{\delta x}$$

§2. Sarat-sarat tepi.

a. Tepi lantai terjepit.

Anggaplah bahwa tepi yang terjepit ini adalah sumbu –X, Pada tepi terjepit ini di mana y = 0, lengkungan = 0 dan tangennya = 0, hal mana dapat dilukiskan demikian:

$$(w)_{y=o} = 0\,; \left(\frac{\delta w}{\delta y}\right)_{y=o} = 0$$

b. Tepi terletak bebas.

Juga di sini dianggap bahwa sumbu –X adalah garis perletakan. Sarat-sarat tepi menjadi, bahwa sepanjang sumbu –X (jadi untuk y = 0) lengkungan = 0 serta $M_y = 0$

$$(w)_{y=o} = 0\,; \left(\nu \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 w}{\delta y^2}\right)_{y=o} = 0.$$

c. Tepi bebas.

Anggaplah bahwa tepi yang bebas ini letaknya // sumbu –Y dan sejauh a darinya, jadi menurut persamaan x = a

Sudah terang bahwa pada tepi bebas ini tak akan ada momen lengkung, momen twist dan kekuatan melintang:

$$(M_x)_{x=a} = 0;\ (M_{xy})_{x=a} = 0;\ (Q_x)_{x=a} = 0$$

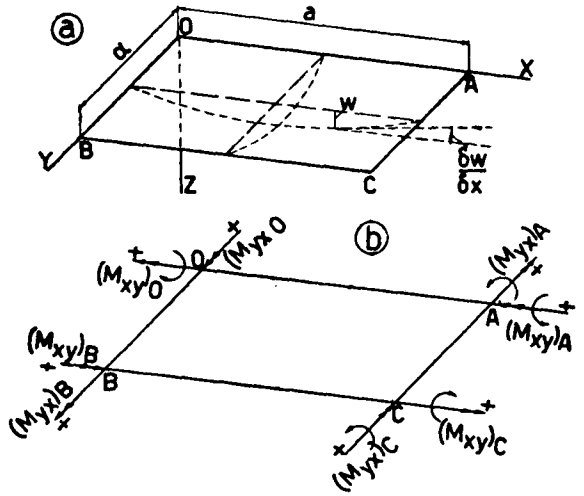
$$\left(\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \nu \frac{\delta^2 w}{\delta y^2}\right)_{x=a} = 0;\ \left(\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y}\right)_{x=a} = 0;\ \left(\frac{\delta M_x}{\delta x} + \frac{\delta M_{xy}}{\delta y}\right)_{x=a} = 0$$

§ 3. Lantai persegi di atas empat sisi perletakan.

Momen twist $M_{xy}dy$ boleh diganti dengan sepasang gaya vertikal K yang membentuk momen (koppel) K.dy = M_{xy} atau K = M_{xy}. Hal ini dapat dibandingkan dengan kejadian c di bab XI § 6, gambar XI, 9, dimana

di ujung-ujung terdapat kekuatan-kekuatan resultan sebesar K = 2 M_{xy}= $D(1 - \nu) \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y}$. Hanya saja disini ada perbedaan, yaitu bahwa K di-semua ujung *sama arahnya,* hal mana dapat diterangkan sebagai berikut:

Gambar XIII, 2a memperlihatkan bagaimana lantai akan melengkung sebagai akibat dari muatan. Kita melihat tampang vertikal // OXY.



Gambar XIII, 2

Sudut lengkungan di titik yang terletak di atas garis OB, yaitu $\left(\frac{\delta w}{\delta x}\right)_{x=o}$ terdapat > o (positif). Makin mendekati titik B makin kecil nilainya, sedang y bertambah. Ini berarti bahwa $\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} < 0$ atau $M_{xy} < 0$, jadi $(M_{xy})_{y=a} = (M_{xy})_B < 0$ yang dilukiskan oleh vektor ke arah dalam, dan menimbulkan kekuatan di ujung sebesar $K = (M_{xy})_B$ ke atas.

Makin mendekati 0, makin berkurang juga $\left(\frac{\delta w}{\delta x}\right)_{x=o}$ sedang y berkurang juga, Ini berarti bahwa $\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} > 0$ dan $(M_{xy})_o > 0$ yang menimbulkan kekuatan sebesar $(M_{xy})_{y=o} = (M_{xy})_O = K$ ke atas. Oleh karena keadaan

serta dimuati dengan tekanan udara secara terbagi rata. ABC adalah bangun lantai (gambar XIII, 3) sedang tinggi ΔABC = a. Titik asal susunan koordinat terletak di titik berat 0 di dalam Δ ABC.

Persamaan garis AB : $x = -\frac{1}{3}a$ atau $x + \frac{1}{3}a = 0$ (I)

Idem garis $AC : y = \frac{1}{3}x\sqrt{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}a\sqrt{3}$ atau $\frac{1}{3}x\sqrt{3} - y - \frac{2}{9}a\sqrt{3} = 0$ (II)

Garis $BC : y = -\frac{1}{3}x\sqrt{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}a\sqrt{3}$ atau $\frac{1}{3}x\sqrt{3} + y - \frac{2}{9}a\sqrt{3} = 0$ (III)

Kita mengambil hasil dari ketiga-tiga persamaan ini, jadi (I) × (II) × (III):

$$(x + \tfrac{1}{3}a)\quad (\tfrac{1}{3}x\sqrt{3} - y - \tfrac{2}{9}a\sqrt{3})\quad (\tfrac{1}{3}x\sqrt{3} + y - \tfrac{2}{9}a\sqrt{3}) = \tfrac{1}{3}\{(x^3 - 3xy^2) - a(x^2 + y^2) + \tfrac{4}{27}a^3\}$$

Untuk setiap titik yang terletak pada sesuatu sisi ABC, maka hasil ini bernilai nol

Hal ini kita sesuaikan dengan keadaan, bahwa lengkungan w untuk Setiap titik yang terletak pada sesuatu sisi ini, bernilai nol.

Berhubung dengan ini, maka persamaan garis lengkung lantai boleh kita lukiskan demikian:

$$w = C \cdot \tfrac{1}{3}\{(x^3 - 3xy^2) - a(x^2 + y^2) + \tfrac{4}{27}a^3\}$$

Setelah mendifferensi dua kali ke-x dan ke-y kita mencapai:

$$\frac{\delta w}{\delta x} = \tfrac{1}{3}C(3x^2 - 3y^2 - 2ax);\ \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} = \tfrac{1}{3}C(6x - 2a)$$

$$\frac{\delta w}{\delta y} = \tfrac{1}{3}C(-6xy - 2ay);\ \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} = \tfrac{1}{3}C(-6x - 2a)$$

$\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} = -\frac{4}{3}Ca$, sedang menurut (40) dengan M = M_n;

$$\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} = -\frac{M_n}{D}.$$ Jadi :

$$-\tfrac{4}{3}Ca = -\frac{M_n}{D}$$

$$C = \tfrac{3}{4}\frac{M_n}{aD}$$

$$w = \frac{M_n}{4aD}\{(x^3 - 3xy^2) - a(x^2 + y^2) + \tfrac{4}{27}a^3\}$$

Untuk titik 0 dengan $x = y = 0$;

$$w_o = \frac{M_n a^2}{27D}$$

$$M_x = -D\left(\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \nu\frac{\delta^2 w}{\delta y^2}\right) = -D \cdot \tfrac{1}{3}C\{(6x - 2a) - \nu(6x + 2a)\} =$$

$$= \frac{-M_n}{4a}\{6(-\nu)x - 2(1 + \nu)a\} = \tfrac{1}{2}M_n\{(1 + \nu) - \frac{3}{a}(1 - \nu)x\}$$

$$M_y = -D\left(\nu\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 w}{\delta y^2}\right) = -D\{\nu(6x - 2a) - (6x + 2a)\} =$$

$$= -\frac{M_n}{4a}\{-6(1 - \nu)x - 2(1 - \nu)a\} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}M_n\left\{-1 + \nu - \frac{3}{a}(1 - \nu)x\right\} = \tfrac{1}{2}M_n\left\{1 - \nu + \frac{3}{a}(1 - \nu)x\right\}$$

$$M_x + M_y = M_n$$

$$M_{xy} = D(1 - \nu)\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} = D(1 + \nu) \cdot \tfrac{1}{2}C(-6y) = -\frac{3}{2a}(1 - \nu)M_n y$$

Pada sisi AB kita mendapat :

$$x = -\tfrac{1}{3}a$$

$M_x = \frac{1}{2}M_n\left\{1 + \nu - \frac{3}{a}(1 - \nu)\left(-\frac{a}{3}\right)\right\} = M_n$ (cocok dengan ketentuan semula).

$M_y = \frac{1}{2}M_n\left\{1 - \nu + \frac{3}{a}(1 - \nu)\left(-\frac{a}{3}\right)\right\} = 0$ (Cocok dengan keadaan, sebab tepi diletakkan sepanjang sisinya).

Momens-twist $M_{nt} = M_{xy} = -\frac{3}{2a}(1 - \nu)M_n \cdot y$. Pada ujung A atau B terdapat dengan $y = \mp\frac{1}{3}a - 3 : (M_{nt})_A = \frac{1}{2}(1 - \nu)M_n\sqrt{3}$ dan $(M_{nt})_B = -\frac{1}{2}(1 - \nu)M_n\sqrt{3}$

Nilai-nilai ini juga terdapat pada sisi-sisi CA dan CB oleh karena keadaan simetris, Momen-momen twist di ujung menimbulkan kekuatan *ke atas* sebesar $2(M_{nt})_A = (1 - \nu)\ M_n\ \sqrt{3}$, yang menyebabkan terangkatnya ujung-ujung lantai.

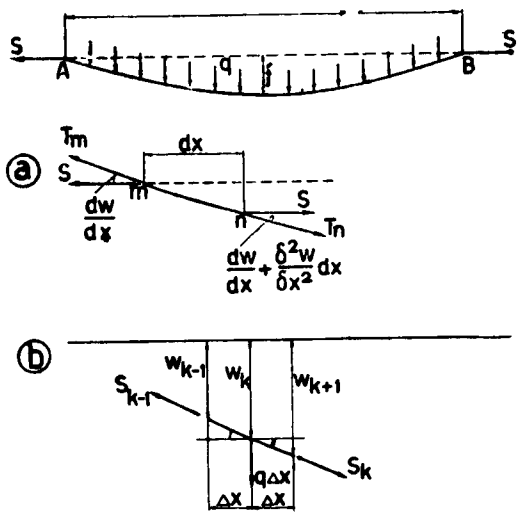
b. Lantai segi penjang dimuati penuh terbagi rata q.

Sisi membujur dianggap amat panjang dan sisi-sisi melintang dipilih // sumbu X. Di tempat yang cukup jauh dari sisi pendek ini boleh dianggap bahwa lantai mleengkung menurut bidang silinder, jadi $\frac{\delta^2 w}{\delta y^2} = 0$.

Persamaan-persamaan (39 dan (40) menjadi :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta^2 M}{\delta x^2} &= -q \\ \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} &= -\frac{M}{D} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

Kedua-dua persamaan ini serupa dengan persamaan pada tali lembek yang ditarik (ditegang) dengan kekuatan S serta dimuati penuh terbagi rata q (gambar XIII,4). Kita mempelajari bagian elemen mn pada mana bekerja kekuatan T_m, T_n dan qdx.



Gambar XIII, 4ab

Menurut sarat seimbang kita mendapat :

$$-S\frac{\delta w}{dx} + S\left(\frac{dw}{dx} + \frac{d^2 w}{x^2}dx\right) + qdx = 0$$

$$\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} = -\frac{q}{S}$$

Setelah menjalankan integrasi: $w = x(l - x)4f/l^2$ yang memenuhi – kepada sarat, bahwa lengkungan w = 0 pada ujung-ujung tali dan w = f di tengah-tengah.

Kita juga boleh menjalankan cara pendekatan grafis jika muatan terbagi diganti dengan muatan-muatan terpusat sebesar $q.\Delta x$ dan kemudian menggam bar poligon batangnya (gambar XIII, 4b)

Kekuatan-kekuatan menegang S_{k-1} dan S_k mempunyai komponen mendatar sama dengan S. Komponen-komponennya vertikal harus seimbang dengan muatan sebesar $q.\Delta x$.

$$\left.\begin{aligned} -S\frac{w_k - w_{k-1}}{\Delta x} + S\frac{w_{k+1} - w_k}{\Delta x} + q.\Delta x = 0 \\ w_k - w_{k-1} = \Delta w_{k-1};\ w_{k+1} - w_k = \Delta w_k \end{aligned}\right\} \text{(b)}$$

$$\Delta w_k - \Delta w_{k-1} = \Delta^2 w_k$$

$$\Delta^2 w_k = w_{k+1} - w_k - (w_k - w_{k-1}) = \begin{matrix} 0 & w_o \\ \Delta x & w_1 \end{matrix}\Big\}\Delta w_o$$

$$= w_{k-1} - 2w_k + w_{k+1} \quad \text{(c)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Untuk menjelaskan satu sama lain, lihatlah daftar di sebelah ini.

Dengan begitu persamaan (b) menjadi

$$\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} = -\frac{q}{S}$$

$$\begin{matrix} (k-1)\Delta x & w_{k-1} \\ & \\ k\Delta x & w_k \\ & \\ (k+1)\Delta x & w_{k+1} \end{matrix}\Big\}\begin{matrix}\Delta w_{k-1} \\ \\ \Delta w_k\end{matrix}\Big\}\Delta^2 w_k$$

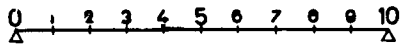
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

dan persamaan-persamaan (a) menjadi

$$\frac{\Delta^2 M}{\Delta x^2} = -q$$

$$\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} = -\frac{M}{D}$$

Sebagai teladan ambillah $\Delta x = \frac{1}{10}l$, jadi $\Delta x^2 = \frac{1}{100}l^2$.



Gambar XIII, 4c

$$\Delta^2 M = -\tfrac{1}{100}ql^2 = -Cq$$

$$\Delta^2 w = -\tfrac{1}{100}\frac{l^2}{D}M = -\frac{C^2}{D}M$$

Sekarang menggunakan rumus (c) yang disesuaikan dengan keadaan:

$k=1;\ 0-2M_1+M_2=-\frac{1}{100}ql^2=-Cq$	$-2w_1+w_2=-\frac{M_1l^2}{100D}=\div\frac{C}{D}\cdot M_1$
$k=2;\ M_1-2M_2+M_3=-Cq$	$w_1-2w_2+w_3=-\frac{C}{D}\cdot M_2$
$k=3;\ M_2-2M_3+M_4=-Cq$	$w_2-2w_3+w_4=-\frac{C}{D}\cdot M_3$
$k=4;\ M_3-2M_4+M_5=-Cq$	$w_3-2w_4+w_5=-\frac{C}{D}\cdot M_5$
$k=5;\ M_4-2M_5+M_4=-Cq$	$w_4-2w_5+w_4=-\frac{C}{D}\cdot M_5$

Oleh karena keadaan simetris, maka $M_6 = M_4$ = dan $w_6 = w_4$; selanjutnya $M_0 = 0$ dan $w_0 = 0$

Persamaan-persamaan kiri menghasilkan:

$$M_1=\tfrac{9}{2}\,.\,Cq=\tfrac{9}{200}ql^2;\ M_2=\tfrac{16}{2}\,.\,Cq=\tfrac{2}{25}ql^2;\ M_3=\tfrac{21}{2}Cq=\tfrac{21}{200}ql^2;$$
$$M_4=\tfrac{24}{2}Cq=\tfrac{3}{25}ql^2;\ M_5=\tfrac{25}{2}Cq=\tfrac{1}{8}ql^2$$

Hasil-hasil ini cocok dengan rumus-momen pada balok dimuati penuh terbagi rata: $M_x=\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2=\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right).4.\frac{1}{8}ql^2$. Sesudah ini, nilai-nilai M kita isi di dalam persamaan-persamaan sebelah kanan :

$$-2w_1+w_2=-\tfrac{9}{2}\frac{C^2}{D}q$$
$$w_1-2w_2+w_3=-\tfrac{16}{2}\frac{C^2}{D}q$$
$$w_2-2w_3+w_4=-\tfrac{21}{2}\frac{C^2}{D}q$$
$$w_3-2w_4+w_5=-\tfrac{24}{2}\frac{C^2}{D}q$$
$$w_4-2w_5+w_4=-\tfrac{25}{2}\frac{C^2}{D}q$$

Kita mendapat hasil:

$$w_1=\tfrac{165}{4}\frac{C^2}{D}q=\tfrac{165}{4}\cdot\frac{q}{10.000D}=0{,}00412\frac{ql_4}{D}$$
$$w_2=\tfrac{312}{4}\frac{C^2}{D}q=0{,}0078\frac{ql^4}{D};\ w_3=\tfrac{427}{4}\frac{C^2}{D}q=0{,}01067\frac{ql^4}{D}$$
$$w_4=\tfrac{500}{4}\frac{C^2}{D}q=0{,}0125\frac{ql^4}{D};\ w_5=\tfrac{525}{4}\frac{C^2}{D}q=0{,}0131\frac{ql^4}{D}$$

Persamaan garis-elastis, seperti telah diketahui, ada demikian:

$$w=\frac{q}{24D}\cdot x(l^3-2lx^2+x^3)=\frac{ql^4}{24D}\cdot\frac{x}{l}\left\{1-2\left(\frac{x}{l}\right)^2+\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\}$$

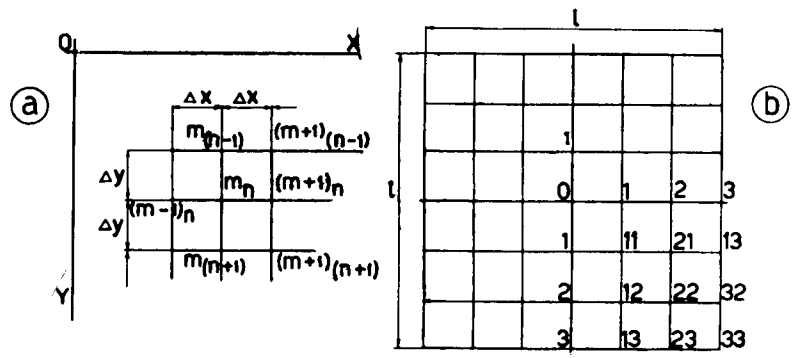
Jadi untuk berturut-turut $\frac{x}{l}=0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4$ dan 0,5 kita mendapat:

$$w_1=\frac{0{,}0981}{24}\frac{ql^4}{D}=0{,}0041\frac{ql^4}{D};\ w_2=\frac{0{,}1856}{24}\frac{ql^4}{D}=0{,}00773\frac{ql^4}{D}$$
$$w_3=\frac{0{,}2541}{24}\frac{ql^4}{D}=0{,}0106\frac{ql^4}{D};\ w_4=\frac{0{,}2976}{24}\frac{ql^4}{D}=0{,}0124\frac{ql^4}{D}$$
$$w_5=\tfrac{5}{384}\frac{ql^4}{D}=0{,}0130\frac{ql^4}{D}$$

Pendapat-pendapat ini menunjukkan bagaimana saksamanya cara pendekatan ini.

c. Lantai persegi dimuati penuh terbagi rata.

Kita dapat menggunakan cara pendekatan di atas tadi, hanya saja sekarang ukuran ada *dua dimensi,* jadi bentang arah X dibagi-bagikan di dalam



Gambar XIII, 5ab

bagian-bagian sepanjang Δx dan bentang arah Y di dalam bagian-bagian sepanjang Δy. Suatu titik mempunyai absis m.Δx dan ordinat n.Δy; berhubung dengan itu, titik disebut mn dan lengkungannya, w_{mn}. Arti-arti Δw dapat dipelajari menurut gambar XIII.5a.

$$\Delta_x w_{(m-1)n}=w_{mn}-w_{(m-1)n};\ \Delta_x w_{mn}=w_{(m+1)n}-w_{mn}$$
$$\Delta_y w_{m(n-1)}=w_{mn}-w_{m(n-1)};\ \Delta_y w_{mn}=w_{m(n+1)}-w_{mn}$$

Setelah menentukan seperti di atas ini. maka selanjutnya:

$$\Delta_{xx}w_{mn} = \Delta_x w_{mn} - \Delta_x w_{(m-1)n} = w_{(m-1)n} - 2w_{mn} + w_{(m+1)n}$$
$$\Delta_{yy}w_{mn} = \Delta_y w_{mn} - \Delta_y w_{m(n-1)} = w_{m(n-1)} - 2w_{mn} + w_{m(n+1)}$$

Persamaan-persamaan (39) dan (40) menjadi:

$$\frac{\Delta_{xx}M}{\Delta x^2} + \frac{\Delta_{yy}M}{\Delta y^2} = -q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$
$$\frac{\Delta_{xx}w}{\Delta x^2} + \frac{\Delta_{yy}w}{\Delta y^2} = -\frac{M}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

Kita tentukan: $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{6}l$ (gambar XIII, 5ab)

$$\Delta_{xx}M + \Delta_{yy}M = -q\,.\,\Delta x^2 = -q\,.\,\tfrac{1}{36}l^2 = -qC, \text{ jadi } C = \tfrac{1}{36}l^2 \ldots \text{(a)}$$
$$\Delta_{xx}w + \Delta_{yy}w = -\frac{M}{D}\Delta x^2 = -\frac{M}{D}\cdot\tfrac{1}{36} = -\frac{M}{D}\,.\,C \quad \ldots\ldots \text{(b)}$$

Titik 0: $(M_1-2M_o+M_1)+(M_1-2M_o+M_1)=-qC$
Titik 1: $(M_o-2M_1+M_2)+(2M_{11}-2M_1)=-qC$
Titik 2: $(M_1-2M_2+M_3)+(2M_{21}-2M_2)=-qC$, sedang $M_3=0$
Titik 11: $(M_1-2M_{11}+M_{21})+(M_1-2M_{11}+M_{12})=-qC$, sedang $M_{12}=M_{21}$
Titik 21: $(M_{11}-2M_{21}+M_{13})+(M_2-2M_{21}+M_{22})=-qC$, sedang $M_{13}=0$
Titik 22: $(M_{12}-2M_{22}+M_{32})+(M_{21}-2M_{22}+2M_{23})=-qC$,
sedang $M_{23}=M_{32}=0$

$$\begin{aligned}
-4M_o + 4M_1 &= -Cq\\
M_o - 4M_1 + M_2 + 2M_{11} &= -Cq\\
M_1 - 4M_2 + 2M_{21} &= -Cq\\
2M_1 - 4M_{11} + 2M_{21} &= -Cq\\
M_2 + M_{11} - 4M_{21} + M_{22} &= -Cq\\
2M_{21} - 4M_{22} &= -Cq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-3M_o + M_2 + 2M_{11} &= -2Cq\\
M_o - 15M_2 + 2M_{11} + 8M_{21} &= -5Cq\\
-8M_2 + 4M_{11} + 2M_{21} &= -Cq\\
M_2 + M_{11} - 4M_{21} + M_{22} &= -Cq\\
2M_{21} - 4M_{22} &= -Cq
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
-44M_2+8M_1+24M_{21} &= -17Cq\\
-8M_2+4M_{11}+2M_{21} &= -Cq\\
4M_2+4M_{11}-14M_{21} &= -5Cq
\end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned}
-28M_2+20M_{21} &= -15Cq\\
-12M_2+16M_{21} &= 4Cq
\end{aligned}\right| \quad 13M_2 = 20Cq$$
$$M_2 = \tfrac{20}{13}Cq = 1{,}54Cq$$
$$M_{21} = \tfrac{1}{4}(3M+Cq) = 1{,}40Cq$$

$M_{11} = \frac{1}{4}(14M_{21} - 4M_2 - 5Cq) = 2{,}14\,Cq;$
$M_o = \frac{1}{3}(M_2 + 2M_{11} + 2Cq) = 2{,}61\,Cq$
$M_1 = M_o - \frac{1}{4}cQ = 2{,}36Cq;\ M_{22} = \frac{1}{4}(2M_{21} + Cq) = 0{,}95Cq$

Kita akan mementingkan *momen-maximum*, yang terdapat di titik 0 (tengah-tengah lantai), jadi $M_o = 2{,}61Cq = 2{,}61\frac{1}{36}l^2q = 0{,}0725ql^2$.

Menurut rumus (38) yang berbunyi $M = \dfrac{M_x + M_y}{1+\nu}$ sedang $M_x = M_y$ oleh karena keadaan simetris, kita mendapat :

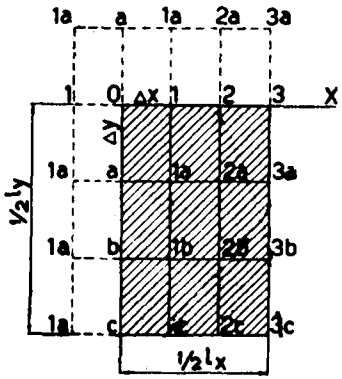
$$M_o = \frac{2}{(1+\nu)}M_{xo} \text{ atau } M_{xo} = M_{yo} = \frac{(1+\nu)}{2}M_o = \frac{(1+\nu)}{2}\,.\,0{,}0725\ ql^2,$$

dan dengan v = 0,3 kita memperoleh:

$$M_{xo} = M_{yo} = \frac{1{,}3}{2}\,.\,0{,}0725ql^2 = \mathbf{0{,}0471ql^2}$$

Di sini kita ingat bahwa di dalam hitungan "beton bertulang" kita anggap $M_{max} \simeq \frac{1}{20}ql^2 = 0{,}05ql^2$, sedang hasil yang saksama ada $0{,}0479ql^2$ (jadi bedanya < 2%).

Sesudah mendapat nilai-nilai M itu, kita dapat menghitung lengkungan-lengkungan menurut persamaan:



Gambar XIII, 5c

$$\begin{aligned}
-4w_o + 4w_1 &= -\frac{C}{D}M_o\\
w_o - 4w_1 + w_2 + 2w_{11} &= -\frac{C}{D}M_1\\
w_1 - 4w_2 + 2w_{21} &= -\frac{C}{D}M_2\\
2w_1 - 4w_{11} + 2w_{21} &= -\frac{C}{D}M_{11}\\
w_2 + w_{11} - 4w_{21} + w_{22} &= -\frac{C}{D}M_{21}\\
2w_{21} - 4w_{22} &= -\frac{C}{D}M_{22}
\end{aligned}$$

Di dalam contoh ini kita ambil lantai persegi murni, yaitu $l_x = l_y = l$.

Apabila $l_x \neq l_y$ maka $\Delta x \neq \Delta y$; $\Delta x = \dfrac{1}{n}l_x$ dan $\Delta y = \dfrac{1}{n}l_y$ (gambar XIII,5).

Dan jika $n = 6$ seperti di atas $\Delta x = \frac{1}{6}l_x$ dan $\Delta y = \frac{1}{6}l_y$;

$$\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} = \alpha = \frac{l_x^2}{l_y^2}\ ;\ \frac{\Delta_{xx}M}{\Delta x^2} + \frac{\Delta_{yy}M}{\Delta y^2} = -q;$$

$$\Delta_{xx}M + \alpha\Delta_{yy}M = -q\,.\,x^2 = -q\,.\,\tfrac{1}{36}l_x^2 = -qC$$

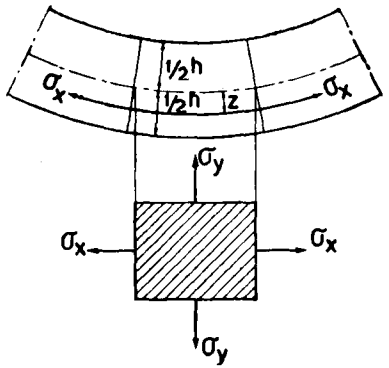
Titik 0: $(2M_1 - 2M_o) + \alpha(2M_a - 2M_o) = -qC$

Titik 1: $(M_o - 2M_1 + M_2) + \alpha(2M_{1a} - 2M_1) = -qC$

Titik 2: $(M_1 - 2M_2 + M_3) + \alpha(2M_{2a} - 2M_2) = -qC$, d.s.t.

§6. Lantai persegi panjang di atas dua perletakan.

Perletakan ada di bawah sisi-sisi yang panjang serta// sumbu-Y Menurut Hooke : gambar XIII, 6)



Gambar XIII, 6

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} = 0$$

$$\sigma_y = \nu\sigma_x$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}(1 - \nu^2)$$

$$\sigma_x = \frac{E\varepsilon_x}{1 - \nu^2} = \frac{E}{(1 - \nu^2)}\frac{z}{r}$$

di mana r = radius bengkokan $= -\dfrac{d^2w}{dx^2}$

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{(1 - \nu^2)}\cdot\frac{d^2w}{dx^2}$$

$$M = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h}\sigma_x z\,dz = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h}\frac{E}{1-\nu^2}\cdot z^2\frac{d^2w}{dx^2}\,dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\frac{d^2w}{dx^2} = -D\frac{d^2w}{dx^2}$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

Jika lebar lantai = 1 maka $\dfrac{Eh^3}{12} = EI$ jadi $D = \dfrac{EI}{1 - \nu^2}$.

Kita akan mempelajari lantai dimuati penuh terbagi rata, yang dibengkok menurut bidang silinder

a. *Perletakan bebas*

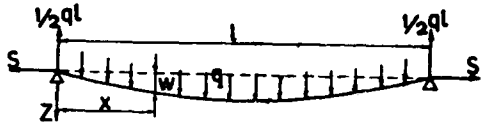
Tepi lantai dapat berputar, akan tetapi dapat mendekati s.s.l. ketika melengkung. Untuk mencapai ini, maka harus ada reaksi mendatar S.

yang bekerja ke luar, sedang $[S] = \left[\dfrac{\text{kg}}{\text{cm}}\right]$; $M = \frac{1}{2}\,qlx - \frac{1}{2}\,qx^2 - S.w.$

Setelah mempergunakan rumus (a), menjadi:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{1}{D}(\tfrac{1}{2}qlx - \tfrac{1}{2}qx^2 - Sw)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{Sw}{D} = -\frac{qlx}{2D} + \frac{qx^2}{2D}$$



Gambar XIII, 7

Mengadakan besaran baru $u^2 = \dfrac{Sl^2}{4D}$; jadi $[u^2] = \left[\dfrac{\text{kgcm}}{\text{kgcm}}\right] = [1]$ atau tak berdimensi

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \left(\frac{2u}{l}\right)^2 w - \frac{qlx}{2D} + \frac{qx^2}{2D}$$

Pemecahan persamaan differensi di atas ini ada:

$$w = C_1\sinh\frac{2ux}{l} + C_2\cosh\frac{2ux}{l} + \frac{ql^3x}{8u^2D} - \frac{ql^2x^2}{8u^2D} - \frac{ql^4}{16u^4D}$$

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ dan $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

Besaran-besaran tetap C_1 dan C_2 dapat dihitung menurut sarat-sarat bahwa: w = 0 untuk x = 0 dan x = 1

Dengan begitu kita mendapat :

$$C_1 = \frac{ql^4}{16u^2D}\frac{(1 - \cosh 2u)}{\sinh 2u};\ C_2 = \frac{ql^4}{16u^2D}$$

$$w = \frac{ql^4}{16u^4D}\left(\frac{1 - \cosh 2u}{\sinh 2u}\sinh\frac{2ux}{l} + \cosh\frac{2ux}{l} - 1\right) + \frac{ql^3x}{8u^2D} - \frac{ql^2x^2}{8u^2D}$$

Selanjutnya diingatkan bahwa

$$\cosh 2u = \cosh^2 u + \sinh^2 u;\ \sinh 2u = 2\sinh u\cosh u;$$

$$\cosh^2 u = 1 + \sinh^2 u$$

$$w = \frac{ql^4}{16u^4D}\left(\frac{-\sinh u\sinh 2ux/l + \cosh u\cosh 2ux/l}{\cosh u} - 1\right) + \frac{ql^2x}{8u^2D}(l - x)$$

atau

$$w = \frac{ql^4}{16u^2D}\left\{\frac{\cosh u(1 - 2x/l)}{\cosh u} - 1\right\} + \frac{ql^2x}{8u^2D}(l - x) \quad \ldots\ldots \text{(b)}$$

Di sini kita melihat bahwa lengkungan w tergantung kepada u yang sendirinya adalah f(S) di mana S belum terketahui

Kekuatan S ini dapat dihitung berdasarkan atas kenyataan, bahwa perpanjangan pada lantai: Δl, yang disebabkan oleh S ada selisih antara panjang busur yang dibentuk oleh lantai setelah melengkung dan panjangnya semula (l) Panjang busur bagian elemen.

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2} \infty dx\left\{1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right\}$$

$$d(\Delta l) = ds - dx = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx$$

$$\Delta l = \tfrac{1}{2}\int_o^l \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx$$

Menggunakan pendapat di atas, bahwa $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}(1-\nu^2)$ dan setelah mengisi $\sigma_x = \frac{S}{h}$ kita mendapat :

$$\Delta l = \frac{S}{Eh}(1-\nu^2)l = \tfrac{1}{2}\int_o^l \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx$$

Setelah mengisi nilai w menurut persamaan (b) serta menghitung $\frac{dw}{dx}$ dan menjalankan integrasi:

$$\frac{S}{Eh}(1-\nu^2)l = \frac{q^2l^7}{D^2}\left(\tfrac{5}{256}\frac{\tanh u}{u^7} + \tfrac{1}{256}\frac{\tanh^2 u}{u^6} - \frac{5}{256\,.\,u^6} + \frac{1}{384\,.\,u^4}\right)$$

$$S = \frac{4u^2D}{l^2}, \text{ serta } D = \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)}$$

$$\frac{E^2h^8}{(1-\nu^2)^2q^2l^8} = \tfrac{135}{16}\frac{\tanh u}{u^9} + \tfrac{27}{16}\frac{\tanh^2 u}{u^8} - \frac{135}{16u} + \frac{9}{8u^8} \quad \ldots\ldots \text{(c)}$$

Menghitung u di dalam persamaan ini sukar sekali, sedang menghitung nilai anggauta kiri jika u itu terketahui, lebih mudah. Berhubung dengan itu kita membuat grafik

$$f(u) = \tfrac{135}{16}\frac{\tanh u}{u^9} + \tfrac{27}{16}\frac{\tanh^2 u}{u^8} - \frac{135}{16u^8} + \frac{9}{8u^6}$$

dengan memberi nilai-nilai yang tertentu kepada u.

Dengan adanya grafik ini, kita dengan mudah mendapat nilai u jika $\frac{E^2h^8}{(1-\nu^2)^2q^2l^8}$ terketahui, dan kemudian menghitung $S = \frac{4u^2D}{l^2}$. (lihat S. Timoshenko: Theory of Plates and Shells)

Kemudian : $M = -D\frac{d^2w}{dx^2}$

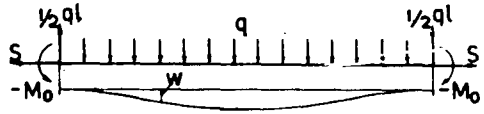
$$M_{max} = (M)_{x=\frac{1}{2}l}$$

$$\sigma_{max} = \frac{S}{h} + \frac{M_{max}}{\frac{1}{6}h^2}\ ;\ w_{max} = \tfrac{5}{384}\frac{ql^4}{D}\cdot\tfrac{24}{5}\frac{\operatorname{sech} u - 1 + \frac{1}{2}u^2}{u^4}$$

(terdapat dengan x = $\frac{1}{2}l$).

b. Perletakan jepitan

Sekarang tepi lantai tak boleh berputar, jadi $\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=o} = 0$.



Gambar XIII, 8

Momen jepit adalah M_O yang arah karjanya negatif, jadi diberi nilai-negatif

$$M = \tfrac{1}{2}qlx - \tfrac{1}{2}qx^2 - Sw + M_o$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{D} = -\frac{1}{D}\left(\tfrac{1}{2}qlx - \tfrac{1}{2}qx^2 - Sw + M_o\right)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{S}{D}w = -\frac{qlx}{2D} + \frac{qx^2}{2D} - \frac{M_o}{D}$$

$$w = C_1\sinh\frac{2ux}{l} + C_2\cosh\frac{2ux}{l} + \frac{ql^3x}{8u^2D} - \frac{ql^2x^2}{8u^2D} - \frac{ql^4}{16u^4D} + \frac{M_ol^2}{4u^2D}$$

$$\frac{dw}{dx} = 0 \text{ untuk } x = 0 \text{ dan } x = \tfrac{1}{2}l$$

$$w = 0 \text{ untuk } x = 0$$

$$C_1 = -\frac{ql^4}{16u^3D}\ ;\ C_2 = \frac{ql^4}{16u^3D}\coth u$$

$$M_o = \frac{ql^2}{4u^2} - \frac{ql^2}{4u}\coth u$$

$$w = -\frac{ql^4}{16u^3D}\sinh\frac{2ux}{l} + \frac{ql^4}{16u^3D}\coth u\cosh\frac{2ux}{l} + \frac{ql^3x}{8u^2D} - \frac{ql^2x^2}{8u^2D} - \frac{ql^4}{16u^3D}\coth u \text{ atau}$$

$$w = \frac{ql^4}{16u^3D}\frac{4^4}{\tanh u}\left\{\frac{\cosh u(1-2x/l)}{\cosh u} - 1\right\} + \frac{ql^2(l-x)x}{8u^2D} \quad \ldots \text{(d)}$$

Untuk menghitung S kita menempuh perjalanan seperti di atas:

$$\frac{S}{Eh}(1-\nu^2)l = \frac{q^2l^7}{D^2}\left(-\frac{3}{256u^5\tanh u} - \frac{1}{256u^4\sinh^2 u} + \frac{1}{64u^6} + \frac{1}{384u^4}\right)$$

$$\frac{E^2h^8}{(1-\nu^2)^2q^2l^8} = \left(-\frac{81}{16u^7\tanh u} - \frac{27}{16u^6\sinh^2 u} + \frac{27}{4u^8} + \frac{9}{8u^6}\right) \quad \ldots \text{(e)}$$

$$w_{max} = \tfrac{1}{384}\frac{ql^4}{D}\cdot\frac{24}{u^4}\left(\tfrac{1}{2}u^2 + \frac{u}{\sinh u} - \frac{u}{\tanh u}\right)$$

c. Perletakan dapat bergeser

Sebagai akibat lengkungan, perletakan mendekati satu sama lain sejauh λ.

$$\frac{S}{Eh}(1-\nu^2) = \tfrac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx - \lambda$$

Dapat dipergunakan di dalam kejadian a atau b

$$\frac{E^2h^8}{(1-\nu^2)^2q^2l^8}\left(1 + \frac{3l\lambda}{h^2u^2}\right) = \text{(c)}, \text{ kejadian a.}$$

$$\frac{E^2h^8}{(1-\nu^2)^2q^2l^8}\left(1 + \frac{3l\lambda}{h^2u^2}\right) = \text{(e)}, \text{ kejadian b.}$$

PERPUSTAKAAN DAERAH JAWA TIMUR
JL. MENUR PUMPUNGAN No. 32
S U R A B A Y A
TAHUN ANGGARAN 1996 / 1997